

L'equazione di Dirac  
Università degli studi di Padova  
Dipartimento di Fisica "Galileo Galilei"

Antonio Mason

Gennaio 2005

## Sommario

In queste pagine ho rielaborato gli appunti presi durante la prima parte del corso di Fisica Teorica tenuto nell'anno accademico 2003-2004 dal professor Antonio Masiero. Questi appunti coprono circa 20 ore di lezione e sono piuttosto dettagliati nello sviluppo dei calcoli. Ciò che mi ha spinto a scrivere questi appunti é la mancanza di un libro di testo abbastanza contenuto (qui sono 30 pagine) che esponga e discuta l'equazione di Dirac. Inoltre queste note sono in italiano. Naturalmente non si vede prendere per oro colato quello che é scritto qui, poiché l'autore, oltre ad essere disattento di natura é anche poco preciso nell'esposizione: d'altronde una esposizione rigorosa richiede una comprensione pressoché totale dell'argomento trattato, cosa ben distante dalla mia condizione attuale (e forse futura). In ogni caso va detto che per comprendere questi appunti é bene aver presente la relatività ristretta e il calcolo tensoriale (insomma bisogna saper alzare a abbassare indici senza incasinarsi), aver presenti le basi della meccanica quantistica non relativistica e ricordarsi qualcosa di metodi matematici. Comunque, se volete mandarmi critiche, commenti o quant' altro (magari non mandate virus) inviate una mail a [antopubly@tiscali.it](mailto:antopubly@tiscali.it).

# Indice

<b>Indice</b>	<b>1</b>
<b>1 L'equazione di Dirac</b>	<b>2</b>
1.1 Introduzione . . . . .	2
1.2 I pilastri da mantenere . . . . .	2
1.3 L'equazione di Klein-Gordon . . . . .	3
1.3.1 I problemi dell'equazione di K-G . . . . .	4
1.4 L'equazione di Dirac . . . . .	6
1.4.1 4-corrente conservata . . . . .	7
1.4.2 Limite a bassa energia . . . . .	9
1.5 La covarianza dell'equazione di Dirac . . . . .	11
1.5.1 Proprietá di trasformazione di $S(\Lambda)$ . . . . .	14
1.6 I bilineari di Dirac . . . . .	14
1.6.1 Lo spinore aggiunto . . . . .	14
1.6.2 I bilineari di Dirac . . . . .	15
1.7 Forma generale degli spinori . . . . .	17
1.8 Proprietá degli spinori . . . . .	19
1.8.1 Polarizzazione dell'equazione di Dirac . . . . .	20
1.9 I proiettori di energia e spin . . . . .	22
1.9.1 Proiettori di energia . . . . .	22
1.9.2 Proiettori di spin . . . . .	23
1.10 Pacchetti a energia positiva . . . . .	25
1.10.1 Costruzione del pacchetto . . . . .	25
1.10.2 Problemi del pacchetto . . . . .	26
1.11 Pacchetti a energia positiva e negativa . . . . .	28
1.11.1 Costruzione del pacchetto . . . . .	28
1.11.2 Peso degli spinori a energia negativa . . . . .	29
1.11.3 Il paradosso di Klein . . . . .	31
1.12 La teoria della lacuna . . . . .	32

# Capitolo 1

## L'equazione di Dirac

### 1.1 Introduzione

Se una particella ha massa a riposo  $m$ , posso definire una lunghezza d'onda associata alla particella, chiamata lunghezza d'onda Compton, nel seguente modo:

$$\lambda \equiv \frac{\hbar}{mc} \tag{1.1}$$

dove  $\hbar = h/2\pi$  é la costante di Planck razionalizzata e  $c$  é la velocità della luce. Nel caso dell'elettrone l'equazione (1.1) porge una lunghezza d'onda di  $3.8 \cdot 10^{-11}$ cm. Ora mi chiedo che energie sono necessarie per studiare una particella con risoluzione pari alla sua lunghezza Compton: dal principio di indeterminazione di Heisenberg se  $\lambda$  é l'incertezza sulla posizione di una particella, l'incertezza sul suo impulso é  $\Delta p \sim \hbar/\lambda \sim mc$  come si vede da (1.1). L'energia necessaria é quindi  $\Delta E \sim pc \sim mc^2$  poiché si é nel caso relativistico. Ci si trova nella situazione in cui l'energia necessaria a studiare la particella può produrne altre con la conversione massa-energia, quindi non si ha piú un sistema ad una particella! Questo esempio é servito a mostrare come la meccanica quantistica basata sull'equazione di Schrodinger non sia adatta a descrivere sistemi relativistici, in quanto non si hanno piú sistemi ad una particella. Inoltre l'equazione di Schrodinger non é covariante per trasformazioni di Lorentz. Quindi nella prossima sezione vedremo quali sono i pilastri della meccanica quantistica e della relatività che si vogliono mantenere in modo da fissare i requisiti minimi che una teoria quantistica relativistica deve soddisfare ( ci si limita alla teoria della relatività ristretta in quanto la gravità non viene mai presa in considerazione quando si trattano particelle elementari a causa della sua enorme debolezza; tra l'altro una teoria quantistica della gravitazione manca tuttora).

### 1.2 I pilastri da mantenere

Tentando una conciliazione fra relatività ristretta e meccanica quantistica si dovranno mantenere un insieme minimo di caratteristiche essenziali di queste due teorie. Dalla relatività si vuole mantenere la covarianza (al di lá di tante parole vedremo meglio studiando l'equazione di Dirac e di Klein-Gordon cosa significa questo requisito) delle equazioni sotto trasformazioni di Lorentz e la causalità: i due eventi  $(t_0, \vec{x}_0)$  e  $(t_1, \vec{x}_1)$  sono causalmente connessi se e solo se  $c^2(t_1 - t_0)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_0)^2 > 0$ . Per quanto riguarda la relatività é tutto; passiamo alla meccanica quantistica.

Gli stati quantistici sono rappresentati da vettori di stato  $|\psi\rangle$  di uno spazio di Hilbert (piú precisamente lo spazio  $L_2$  formato da tutte le funzioni modulo quadro integrabili). La probabilità  $W$  che lo stato  $|\psi\rangle$  si trovi nell'autostato  $|\phi\rangle$  é data da  $W = |\langle\phi|\psi\rangle|^2$ . Gli osservabili sono rappresentati da operatori autoaggiunti in modo da avere autovalori reali. Ogni vettore di stato  $|\psi\rangle$  puó essere decomposto in una sovrapposizione di stati di base  $|\psi_n\rangle$ , detti autostati, caratterizzati dal fatto di avere energia definita:  $|\psi\rangle = \sum_n a_n |\psi_n\rangle$  dove i coefficienti complessi  $a_n$  sono dati dal prodotto scalare  $a_n = \langle\psi_n|\psi\rangle$ . Il valore di aspettazione di un osservabile  $\Omega$  in un certo stato  $\psi$  é dato da  $\langle\psi|\Omega|\psi\rangle$ . L'operatore di evoluzione temporale é rappresentato da un operatore unitario  $U(t_2 - t_1)$  definito nel modo seguente:

$$|\psi(t_2)\rangle = U(t_2 - t_1)|\psi(t_1)\rangle \quad (1.2)$$

L'evoluzione temporale é legata all'operatore hamiltoniano  $H$ , i cui autovalori sono i possibili valori dell'energia di un sistema:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(t)\rangle = H|\psi\rangle \quad (1.3)$$

Dal teorema di Wigner si ha la corrispondenza biunivoca fra le simmetrie di un sistema fisico e gli operatori unitari o anti-unitari. Ricordo che un operatore é unitario se  $UU^T = U^T U = 1$ . Inoltre gli operatori godono delle seguenti proprietá: se  $\|x\| = \alpha \Rightarrow \|Ux\| = \alpha$  ossia preservano la norma di un vettore; inoltre preservano anche il prodotto scalare di due vettori:  $(x, y) = (Ux, Uy)$ . Infine commutano con l'hamiltoniana del sistema: se  $U$  é un operatore unitario corrispondente ad una simmetria di un sistema fisico descritto da un'hamiltoniana  $H$  allora  $[U, H] = 0$ . In meccanica quantistica non relativistica l'equazione di Schrodinger si ottiene partendo dall'espressione classica dell'energia

$$E = \frac{P^2}{2m} + V$$

unita al principio di corrispondenza:

$$\begin{cases} E & \rightarrow i\hbar \frac{d}{dt} \\ P & \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \end{cases}$$

In meccanica quantistica relativistica proveremo a fare altrettanto partendo dall'equazione *relativistica* dell'energia, anziché da quella classica. Otterremo in questo modo la prima equazione relativistica e quantistica, l'equazione di Klein-Gordon, che avrá pregi ma anche dei difetti che ci spingeranno ad intraprendere una strada piú radicale battuta per la prima volta da Dirac.

### 1.3 L'equazione di Klein-Gordon

Partiamo dall'equazione relativistica dell'energia

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

ad uno stato  $\psi$  ossia  $E^2\psi = (p^2 c^2 + m^2 c^4)\psi$  e applicando il principio di corrispondenza otteniamo

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 c^4 \psi$$

Per semplificare la notazione utilizzo le unità naturali per cui  $c = \hbar = 1$ . In questo modo il principio di corrispondenza diventa

$$P^\mu = (E, \vec{P}) = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\vec{\nabla}}{i}\right) \Rightarrow P_\mu = \left(i \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\vec{\nabla}}{i}\right)$$

Utilizzo il tensore metrico con segnatura  $(-, +, +, +)$  e in questo modo l'operatore D'Alambertiano  $\square$  assume la forma

$$\square = - \left( \frac{\partial}{\partial_\mu} \frac{\partial}{\partial^\mu} \right) = P_\mu P^\mu$$

dove é sottintesa la somma per  $\mu = 0, 1, 2, 3$  e ricordo che l'operatore D'Alambertiano é un operatore scalare, invariante per trasformazioni di Lorenz. Riscrivendo in unità naturali

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 c^4 \psi$$

si ottiene

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \psi = -m^2 \psi \Rightarrow (\square + m^2) \psi = 0 \quad (1.4)$$

L'equazione appena ottenuta é detta equazione di Klein-Gordon ed é covariante a vista, poiché il D'Alambertiano e la massa a riposo  $m$  sono invarianti di Lorenz. Tra l'altro, se si considera un corpo a massa nulla si ottiene  $\square \phi = 0$  che é l'equazione cui soddisfano le onde elettromagnetiche, o anche i potenziali scalare, vettore, i campi elettrico e magnetico nel vuoto. La covarianza a vista dell'equazione di K-G é una buona proprietá, però l'equazione (1.4) nasconde dei problemi che impediscono l'interpretazione di  $\psi$  come funzione d'onda: come vedremo fra poco l'equazione di K-G non permette di definire una norma non negativa per la funzione d'onda conservata durante l'evoluzione temporale, come invece vale nel caso non relativistico. Inoltre l'equazione di K-G nasconde un'altro problema, forse anche peggiore: si é partiti da un' equazione quadratica nell' energia per cui sono possibili anche soluzioni a energia negativa che rendono instabile qualsiasi sistema fisico. Se si fosse partiti da  $E = \sqrt{p^2 + m^2}$  non ci sarebbe questo problema, ma si perderebbe la covarianza a vista. Comunque, al di lá di questo problema, che si ripresenterá anche nell'equazione di Dirac vediamo come nasce l'impossibilitá di interpretare  $\psi$  della (1.4) come una funzione d'onda.

### 1.3.1 I problemi dell'equazione di K-G

Nella meccanica quantistica non relativistica, utilizzando l'equazione di Schrodinger si riesce a definire una densitá di probabilitá conservata nell'evoluzione temporale associata alla funzione d' onda  $\phi$ . Infatti, applicado l'operatore hamiltoniano ad una funzione d'onda e alla sua complessa coniugata posso scrivere

$$\begin{aligned} H\psi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi + V(r)\psi \\ H\psi^* &= -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi^* + V(r)\psi^* \end{aligned}$$

Ora, moltiplicando la prima equazione a sinistra per  $\psi^*$  e la seconda a destra per  $\psi^{**} = \psi$  e sottraendo la seconda dalla prima di trova

$$0 = i \frac{d}{dt} (\psi^* \psi) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \psi^* \vec{\nabla}^2 \psi - (\vec{\nabla}^2 \psi^*) \psi \right)$$

ricordando che  $\psi^* H \psi = (H \psi^*) \psi$  e  $H \propto id/dt$ . Se definisco una 3-corrente di probabilità  $\vec{j}$  come

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} \left( \psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right)$$

e ne calcolo la divergenza, vedo che si trova

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\hbar}{2im} \left( \psi^* \vec{\nabla}^2 \psi - (\vec{\nabla}^2 \psi^*) \psi \right)$$

per cui, definendo anche la quantità  $\rho = \psi^* \psi = ||\psi||^2$  si riesce a scrivere la legge di conservazione

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

che ha la stessa forma della conservazione della quadri-corrente del campo elettromagnetico in relatività. Infatti si può scrivere in forma relativisticamente invariante  $\partial_\mu j^\mu = 0$  con  $\partial_\mu = (-\partial_t, \vec{\nabla})$  e  $j^\mu = (\rho, \vec{j})$  e  $\rho$  è una quantità conservata. Proviamo a vedere se lo stesso procedimento funziona con l'equazione di K-G: partiamo dalla coppia di equazioni (utilizzo unità naturali)

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\psi &= 0 \\ (\square + m^2)\psi^* &= 0 \end{aligned}$$

Come prima, moltiplichiamo la prima a sinistra per  $\psi^*$ , la seconda a destra per  $\psi$  e sottraiamo la seconda dalla prima ottenendo

$$\psi^* \square \psi - (\square \psi^*) \psi = 0$$

Esplicitando  $\square = \partial_\mu \partial^\mu$  si verifica che la precedente equazione può essere scritta come

$$\partial_\mu (\psi^* \partial^\mu \psi - (\partial^\mu \psi^*) \psi) = 0$$

dove, come sempre, è sottintesa la somma sugli indici ripetuti (convenzione di Einstein). Ora ci si chiede se è possibile mettere l'ultima equazione scritta nella forma di una legge di conservazione. In effetti, separando la parte spaziale e temporale di  $\partial_\mu$  e definendo

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\hbar}{2imc} (\psi^* \partial^0 \psi - (\partial^0 \psi^*) \psi) \\ \vec{j} &= \frac{\hbar}{2im} \left( \psi^* (\vec{\nabla} \psi) - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi \right) \end{aligned}$$

si può scrivere

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Il problema però è che  $\rho$  appena definito non può essere scritto come la derivata temporale di una densità di probabilità a causa del segno “-”. Quindi ricapitolando l'equazione di K-G ha due grossi problemi: l'impossibilità di definire una densità di probabilità conservata durante l'evoluzione temporale e l'esistenza di soluzioni a energia negativa che destabilizzano il sistema. Il cercare di risolvere questi problemi ci porterà all'equazione di Dirac, per la quale si riuscirà a definire una densità di probabilità definita positiva e conservata ma non si potranno evitare le soluzioni a energia negativa.

## 1.4 L'equazione di Dirac

Dal principio di corrispondenza un termine  $\propto E^2$  porta un termine  $\propto \partial^2/\partial t^2$  mentre  $\rho = j^0 \propto \partial/\partial t$  come si vede dalle equazioni ricavate per definire una densità di probabilità nel caso di K-G. Allora ci chiediamo (in realtà fortunatamente Dirac si è già posto tutte queste domande) se riusciamo a scrivere una versione dell'equazione di K-G che contenga solo derivate prime rispetto al tempo e derivate prime rispetto alle coordinate. Insomma tentiamo un ansatz del tipo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \left( \alpha_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \right) + \beta m c^2 \psi \equiv H \psi \quad (1.5)$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$  sono coefficienti arbitrari e da buona equazione relativistica si è inclusa anche l'energia di riposo. Se quadro l'equazione (1.5) per ottenere una sorta di equazione di K-G si vede che compaiono termini che nell'equazione originale di K-G non c'erano. Posso ordinare i termini nel seguente modo:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \hbar^2 c^2 \left( \sum_{i,j=1}^3 \frac{\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} \right) + \beta^2 m^2 c^4 \psi + \frac{\hbar c^3 m}{i} \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}$$

Si è ottenuta un'espressione piuttosto complicata, con molti più termini del necessario: infatti si vuole recuperare la forma  $E^2 = p^2 + m^2$  espressa attraverso il principio di corrispondenza. Affinché l'equazione ottenuta sia compatibile con  $E^2 = p^2 + m^2$  i coefficienti  $\alpha_i, \beta$  dovranno soddisfare determinate condizioni. Infatti non devono comparire termini che coinvolgano derivate spaziali miste, termini contenenti derivate spaziali e massa e i coefficienti davanti a derivate seconde devono valere 1. In formule le condizioni diventano

$$\begin{aligned} \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\ \beta^2 = \alpha_i^2 &= 1 \quad i = 1, 2, 3 \\ \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 0 \quad i \neq k \end{aligned}$$

Da queste condizioni si vede che  $\alpha_i, \beta$  non possono essere numeri, ma devono essere matrici hermitiane (per avere autovalori reali) e uguali alla propria inversa. Queste due condizioni vincolano gli autovalori di queste matrici ad essere  $\pm 1$ . Per determinare le matrici  $\alpha_i, \beta$  ne considero la traccia:

$$tr \alpha_i = tr(\alpha_i \beta^2) = tr(\alpha_i \beta \beta) = tr(\beta \alpha_i \beta) = tr(-\alpha_i \beta \beta) = tr(-\alpha_i)$$

dove si è usato la proprietà della traccia di essere ciclica nel terzo passaggio e le proprietà di anticommutazione viste prima nel quarto. Il risultato ottenuto vincola le matrici  $\alpha_i$  ad avere traccia nulla ed ad avere ordine pari: se le matrici hanno ordine dispari non possono avere traccia nulla perché i loro autovalori possono assumere solo i valori  $\pm 1$  e la traccia di una matrice è la somma dei suoi autovalori. Provo matrici di ordine 2: cerco 4 matrici hermitiane a traccia nulla con autovalori  $\pm 1$ . Le matrici di Pauli soddisfano tutte queste caratteristiche ma sono soltanto 3 mentre ne servono 4. Allora provo matrici di ordine 4 e in questo caso si riescono a trovare 4 matrici che soddisfano ai criteri richiesti; anzi la scelta non è unica. La scelta seguita qui è la scelta di Dirac:

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$



dove  $\sigma_i$  sono le metrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché  $\sigma_i, \beta$  sono matrici  $4 \times 4$ ,  $\psi$  dell'equazione (1.5) deve essere un oggetto a 4 componenti, altrimenti il prodotto matriciale riga per colonna non avrebbe senso. Quindi l'equazione (1.5) assume la forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi_\gamma}{\partial t} = \frac{\hbar c}{i} \sum_{\tau=1}^4 \alpha_{i\gamma\tau} \frac{\partial \psi_\tau}{\partial x_i} + \sum_{\tau=1}^2 mc^2 \beta_{\gamma\tau} \psi_\tau = \sum_{\tau=1}^4 H_{\gamma\tau} \psi_\tau \quad (1.7)$$

dove  $\gamma$  numera le righe delle matrici  $\sigma$  e  $\tau$  numera le colonne delle matrici  $\sigma$ , quindi  $\gamma, \tau = 0, 1, 2, 3$ . L'indice  $i$ , sommato da uno a tre, numera invece le diverse matrici  $\sigma$ . L'equazione (1.7) sta a dire che in realtà si hanno 4 equazioni, una per ogni valore dell'indice  $\gamma$ . Per poter scrivere l'equazione (1.7) in una forma piú comoda modifico la scelta fatta in (1.6) ponendo

$$\beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \quad \gamma_i = \beta \sigma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Indico queste matrici con  $\gamma^\nu, \nu = 0, 1, 2, 3$  e si verifica la proprietá di anticommutazione  $[\gamma^\mu, \gamma^\nu] = 2g^{\mu\nu}$ . Omettendo gli indici matrciali  $\gamma, \tau$  e ponendo  $\hbar = c = 1$  l'equazione (1.7) diventa

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i} \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} - m\beta \right) \psi = 0$$

Moltiplicando tutti i termini per  $\beta$  ricordando che  $\beta = \gamma^0$ ,  $\beta \alpha_i = \gamma^i$  e  $\beta^2 = 1$  si ottiene

$$\left( i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^i \frac{\partial}{\partial x_i} - m1_4 \right) \psi = 0$$

Il prodotto di matrici per derivate si presenta nella forma relativistica per cui posso scrivere in modo piú compatto

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (1.8)$$

dove é sottintesa la somma sull'indice  $\mu$ . Quella appena scritta é l'equazione di Dirac. L'equazione (1.8) merita qualche commento: l'oggetto  $\psi$  rappresenta un oggetto non scalare, ossia dotato di spin, che quindi non é invariante sotto trasformazioni di Lorentz. L'equazione di K-G invece descrive oggetti scalari, ossia di spin zero, come i fotoni. Situazione analoga si ha per l'equazione di Schrodinger, che non tiene conto dello spin delle particelle. Il prossimo passo sará mostrare che l'equazione (1.8) permette di definire una densitá di probabilitá definita positiva, ma il problema delle soluzioni a energia negativa resterá.

#### 1.4.1 4-corrente conservata

Si é visto nella sezione precedente che l'equazione di K-G (1.4) non permette di associare a  $\psi$  il significato di funzione d'onda, in quanto non si riesce a definire una densitá di probabilitá definita positiva e conservata durante l'evoluzione temporale. Vediamo ora se con l'equazione di Dirac (1.8) le cose vanno diversamente. Scriviamo l'equazione di Dirac per lo spinore  $\psi$  e per il suo complesso coniugato: chiamiamo spinore quest'oggetto a 4 componenti che soddisfa l'equazione di Lorentz e che sotto trasformazioni di Lorentz *non* trasforma come un vettore,

altrimenti non avremmo inventato un nuovo termine! Separando la derivazione spaziale da quelle temporale, omettendo gli indici che numerano righe e colonne delle matrici  $4 \times 4$  e utilizzando la matrici originali  $\alpha_i$  e  $\beta$  si ha la coppia di equazioni:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{i} \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + m \beta \psi \\ -i \frac{\partial \psi^*}{\partial t} &= -\frac{1}{i} \left( \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \right) \alpha_k^\dagger + m \psi^\dagger \beta^\dagger \end{aligned}$$

Prima di proseguire vanno puntualizzati alcuni fatti di carattere metemático: se lo spinore  $\psi$  é definito come

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \psi^\dagger = \psi^{T*} = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

Inoltre le matrici  $\alpha$  e  $\beta$  sono hermitiane:  $\alpha_k^\dagger = \alpha_k$ ,  $\beta^\dagger = \beta$  e in generale, se A e B sono operatori  $(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ . Utilizzando queste proprietá, moltiplicando la prima equazione a sinistra per  $\psi^\dagger$  e la seconda a destra per  $\psi$  il sistema precedente diventa

$$\begin{aligned} \psi^\dagger i \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{i} \psi^\dagger \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \psi^\dagger m \beta \psi \\ -i \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi &= -\frac{1}{i} \left( \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \right) \alpha_k \psi + m \psi^\dagger \beta \psi \end{aligned}$$

Sottraendo la seconda equazione dalla prima si ha

$$i \left( \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \left( \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \psi \right) = \frac{1}{i} \left( \psi^\dagger \alpha_k \frac{\partial \psi}{\partial x_k} + \left( \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x_k} \right) \alpha_k \psi \right)$$

Applicando la regola di Leibniz al contrario si vede che l'equazione precedente si può scrivere come (le matrici  $\alpha$  sono costanti)

$$i \frac{\partial(\psi^\dagger \psi)}{\partial t} = \frac{1}{i} \frac{\partial(\psi^\dagger \alpha_k \psi)}{\partial x_k} \quad (1.9)$$

L'equazione appena scritta mostra come, partendo dall'equazione di Dirac sia possibile interpretare  $\psi$  come una funzione d'onda in quanto posso definire una densitá di probabilitá  $\rho = j^0$  definita positiva e conservata nell'evoluzione temporale:

$$\rho = j^0 = \psi^\dagger \psi = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \sum_{\sigma=1}^4 \psi_\sigma^* \psi_\sigma \quad (1.10)$$

mentre la 3-corrente spaziale assume la forma

$$j_k = \psi^\dagger \alpha_k \psi \quad \text{con } k = 1, 2, 3 \quad (1.11)$$

Come già detto molte volte, il problema delle soluzioni a energia negativa resta e ne parleremo piú avanti. Ora ci concentreremo ad esaminare il limite a bassa energia dell'equazione di Dirac che scriveremo nella forma

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi + \beta m \psi \quad \text{con } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \vec{\nabla} = (\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) \quad (1.12)$$

### 1.4.2 Limite a bassa energia

Divido lo spinore  $\psi$  in due pezzi  $\phi$  e  $\chi$  di due componenti ciascuna:  $\psi \equiv (\phi, \chi)$ . Con queste definizioni l'equazione (1.12) si scompone in due equazioni:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial\phi}{\partial t} &= \frac{1}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi + m\phi \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= \frac{1}{i}\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\phi - m\chi \end{aligned}$$

come si verifica ricordando la forma delle matrici  $\alpha$ :

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} \quad \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & 1_2 \end{pmatrix}$$

L'equazione del moto di una particella in un campo elettromagnetico é (si vede che é cosí pensando alla forma dell'equazione (1.5)) é:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left( \vec{\alpha} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right) + \beta m - e\phi \right) \psi \quad (1.13)$$

dove  $A^\mu = (\phi, \vec{A})$  é il 4-potenziale del campo elettromagnetico ossia  $\phi$  é il potenziale elettromagnetico e  $\vec{A}$  é il potenziale vettore legato al campo magnetico  $\vec{B}$  da  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ . Infine si nota che, se  $\hbar = 1$  allora l'operatore momento coincide con il gradiente:  $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$  e sotto l'azione del campo elettromagnetico si ha  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}$ . Utilizzando la decomposizione vista prima per lo spinore  $\psi$  e definendo  $\vec{\pi} = \left( \vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A} \right)$  l'equazione (1.13) diventa

$$i\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = \left( \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m - e\phi \right) \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (1.14)$$

Nell'approssimazione non relativistica, il termine di massa é l'energia di riposo  $m$  per cui l'equazione (1.14) si riduce a

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \beta m\psi$$

Ricordando la struttura della matrice  $\beta$  ricordata prima, é immediato che le soluzioni dell'equazione precedente sono

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_2 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \psi_3 = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_4 = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Le prime due soluzioni corrispondono ad energie positive: l'equazione agli autovalori  $H\psi_{1,2} = i\frac{d\psi_{1,2}}{dt} = E\psi_{1,2}$  porge  $E = m$ . Piú problematiche sono le altre due soluzioni per le quali l'equazione agli autovalori  $H\psi_{3,4} = i\frac{d\psi_{3,4}}{dt} = E\psi_{3,4}$  corrisponde alla soluzione  $E = -m$  il che é un risultato spinoso visto che si stanno considerando particelle libere. Allora ci si chiede perché

studiare l'equazione di Dirac se fornisce risultati assurdi? La risposta é che l'equazione di Dirac descrive ottimamente l'elettrone ( e in genere i fermioni di spin 1/2) relativistico, ne fornisce il corretto (con buona approssimazione) momento magnetico, include lo spin dell'elettrone e in ogni caso le matrici  $\gamma$  entreranno fortemente nel formalismo della  $Q.E.D.$  che é la teoria meglio testata in assoluto. Insomma, una discussione approfondita delle proprietá dell'equazione di Dirac non fa male, anzi é doverosa.

Per continuare nell'analisi delle soluzioni dell'equazione di Dirac definiamo uno spinore quasi statico  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\chi})$ , ossia  $d(\tilde{\varphi}, \tilde{\chi})/dt \simeq 0$  e la dipendenza temporale é per lo piú conglobata negli esponenziali delle soluzioni (1.15):

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} e^{-imt} \\ \tilde{\chi} e^{imt} \end{pmatrix} = i \left[ \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\varphi}) \\ \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\chi}) \end{pmatrix} e^{-imt} - im \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} e^{-imt} + im \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} e^{imt} \right]$$

Utilizzando l'equazione (1.14) e semplificando i fattori esponenziali comuni si trova

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi}) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} - 2m \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix}$$

poiché i termini in  $m\tilde{\varphi}$  si elidono e quelli in  $m\tilde{\chi}$  si sommano (a causa della forma della matrice  $\beta$ ). Per maggior chiarezza scriviamo in modo separato le equazioni per  $\tilde{\varphi}$  e  $\tilde{\chi}$  ottenendo il sistema seguente:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \tilde{\chi} + e\phi \tilde{\varphi} \\ i \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \tilde{\varphi} + e\phi \tilde{\chi} - 2m \tilde{\chi} \end{aligned}$$

(ricordando la forma fuori diagonale delle matrici  $\alpha$  che miselano i bispinori  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\chi})$ ). Nel limite non relativistico la componente di energia elettrostatica  $e\phi\tilde{\chi}$  é trascurabile rispetto all'energia di massa; ricordando che  $\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \simeq 0$  la seconda equazione diventa

$$0 \simeq \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \tilde{\varphi} - 2m \tilde{\chi} \Rightarrow \tilde{\chi} \simeq \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \tilde{\varphi}$$

Sostituendo nella prima equazione si ha

$$i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \left( \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}}{2m} \right) \tilde{\varphi} + e\phi \tilde{\varphi}$$

Esplicitando  $\vec{\pi} = \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$  e  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$  si ottiene  $(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) = \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = -e\vec{\sigma} \cdot \vec{B}$  e, sostituendo nell'equazione precedente si trova

$$i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} \tilde{\varphi} + e\phi \tilde{\varphi} - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \tilde{\varphi} \quad (1.16)$$

che coincide con l'equazione di Pauli che descrive un elettrone immerso in un campo elettromagnetico. Quindi l'equazione di Dirac descrive correttamente il comportamento di un fermione di spin 1/2 (uno spinore) tenendo conto del suo spin, come vedremo adesso: quantisticamente l'energia magnetica d'interazione di un elettrone con un campo magnetico é data da

$$H_{magn} = -\frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

ossia si definisce il momento magnetico come il coefficiente davanti al campo magnetico per ottenere l'energia d'interazione magnetica ossia

$$\vec{\mu} = \frac{e}{mc} \hbar \frac{\vec{\sigma}}{2} = 2 \frac{e}{2mc} \vec{s} \quad \text{con} \quad \vec{s} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$$

dove  $\vec{s}$  é l'operatore di spin. Dalla relazione generale

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2mc} \vec{s}$$

si ricava che il rapporto giromagnetico dell'elettrone é 2 nel limite non relativistico ed é quello che si vede sperimentalmente con l'effetto Zeeman. Il realtà il  $g$  dell'elettrone é leggermente maggiore di 2 ma questo si ricava in *Q.E.D.* con calcoli oltre il primo ordine nello sviluppo perturbativo. Quindi l'equazione di Dirac (1.8) descrive correttamente l'elettrone relativistico. Nella prossima sezione tratteremo il problema della covarianza dell'equazione di Dirac: a differenza dell'equazione di K-G (1.4) l'equazione di Dirac non é covariante a vista perciò la sua covarianza andrà ricavata esplicitamente.

## 1.5 La covarianza dell'equazione di Dirac

Riscriviamo l'equazione di Dirac (1.8)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0 \quad (1.17)$$

Lo spinore  $\psi$  deve trasformarsi nel passaggio da un sistema di riferimento ad un'altro perché  $\partial/\partial_\mu$  si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz e le matrici  $\gamma$  sono costanti. Visto che si chiede la covarianza di ogni legge fisica per trasformazioni di Lorentz l'equazione (1.17), valida in un sistema di riferimento che chiamo O, dovrà mantenere la stessa forma in un nuovo sistema di riferimento O' legato ad O da una trasformazione di Lorentz  $\Lambda$ . Nel nuovo sistema di riferimento lo spinore  $\psi$  diventa  $\psi'$ , le derivate sono  $\partial/\partial'_\mu$  mentre le matrici  $\gamma$  sono costanti. Per cui nel nuovo sistema di riferimento (1.17) assume la forma

$$i\gamma^\mu \frac{\partial \psi'(x')}{\partial x'^\mu} - m\psi'(x) = 0$$

Il nuovo spinore  $\psi'$  dipende dalla relazione dei due sistemi di riferimento, ossia  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$  dove la matrice di trasformazione  $S(\Lambda)$  dipenda dalla matrice di trasformazione di Lorentz  $x' = \Lambda x$ . In generale  $S(\Lambda)$  é una matrice  $4 \times 4$  a coefficienti complessi,  $S(\Lambda) \in M(4, \mathbb{C})$ , e chiedo che abbia determinante diverso da zero in modo da poterla invertire. In questo modo l'equazione precedente diventa

$$i\gamma^\mu \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \frac{\partial (S(\Lambda)\psi(x))}{\partial x^\nu} - mS(\Lambda)\psi(x) = 0 \quad \text{con} \quad \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \Lambda^{-1\nu}_\mu$$

Moltiplicando a sinistra per  $S(\Lambda)^{-1}$  l'equazione precedente diventa

$$iS(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu S(\Lambda) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\nu} - m\psi(x) = 0$$

( $S(\Lambda)$  é passata a sinistra dell'operatore di derivazione perché, come la matrice di trasformazione di Lorentz, non dipende dalle coordinate). Per avere la covarianza dell'equazione di Dirac, cioè per ritornare alla forma (1.17), la matrice  $S(\Lambda)$  dovrà soddisfare alla condizione

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^\mu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu S(\Lambda) = \gamma^\nu. \quad (1.18)$$

Tra l'altro l'equazione (1.18) permette di definire con piú precisione la nozione di spinore: uno spinore di Lorentz a 4 componenti  $\psi(x)$  é una funzione d'onda che sotto la trasformazione di Lorentz  $\Lambda$  trasforma come  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$  con  $S(\Lambda)$  tale che  $S(\Lambda)^{-1}\gamma^\nu S(\Lambda) = \Lambda_\mu^\nu\gamma^\mu$ . Ora arriva la parte difficile: trovare la forma di  $S(\Lambda)$ . A questo proposito consideriamo una trasformazione infinitesima di Lorentz. In generale la matrice di trasformazione di Lorentz per un boost lungo l'asse  $x$  con velocitá  $v$  ha la forma

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \beta = \frac{v}{c}$$

per cui, se  $v \rightarrow 0$ , la matrice di Lorentz si riduce all'identitá. Quindi una trasformazione infinitesima si discosterá poco dall'identitá, ossia per una trasformazione infinitesima vale:

$$\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \delta\omega_\nu^\mu \quad \Lambda^{-1\nu} = \delta_\nu^\mu - \delta\omega_\nu^\mu$$

in modo che, al primo ordine  $\Lambda\Lambda^{-1} = 1$  e le matrici antisimmetriche  $\delta\omega_\nu^\mu$  sono tali che  $\delta\omega_i^0$  corrispondono ai boost di Lorentz e le matrici  $\delta\omega_j^i$  corrispondono alle rotazioni spaziali. Infatti le matrici indipendenti antisimmetriche  $4 \times 4$  sono 6. Inoltre definisco

$$S^{-1}(\Lambda) = 1_4 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\delta\omega^{\mu\nu} \quad (1.19)$$

dove  $\sigma^{\mu\nu}$  sono sei matrici antisimmetriche  $4 \times 4$ . Non si é fatto altro che spostare il problema dalla determinazione di  $S(\Lambda)$  a quella delle  $\sigma_{\mu\nu}$ , sfruttando il fatto che per trasformazioni infinitesime  $S(\Lambda)$  si discosta poco dall'identitá. Ora bisogna inserire lo sviluppo (1.19) in (1.18) e trascurare i termini di ordine superiore a 1 in  $\delta\omega$ :

$$\underbrace{\left(1_4 + \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\delta\omega^{\alpha\beta}\right)}_{S^{-1}(\Lambda)} \gamma^\mu \underbrace{\left(1_4 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\delta\omega^{\alpha\beta}\right)}_{S(\Lambda)} = \underbrace{\left(\delta_\nu^\mu + \delta\omega_\nu^\mu\right)}_{\Lambda_\nu^\mu} \gamma^\nu$$

e trascurando il termine in  $\delta\omega^2$  si ottiene

$$\gamma^\mu - \frac{i}{4}\delta\omega^{\alpha\beta}(\gamma^\mu\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^\mu) = \gamma^\mu + \delta\omega_\nu^\mu\gamma^\nu$$

Per l'antisimmetria di  $\delta\omega_\nu^\mu$  vale  $\delta\omega_\nu^\mu = \frac{1}{2}(\delta\omega_\nu^\mu\gamma^\mu - \delta\omega_\nu^\mu\gamma^\nu)$  e, semplificando il  $\gamma^\mu$  comune ai due membri si ha

$$-\frac{i}{4}(\gamma^\nu\sigma_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta}\gamma^\nu) = \frac{1}{2}(\eta_\alpha^\nu\gamma_\beta - \eta_\beta^\nu\gamma_\alpha)$$

dove si é usata la metrica piatta  $\eta_\mu^\nu$  per passare da  $\delta\omega^{\alpha\beta}$  del primo membro a  $\delta\omega_\beta^\alpha$  in modo da poterlo semplificare nei due membri. Alla fine, al di lá dei passaggi piuttosto confusi si trova

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \gamma_\mu = \eta_{\mu\nu}\gamma^\nu \quad (1.20)$$

Inserendo questo risultato in (1.19) si ottiene:

$$S(\Lambda) = 1_4 + \frac{1}{8}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]\delta\omega^{\mu\nu} \quad (1.21)$$

che vale per una trasformazione infinitesima di coordinate. E' utile notare alcune proprietà di commutazione delle matrici  $\gamma$ :

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2\delta_{\mu\nu} \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\nu \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.22)$$

Per ottenere la matrice  $S(\Lambda)$  per una trasformazione finita basta applicare in successione tante trasformazioni infinitesime. Qui non faremo la dimostrazione ma daremo solo i risultati principali: riscrivo la matrice di trasformazione di Lorentz in questo modo:

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \quad \tanh \omega = \beta = \frac{v}{c} \Rightarrow \cosh \omega = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma$$

In questo modo si ottiene

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = e^{-\frac{i}{4}\omega\sigma_{\mu\nu}I_n^{\mu\nu}} \psi(x) \quad (1.23)$$

dove  $I_n$  indica la matrice di Lorentz infinitesima: le matrici  $I_n$  sono 6;  $I_1, I_2, I_3$  rappresentano i boost infinitesimi di Lorentz lungo l'asse x, l'asse y e l'asse z mentre  $I_4, I_5, I_6$  rappresentano le rotazioni spaziali. Con questo si vuole dire che, ad esempio,  $(\delta\omega)_\nu^\mu = \delta\omega(I_n)_\nu^\mu$  da cui si ha che, per un boost lungo l'asse x,  $I_1$  assume la forma

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Infatti, al primo ordine, per un boost lungo x, la matrice di trasformazione assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & -\omega & 0 & 0 \\ -\omega & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per cui, sottraendo la matrice unitá, per avere la differenza rispetto all'identitá e dividendo per il parametro della trasformazione  $\omega$  si ottiene la forma di  $I_1$  appena scritta. Specializzando (1.23) ad un boost lungo l'asse x si trova

$$\psi'(x') = e^{-\frac{i}{2}\omega\sigma_{01}}\psi(x)$$

dove  $\omega$  é tale che  $\tanh \omega = \beta = v/c$ . Nel caso di una rotazione spaziale di un angolo  $\varphi$  lungo l'asse z si ha:

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_{12}}\psi(x) \quad (1.24)$$

dove si dimostra con un calcolo diretto

$$\sigma_{12} = \frac{i}{2}[\gamma_1, \gamma_2] = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Il fattore 2 nella matrice  $(4 \times 4)$   $e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_{12}}$  é decisamente notevole: se  $\varphi = 2\pi$  cioè se giro di un angolo giro non ritrovo la stessa funzione d'onda ma la trovo invertita di segno: per ritrovare la stessa funzione d'onda dovrei girare di  $4\pi$ . Questo significa che  $\psi(x)$  non può essere un osservabile fisico, poiché un osservabile fisico deve rimanere invariato per un giro di  $2\pi$ , ma gli osservabili fisici saranno formati da coppie di spinori, in modo che i segni “-” si elidano.

### 1.5.1 Proprietá di trasformazione di $S(\Lambda)$

Nel caso delle rotazioni spaziali lo spinore  $\psi(x)$  trasforma come

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_{ij}}\psi(x) \quad \sigma_{ij} = [\gamma_i, \gamma_j]$$

dove  $i, j = 1, 2, 3$ . Ciò che si vuole fare é calcolare  $S^\dagger(\Lambda)$  (matrice aggiunta = trasposta e complessa coniugata). Per fare ciò calcoliamo  $\sigma_{ij}^\dagger$ :

$$\sigma_{ij}^\dagger = -\frac{i}{2} [\gamma_i, \gamma_j]^\dagger = -\frac{i}{2} [\gamma_j^\dagger \gamma_i^\dagger - \gamma_i^\dagger \gamma_j^\dagger]$$

Il calcolo é ricondotto alle proprietá di aggiunzione di delle matrici  $\gamma$ :

$$\gamma_i^\dagger = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta_i^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta\alpha_i \Rightarrow \gamma_i^\dagger = -\gamma_i$$

ricordando che le matrici  $\alpha, \beta$  sono autoaggiunte e antivommutano tra loro. Poiché  $\gamma_0 = \beta$  e  $\beta$  é autoaggiunta allora  $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ . Inserendo questi risultati nell'espressione per  $\sigma_{ij}^\dagger$  si trova:

$$\sigma_{ij}^\dagger = -\frac{i}{2} [(-\gamma_i)(-\gamma_j) - (-\gamma_j)(\gamma_i)] = \frac{i}{2} [\gamma_i, \gamma_j] \Rightarrow \sigma_{ij}^\dagger = \sigma_{ij}$$

Quindi  $S(\Lambda) = e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_{ij}}$  é l'esponenziale di un operatore hermitiano e per il teorema di Stone  $S(\Lambda)$  é un operatore unitario:  $S^\dagger = S^{-1}$ .

Vediamo piú brevemente il caso dei Lorentz boost: in questo caso le matrici coinvolte sono  $\sigma_{0i} = \frac{i}{2} [\gamma_0, \gamma_i]$ . Usando le proprietá di aggiunzione delle matrici  $\gamma$  appena viste si verifica agilmente che  $\sigma_{0i}^\dagger = -\sigma_{0i}$  ( $\gamma_0$  é hermitiana mentre le  $\gamma_i$  sono anti-hermitiane). Da qui si ricava che nel caso dei boost di Lorentz la matrice  $S(\Lambda)$  é hermitiana:  $S^\dagger = S$ .

## 1.6 I bilineari di Dirac

### 1.6.1 Lo spinore aggiunto

Si é visto che l'equazione di Dirac permette di definire una densitá di probabilitá  $j^0\rho = \psi^\dagger\psi$  conservata nell'evoluzione temporale. Si ha anche una corrispondente 3-corrente spaziale data da  $j^k = \psi^\dagger\alpha_k\psi$  dove la matrici  $\alpha_k$  sono le matrici di Dirac costruite con la metrici di Pauli. La legge di conservazione della 4-corrente assume la solita forma relativisticamente invariante  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Risulta comodo definire lo spinore aggiunto nel seguente modo  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ . In questo modo si ha una caratterizzazione piú compatta della 4-corrente: si vede immediatamente che  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ , infatti

$$j^0 = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \quad j^k = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^k\psi = \psi^\dagger\alpha^k\psi$$

ricordando che  $(\gamma^0)^2 = 1_4$  e  $\gamma^0\gamma^i = \gamma^0\gamma^0\alpha^i = \alpha^i$ . Affinché l'equazione  $\partial_\mu j^\mu$  sia covariante devo verificare che  $j^\mu$  appena definito trasformi come un vettore per trasformazioni di Lorentz ossia  $j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu$ . Verifichiamo quindi come trasforma  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  sotto trasformazioni di Lorentz, ricordando che  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$  e che nelle rotazioni spaziali  $S^\dagger = S^{-1}$  mentre nei Lorentz-boost  $S^\dagger = S$ . Quindi si trova:

$$\begin{aligned} j'^\mu &= (S(\Lambda)\psi(x))^\dagger\gamma^0\gamma^\mu(S(\Lambda)\psi(x)) \\ &= \psi^\dagger(x)S(\Lambda)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\ &= \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \\ &= \bar{\psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) \end{aligned}$$



dove nel penultimo passaggio si é inserito in opportuno  $(\gamma^0)^2 = 1_4$ . Ora mostriamo che, sia per rotazioni spaziali che per boost vale  $\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1}(\Lambda)$ . Nel caso delle rotazioni si trova subito

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}(\Lambda)\gamma^0 = S^{-1} \quad \text{perché} \quad \gamma^0 S = S\gamma^0 \quad (\gamma^0)^2 = 1_4$$

Nel caso dei boost si ha

$$\gamma^0 S^\dagger(\Lambda)\gamma^0 = \gamma^0 S\gamma^0$$

moltiplicando entrambi i membri per  $S^{-1}$  e ricordando  $\gamma^0 S = S\gamma^0$  si trova  $\gamma^0 S\gamma^0 = S^{-1}$ . Inserendo questo risultato nella derivazione precedente si trova:

$$\bar{\psi}\gamma^0 S(\Lambda)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x)$$

Quando si é imposta la covarianza dell'equazione di Dirac si é visto che questa era possibile solo se la matrice  $S(\Lambda)$  soddisfa alla condizione  $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda) = \Lambda^\mu_\nu j^\nu$  e sostituendo nell'equazione precedente si trova infine:

$$\bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)\psi(x) = \bar{\psi}(x)\Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu \psi(x) = \Lambda^\mu_\nu \bar{\psi}(x)\gamma^\nu \psi(x) = \Lambda^\mu_\nu j^\nu \Rightarrow j'^\mu = \Lambda^\mu_\nu j^\nu$$

Ricordiamo é lecito spostare  $\Lambda^\mu_\nu$  a sinistra di  $\bar{\psi}$  perché la matrice di Lorentz  $\Lambda$  non agisce sugli spinori  $\psi, \bar{\psi}$  in quanto portano indici spinoriali e non di Lorentz. Alla fine si é dimostrato che  $j^\mu$  trasforma come un vettore ossia con una matrice di Lorentz diretta; poiché  $\partial_\mu$  trasforma con una matrice di Lorentz inversa ( é un covettore o una 1-forma)  $\partial_\mu j^\mu$  é un invariante perché le trasformazioni di  $\partial_\mu$  e  $j^\mu$  si annullano a vicenda.

## 1.6.2 I bilineari di Dirac

La 4-corrente  $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  é un esempio di bilineare di Dirac: una quantità osservabile, perché formata da coppie di spinori, costruita fra ponendo una matrice  $\gamma$  fra gli spinori. In generale quindi un bilineare di Dirac ha la struttura  $\bar{\psi}_\alpha \Gamma_{\alpha\beta} \psi_\beta$  dove  $\Gamma_{\alpha\beta} \in M(4, \mathbb{C})$  che é il gruppo delle matrici  $4 \times 4$  a coefficienti complessi. Il gruppo  $M(4, \mathbb{C})$  ha dimensione 16, ossia una generica matrice di questo gruppo si può scrivere come combinazione lineare di 16 matrici di base. La scelta delle matrici di base é arbitraria, ma noi ne sceglieremo una particolare i cui elementi soddisfano precise proprietà tensoriali sotto trasformazioni di Lorentz. La base é la seguente:

$$\begin{aligned} \Gamma^S &\equiv 1_4 && 1 \text{ matrice} \\ \Gamma_V^\mu &\equiv \gamma^\mu && 4 \text{ matrici} \\ \Gamma_{\mu\nu}^T &\equiv \sigma_{\mu\nu} && 6 \text{ matrici} \\ \Gamma^P &\equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \equiv \gamma^5 && 1 \text{ matrice} \\ \Gamma_A^\mu &\equiv \gamma^5\gamma^\mu && 4 \text{ matrici} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Considero  $\Gamma^S$ :  $\bar{\psi}1_4\psi = \bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi$  e sotto boost si ha:

$$\bar{\psi}'\bar{\psi} = (S\psi)^\dagger \gamma^0 S\psi = \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 S^\dagger \gamma^0 S\psi = \bar{\psi}S^{-1}S\psi = \bar{\psi}\psi$$

ricordando che  $(\gamma^0)^2 = 1_4$ ,  $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0 = S^{-1}$  e  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . Quindi  $\bar{\psi}\psi$  trasforma come uno scalare. Analogamente si mostra che  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  trasforma come un vettore e  $\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi$  trasforma come un tensore di rango 2.

Passo ora a considerare la riflessione spaziale: la riflessione spaziale consiste nel cambiare di segno le coordinate spaziali di un punto o equivalentemente nell'invertire gli assi coordinati. Matematicamente la riflessione spaziale si esprime come

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x}' = -\vec{x} \quad t \rightarrow t'$$

e la matrice corrispondente é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta_{\nu}^{\mu}$$

La matrice di trasformazione corrisponde alla metrica piatta ed é una trasformazione di Lorentz impropria poiché  $\det \eta_{\nu}^{\mu} = -1$ . Si é visto che gli spinori trasformano con una matrice  $S(\Lambda)$  dipendente dalla matrice di Lorentz  $\Lambda$ . La condizione che deve soddisfare  $S(\Lambda)$  é  $S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}$  derivante dalla richiesta di covarianza dell'equazione di Dirac. Si verifica che una soluzione di  $S^{-1}(\Lambda)\gamma^{\mu}S(\Lambda) = \Lambda_{\nu}^{\mu}\gamma^{\nu}$  con  $\Lambda_{\nu}^{\mu} = \eta_{\nu}^{\mu}$  é  $S(\Lambda) = \gamma^0 e^{i\alpha}$  per cui nel caso della trasformazione di inversione spaziale o di paritá:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = e^{i\alpha}\gamma^0\psi(\vec{x}, t) \quad x \equiv (\vec{x}, t), \quad x' \equiv (-\vec{x}, t)$$

Riscrivo per comoditá la soluzioni dell'equazione di Dirac (1.8) nel sistema di riferimento dove la particella é ferma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_1 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_2 = e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \psi_3 = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \psi_4 = e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.26)$$

dove  $\psi_1, \psi_2$  corrispondono a soluzioni a energia positiva, mentre  $\psi_3, \psi_4$  corrispondono a soluzioni a energia negativa. Poiché  $\gamma^0$  ha la struttura

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

significa che, se inserisco gli spinori dell'equazione (1.26) nella trasformazione di paritá  $\psi_1$  e  $\psi_2$  pescano +1 dalla matrice  $\gamma^0$  mentre  $\psi_3$  e  $\psi_4$  pescano -1. Questa proprietá si esprime dicendo che  $\psi_1$  e  $\psi_2$  hanno paritá positiva mentre  $\psi_3$  e  $\psi_4$  hanno paritá negativa e  $\gamma^0$  é la matrice di trasformazione della paritá per gli spinori (da non confondere con  $\eta_{\nu}^{\mu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  che é la matrice di paritá per gli eventi nello spazio-tempo).

Passiamo ora a considerare la matrice  $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ : si verifica con un calcolo diretto che

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

Inoltre si verificano valere le seguenti proprietà

$$\begin{aligned}
\{\gamma^5, \gamma^0\} &= \{\gamma^5, P\} = 0 & \gamma^0 = P = \text{matrice della parit } \\
\{\gamma^5, \gamma^\mu\} &= 0 & (\gamma^5)^2 = 1_4 \\
[\gamma^2, \sigma_{\mu\nu}] &= 0 \\
[S, \gamma^5] &= 0 & S \equiv S(\Lambda) \text{ con } \Lambda \text{ trasformazione di Lorentz propria (determinante}=+1)
\end{aligned} \tag{1.28}$$

Ora che le propriet  di  $\gamma^5$  sono state indagate si possono ricavare le propriet  di trasformazione dei restanti bilineari di Dirac definiti in (1.25). Cominciamo con  $\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)$ :

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') &= \psi^\dagger(x)S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^5S(\Lambda)\psi(x) \\
&= \psi^\dagger(x)\gamma^0\gamma^0S^\dagger(\Lambda)\gamma^0\gamma^5S(\Lambda)\psi(x) \\
&= \bar{\psi}(x)S^{-1}(\Lambda)\gamma^5S(\Lambda)\psi(x) \quad (\gamma^0S^\dagger\gamma^0 = S^{-1})
\end{aligned}$$

Viste le propriet  di  $\gamma^5$  date in (1.28) devo distinguere fra matrici  $S$  derivanti da trasformazioni di Lorentz proprie e improprie: nel caso di trasformazioni proprie  $\gamma^5S = S\gamma^5 \Rightarrow S^{-1}\gamma^5S = \gamma^5 \Rightarrow \bar{\psi}'(x')\gamma^5\psi'(x') = \bar{\psi}\gamma^5\psi$ . Quindi il bilineare  $\bar{\psi}\gamma^5\psi$    uno scalare per trasformazioni proprie di Lorentz. Se considero trasformazioni improprie di Lorentz, che sono tutte riconducibili alla forma della metrica  $\eta_\nu^\mu$  allora si deve usare la propriet  di anticommutazione  $\gamma^5P = -P\gamma^5$  da cui si ricava che  $\psi\gamma^5\psi$  trasforma sotto parit  come uno pseudo-scalare:  $\psi'\gamma^5\psi' = -\psi\gamma^5\psi$ .

Analogamente si verifica che  $\bar{\psi}(x)\gamma^5\gamma^\mu\psi(x)$  trasforma come un vettore per trasformazioni proprie di Lorentz e come uno pseudo-vettore per trasformazioni improprie di Lorentz, in particolare per la trasformazione impropria di parit .

Detto questo si conclude questa sezione dedicata ai bilineari di Dirac e alle loro propriet  tensoriali. Nella prossima sezione ricaveremo la forma che assumono gli spinori in un sistema di riferimento in moto rispetto all'osservatore.

## 1.7 Forma generale degli spinori

Abbiamo definito gli spinori come soluzioni dell'equazione di Dirac (1.8) che per comodit  riscriviamo:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{1.29}$$

In un sistema in cui la particella   a riposo,  $x = (t, \vec{0})$ , vanno a zero tutte le derivate spaziali e l'equazione precedente si riduce a

$$(i\gamma^0\partial_t - m)\psi = 0 \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & -1_2 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

da cui si ottengo le quattro soluzioni a riposo

$$\begin{aligned}
e^{-imt}\omega^1(0) &\equiv e^{-imt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & e^{-imt}\omega^2(0) &\equiv e^{-imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
e^{imt}\omega^3(0) &\equiv e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & e^{imt}\omega^4(0) &\equiv e^{imt} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Posso scrivere in modo piú compatto i quattro spinori di (1.31) soluzioni dell'equazione di Dirac (1.30) nel modo seguente:

$$\psi^r(t, \vec{0}) = e^{-i\epsilon_r m t} \omega^r(0) \quad r = 1, 2, 3, 4 \quad \epsilon_r = 1 \leftrightarrow r = 1, 2 \quad \epsilon_r = -1 \leftrightarrow r = 3, 4 \quad (1.32)$$

Si é giá visto che la matrice di trasformazione di Lorentz per un boost con velocità  $v$  lungo l'asse  $x$  é

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \omega & -\sinh \omega & 0 & 0 \\ -\sinh \omega & \cosh \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \cosh \omega = \gamma \quad \sinh \omega = \beta\gamma \Rightarrow \tanh \omega = \beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.33)$$

La matrice  $S(\Lambda)$  che esprime la trasformazione degli spinori nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro,  $\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x)$ , legati dalla trasformazioni di Lorentz  $\Lambda$ , nel caso di un boost lungo  $x$  assume la forma

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{2}\sigma_{01}\omega} \quad \text{con} \quad \sigma_{01} = \frac{1}{2}[\gamma_0, \gamma_1] \quad (1.34)$$

Esprimendo le matrici  $\gamma$  in funzione delle matrici di Pauli si trova

$$\sigma_{01} = -i \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0_2 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi, inserendo questo risultato in (1.34) si trova

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp\left(-\frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \cosh \frac{\omega}{2} 1_4 - \begin{pmatrix} 0_2 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0_2 \end{pmatrix} \sinh \frac{\omega}{2} \\ &= \cosh \frac{\omega}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\tanh \frac{\omega}{2} \\ 0 & 1 & -\tanh \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\tanh \frac{\omega}{2} & 1 & 0 \\ -\tanh \frac{\omega}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ricordando che il seno iperbolico é la parte dispari dell'esponenziale e il coseno iperbolico é la parte pari e che quadrati (e tutte le potenze di ordine pari) delle matrici  $\gamma$  valgono  $1_4$  e di conseguenza tutte le potenze dispari di una matrice  $\gamma$  sono la matrice  $\gamma$  stessa. Utilizzando la notazione introdotta prima, indicando con  $\omega^r(\vec{p})$  gli spinori, soluzioni dell'equazione di Dirac nel sistema boostato, formalmente si scrive

$$\omega^r(\vec{p}) = S(\Lambda)\omega^r(0) = e^{-i\frac{\omega}{2}\sigma_{01}}\omega^r(0)$$

Utilizzando la formula trigonometrica

$$-\tanh \frac{\omega}{2} = -\frac{\tanh \omega}{1 + \sqrt{1 - \tanh^2 \omega}} = -\frac{\frac{v}{c}}{1 + \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ed esprimendo la velocità tramite il momento di una particella, da  $\vec{p} = \gamma m \vec{v} \rightarrow \vec{v} = \vec{p}/(\gamma m)$  si può esprimere  $\tanh(\omega/2)$  in funzione del momento della particella ed inserire questo risultato

nella matrice  $S(\Lambda)$  espressa attraverso  $\tanh(\omega/2)$ . Quindi ricordando gli spinori nel sistema di riferimento a riposo dati in (1.31), eseguendo i prodotti matriciali con la matrice  $S(\Lambda)$  si trovano le espressioni generali per uno spinore di momento  $\vec{p}$ , energia  $E$  e massa  $m$ :

$$\psi^r(x) = \omega^r(p) e^{-\epsilon_r m \frac{c^2}{\hbar} t} \quad (1.35)$$

(ho introdotto le costanti  $c$ ,  $\hbar$  che vengono di solito poste pari a 1). Come si vede l'espressione generale di un spinore contiene un esponenziale legato alla massa della particella che moltiplica il vero e proprio spinore a 4 componenti  $\omega^r(p)$  dipendente dal momento  $p$  della particella. Ora diamo la forma esplicita degli spinori  $\omega^r(p)$ :

$$\begin{aligned} \omega^1(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+mc^2} \\ \frac{p_+}{E+mc^2} \end{pmatrix} & \omega^2(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_-}{E+mc^2} \\ \frac{p_z}{E+mc^2} \end{pmatrix} \\ \omega^3(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+mc^2} \\ \frac{p_+}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \omega^4(\vec{p}) &= \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}} \begin{pmatrix} \frac{p_-}{E+mc^2} \\ \frac{p_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Qualche parola per definire le grandezze che compaiono in (1.35) e (1.36):  $\epsilon_r$  é lo stesso definito (1.32) per cui  $\omega^1, \omega^2$  sono gli spinori a energia positiva e  $\omega^3, \omega^4$  sono gli spinori a energia negativa. Per comodit  sono stati introdotti i momenti  $p_+ = p_x + ip_y$  e  $p_- = p_x - ip_y$ .

E' notevole notare questo fatto: se considero un elettrone a energie non-relativistiche, quali le energie di legame con un atomo ( queste energie sono  $\sim 10eV$  mentre la sua massa é  $\sim 0.5 Mev$ ) allora i termini contenenti i momenti sono trascurabili rispetto ai termini di massa. Questo significa che la terza e la quarta componente di  $\omega^1, \omega_2$  sono pressoch  nulle. Queste componenti vengono dette *piccole componenti* e sono trascurabili per elettroni di energia *positiva* in regime non relativistico. Ovviamente per gli spinori a energia negativa (che non sappiamo ancora interpretare) la situazione si ribalta e le componenti trascurabili sono le prime 2. Infine notiamo che il termine  $\frac{mc^2 t}{\hbar}$  che compare in (1.35) pu  essere scritto in forma relativisticamente invariante come  $p^\mu x_\mu$  poich  questa espressione é un invariante e posso calcolarla nel sistema di riferimento pi  comodo. Nel sistema di riferimento a riposo  $x^\mu = (t, \vec{0})$  e  $p^\mu = (mc^2, \vec{0})$  da cui  $p^\mu x_\mu = mc^2 t$  e  $\hbar$  é una costante. L'invarianza di  $mc^2 t$  nel passaggio da un sistema di riferimento ad un altro significa che il segno dell'esponenziale in (1.35) non pu  cambiare di segno, anzi l'esponenziale non cambia proprio, per cui non pu  esistere un osservatore che vede soluzioni a energia negativa e positiva mischiate fra loro.

## 1.8 Propriet  degli spinori

Considero l'equazione di Dirac (1.29) con lo spinore  $\psi$  dato da

$$\psi(x) = \omega^r(\vec{p}) e^{-ip^\mu x_\mu}$$

Inserendo lo spinore cos  sviluppato nell'equazione di Dirac ottengo l'equazione

$$(\gamma_\mu p^\mu - \epsilon_r mc) \omega^r(\vec{p}) = 0 \quad (1.37)$$

Separando le soluzioni a energia positiva,  $\epsilon_r = 1$  e  $r = 1, 2$ , da quelle a energia negativa,  $\epsilon_r = -1$  e  $r = 3, 4$  si ottiene la coppia di equazioni

$$\begin{aligned}(\gamma_\mu p^\mu - mc)\omega^{1,2}(\vec{p}) &= 0 \\ (\gamma_\mu p^\mu + mc)\omega^{3,4}(\vec{p}) &= 0\end{aligned}$$

Considero l'equazione coniugata:

$$\omega^r(p)^\dagger(\gamma_\mu p^\mu - \epsilon^r mc)^\dagger = \omega^r(p)^\dagger(p^0\gamma_0 + p^i\gamma_i - \epsilon_r mc) = 0$$

poiché  $(p^\mu\gamma_\mu)^\dagger = p^0\gamma_0 + p^i\gamma_i$  considerando che la metrica é  $diag(1, -1, -1, -1)$  e  $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$  mentre  $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ . Coerentemente con quanto fatto nella trattazione dei bilineari di Dirac definisco  $\bar{\omega}^r = \omega^{r\dagger}\gamma^0$ . Allora vale la seguente equazione

$$\bar{\omega}^r(\vec{p}) \cdot \omega^r(\vec{p}) = \epsilon_r \quad (1.38)$$

Quest' equazione può essere dimostrata con un calcolo esplicito a partire dalle espressioni generali degli spinori di Dirac dati in (1.36) oppure, in modo piú intelligente, si può notare che  $\bar{\omega}^r(\vec{p}) \cdot \omega^r(\vec{p})$  é uno scalare per trasformazioni di Lorentz (vedi i bilineari di Dirac) e quindi può essere calcolato in un sistema di riferimento comodo, quale quello a riposo dove gli spinori assumono la forma semplice (1.31). Ricordando la forma della matrice  $\gamma^0 = diag(1, 1, -1, -1)$  la dimostrazione é immediata. Un'altra identitá molto utile é la seguente

$$\sum_{r=1}^4 \epsilon_r \omega_\alpha^r(\vec{p}) \omega_\beta^r(\vec{p}) = \delta_{\alpha\beta} \quad (1.39)$$

dove  $\alpha, \beta$  sono gli indici spinoriali che individuano le componenti degli spinori  $\omega^r$ . Posso dimostrare questa identitá nel sistema a riposo, nel quale gli spinori hanno la forma semplice data in (1.31) poiché la delta di Kroneker  $\delta_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\beta = \delta^{\alpha\beta}$  é invariante per trasformazioni di Lorentz, di conseguenza lo sará anche il primo membro di (1.39). Ricordando (1.38) e l'ortogonalitá degli spinori a riposo la dimostrazione é immediata. Volendo si potrebbe anche direttamente usare la forma generale degli spinori data in (1.36) e verificare qualche componente.

### 1.8.1 Polarizzazione dell'equazione di Dirac

In generale la polarizzazione indica la direzione dello spin di una particella. Cominciamo ricordando alcune proprietá degli spinori di Pauli a due dimensioni. Sotto una rotazione di un angolo  $\omega$  attorno all'asse  $z$

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{\sigma}}\psi(x)$$

dove  $\vec{\sigma}$  é un vettore con componenti le matrici di Pauli:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nel caso dello spinore di Dirac a 4 componenti si é giá ricavata la legge di trasformazione in termini delle matrici di Dirac, formate a partire dalle matrici di Pauli:

$$\psi'(x') = e^{\frac{i}{2}\varphi\sigma_{\alpha\beta}}\psi(x)$$

dove  $\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\gamma_\alpha\gamma_\beta]$ . Si vede con un calcolo diretto che

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \sigma_\gamma & 0 \\ 0 & \sigma_\gamma \end{pmatrix}$$

dove  $\alpha, \beta, \gamma$  sono ciclici. A tal proposito definisco in un modo piú utile in seguito le matrici ( $1 \equiv x, 2 \equiv y, 3 \equiv z$ )  $\sigma_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} \Sigma_3 = \sigma_{12} &= \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \Sigma_2 = \sigma_{31} &= \begin{pmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \\ \Sigma_1 = \sigma_{23} &= \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Considero ora uno spinore a 4 componenti  $u(p, s)$  di momento  $p$  e spin  $s$  (tre componenti vengono dal momento e la restante dallo spin) soluzione dell'equazione di Dirac con energia positiva. Da (1.38) si ha

$$(\gamma_\mu p^\mu - 1_4 mc)_{\alpha\beta} u_\beta(p, s) = 0$$

Definisco inoltre il vettore di spin nel sistema a riposo  $\tilde{s}^\nu = (\vec{0}, s)$  e il 4-momento a riposo  $\tilde{p}^\nu = (m, \vec{0})$ . In un sistema di riferimento legato al sistema a riposo da una trasformazione di Lorentz  $\Lambda_\nu^\mu$  i vettori di spin e momento trasformano come  $s^\mu = \Lambda_\nu^\mu \tilde{s}^\nu$  e  $p^\mu = \Lambda_\nu^\mu \tilde{p}^\nu$ . Nel sistema a riposo vale  $\tilde{p}^\nu \tilde{p}_\nu = m^2$  e  $\tilde{p}^\nu \tilde{s}_\nu = 0$  Essendo tale espressione un invariante vale  $p^\mu s_\mu = 0$  ossia i vettori momento e spin sono ortogonali. Definito il vettore matriciale  $\vec{\Sigma} = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$  si verifica la seguente equazione

$$\vec{\Sigma} \cdot \tilde{s} u(\tilde{p}, \tilde{s}) = u(\tilde{p}, \tilde{s})$$

la quale significa che  $u(\tilde{p}, \tilde{s})$  é autostato dell'operatore  $\vec{\Sigma} \cdot \tilde{s}$  quindi  $u(\tilde{p}, \tilde{s})$  corrisponde ad una particella polarizzata lungo la direzione del vettore unitá  $\tilde{s}$ . Infine ricordo che nel sistema a riposo gli spinori a energia positiva assumono la semplice forma  $\omega^1(p) = (1, 0, 0, 0)$  e  $\omega^2(p) = (0, 1, 0, 0)$  mentre in un sistema arbitrario gli spinori assumono la forma generale data in (1.36) che posso scrivere formalmente come  $\omega^1(p) = u(p, u_\alpha)$  e  $\omega^2(p) = (p, -u_\alpha)$ . Passo ora a considerare le soluzioni a energia negativa: definisco lo spinore  $v(p, s)$  soluzione dell'equazione di Dirac a energia negativa; da (1.37) si ha quindi

$$(\gamma_\mu p^\mu + 1_4 mc)_{\alpha\beta} v_\beta(p, s) = 0$$

Scelgo la polarizzazione  $-s$  nel sistema a riposo: in questo modo  $\omega^3 = v(p, -u_\alpha)$  e  $\omega^4 = (p, u_\alpha)$ . Quindi per specificare un arbitrario spinore soluzione dell'equazione di Dirac si devono specificare il 4-momento  $p^\mu$ , il segno dell'energia e la direzione dello spin nel sistema a riposo. Ora, fissato il modulo dell'energia e la massa della particella il 3-momento é determinato per cui alla fine si hanno 4 possibilitá possibili corrispondenti ai quattro spinori (indipendenti) soluzione dell'equazione di Dirac. Posso esprimere una generica soluzione dell'equazione di Dirac (che é lineare) come combinazione di 4 spinori di base che si ottengono proiettando sui 4 stati di base con opportuni proiettori. Questi 4 proiettori, corrispondenti ai 4 casi possibili, che sono energia positiva e spin in sú (rispetto ad esempio all'asse  $z$ ), energia positiva e spin in giú, energia negativa e spin in sú e energia negativa e spin in giú saranno ricavati nella prossima sezione.

## 1.9 I proiettori di energia e spin

Come nella sezione precedente consideriamo prima il caso di Pauli a due dimensioni (nel senso che gli spinori hanno due componenti, una per ogni valore che lo spin di un fermione di spin  $1/2$  può assumere proiettato lungo un qualche asse). Se si considera l'asse  $z$  come asse di quantizzazione allora l'operatore

$$\frac{\sigma_3 + 1_2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

proietta sullo stato con spin positivo, rappresentato con lo spinore  $(1, 0)$  mentre l'operatore

$$\frac{-\sigma_3 + 1_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

proietta sullo stato con spin negativo.

### 1.9.1 Proiettori di energia

Considero gli spinori  $\omega^{1,2}$  soluzioni dell'equazione di Dirac con energia positiva:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) \omega^r = 0$$

Cerco un proiettore che chiamo  $X$  che, applicato agli spinori  $\omega^r$  verifichi l'equazione precedente:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) (X) \omega^r(p) = 0$$

Per trovare il proiettore  $X$  considero l'azione dell'operatore  $(\gamma_\mu p^\mu + m)$ :

$$\begin{aligned} (p^\mu \gamma_\mu - m)(p^\nu \gamma_\nu + m) &= p^\mu \gamma_\mu p^\nu \gamma_\nu + m p^\mu \gamma_\mu - m p^\nu \gamma_\nu - m^2 \\ &= p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m^2 \end{aligned}$$

Dalla proprietà di anticommutazione delle matrici  $\gamma$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \Rightarrow \gamma^\mu \gamma^\nu = -\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}$$

si può esprimere  $\gamma^{\mu\nu}$  come  $-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}$  e sostituendo nell'equazione precedente si trova

$$\begin{aligned} (p^\mu \gamma_\mu - m)(p^\nu \gamma_\nu + m) &= p_\mu p_\nu (-\gamma^\nu \gamma^\mu + 2g^{\mu\nu}) - m^2 \\ &= -p_\mu p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu + p_\mu p^\mu - m^2 \\ &= -p_\mu p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu + 2m^2 - m^2 \\ &= -p_\mu p_\nu \gamma^\nu \gamma^\mu + m^2 \end{aligned}$$

Si vede che l'ultimo passaggio scritto e l'ultimo passaggio delle derivazione precedente sono opposti e devono essere uguali e pari a  $(p^\mu \gamma_\mu - m)(p^\nu \gamma_\nu + m)$ . L'unico modo in cui questo é possibile é che

$$p_\mu p_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu = m^2 \Rightarrow (p^\mu \gamma_\mu - m)(p^\nu \gamma_\nu + m) = 0$$

Quindi si é trovato che

$$(p_\mu \gamma^\mu - m)(p_\mu \gamma^\mu + m) \omega^r(p) = 0$$

Quindi  $(p_\mu \gamma^\mu + m)$  é legato al proiettore sulle energie positive. Il proiettore sulle energia negative é legato a  $(-p_\mu \gamma^\mu + m)$  come si verifica controllando che

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)(-p_\mu \gamma^\mu + m) \omega^r(p)$$



ossia lo spinore  $\omega^r(p)$  proiettato con  $(-p_\mu \gamma^\mu + m)$  soddisfi l'equazione di Dirac con energia negativa (vedi (1.37) con  $\epsilon_r = -1$ ). Quelli appena definiti non sono proprio i proiettori sulle energie positive e negative in quanto non sono idempotenti: il quadrato di un proiettore deve essere il proiettore stesso. Si verifica che

$$\Lambda_+ = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \quad \Lambda_- = \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \quad (1.41)$$

sono i corretti proiettori, rispettivamente sulle soluzioni a energia positiva e su quelle a energia negativa. A titolo di esempio verifichiamo l'idempotenza di  $\Lambda_+$  calcolando  $\Lambda_+^2$ :

$$\Lambda_+^2 = \left( \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \right)^2 = \frac{\gamma^\mu \gamma^\nu p_\mu p_\nu + m^2 + 2m \gamma^\mu p_\mu}{2m \cdot 2m} = \frac{m^2 + m^2 + 2m \gamma^\mu p_\mu}{2m \cdot 2m} = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} = \Lambda_+$$

Naturalmente si intende che ogni fattore costante come  $m$  é moltiplicato per la matrice  $1_4$  poiché tutti questi operatori sono matrici  $4 \times 4$ . Ormai si é ragionevolmente convinti che  $\Lambda_+$  e  $\Lambda_-$  sono i corretti proiettori di energia ma, visto che ci siamo, controlliamo anche che siano ortogonali,  $\Lambda_+ \cdot \Lambda_- = 0$  e che sia soddisfatta la relazione di completezza  $\Lambda_+ + \Lambda_- = 1_4$ . Infatti, per quanto riguarda l'ortogonalitá, si ha

$$\Lambda_+ \cdot \Lambda_- = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} \cdot \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} = \frac{-\gamma^\mu p_\mu \gamma^\nu p_\nu + m \gamma^\mu p_\mu - m \gamma^\mu p_\mu + m^2}{4m^2} = \frac{-m^2 + m^2}{4m^2} = 0$$

mentre, per quanto riguarda la completezza si trova

$$\Lambda_+ + \Lambda_- = \frac{\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} + \frac{-\gamma^\mu p_\mu + m}{2m} = \frac{2m}{2m} = 1_4$$

Quindi, per quanto riguarda i proiettori di energia é tutto: i proiettori sono  $\Lambda_+$  e  $\Lambda_-$  definiti in (1.41) e soddisfano a tutte le proprietá necessarie per essere dei buoni proiettori. Passiamo quindi ai proiettori di spin.

### 1.9.2 Proiettori di spin

Si sono visti, all'inizio di questa sezione, i proiettori di spin in meccanica quantistica non relativistica, facendo uso delle matrici di Pauli. Ora vedremo i corrispondenti proiettori in meccanica quantistica relativistica. A tal proposito introduco la matrice  $\Sigma$  che agisce sull'4-vettore di polarizzazione  $u_z^\mu$  nel seguente modo:

$$\Sigma(u_z) = \frac{1_4 + \gamma_5 \gamma^\mu u_{z\mu}}{2} \quad \text{con} \quad \gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \quad (1.42)$$

Definendo la direzione di polarizzazione lungo l'asse  $z$ , ossia  $u_z^\mu = (1, 0, 0, 0)$ , utilizzando la metrica  $(1, -1, -1, -1)$ , si trova subito  $\gamma^\nu u_{z\nu} = -\gamma^3 u_{z3} = -\gamma^3$ . Dopo queste puntualizzazioni vediamo come agisce l'operatore definito in (1.42) sugli spinori nel sistema di riferimento a

riposo dati in (1.31); vediamo ad esempio come agisce  $\Sigma(u_z)$  sullo spinore  $\omega^1(0) = (1, 0, 0, 0)$ :

$$\begin{aligned}
\Sigma(u^z)\omega^1(0) &= \frac{1_4 + \gamma_5 \gamma^\mu u_{z\mu}}{2} \omega^1(0) \\
&= \frac{1_4 + \gamma^5 (-\gamma^3 u_{z3})}{2} \omega^1(0) \\
&= \frac{1_4 - \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ 1_2 & 0_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}}{2} \omega^1(0) \\
&= \frac{1_4 - \begin{pmatrix} -\sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}}{2} \omega^1(0) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega^1(0)
\end{aligned}$$

ricordando che  $u_{z3} = 1$  Operando nello stesso modo si trovano i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
\Sigma(-u_z)\omega^2(0) &= \omega^2(0) \\
\Sigma(-u_z)\omega^3(0) &= \omega^3(0) \\
\Sigma(u_z)\omega^4(0) &= \omega^4(0)
\end{aligned}$$

dove  $-u_z = (0, 0, 0, -1) \Rightarrow -u_{z3} = -1$  e gli spinori  $\omega^r$  sono i soliti dati in (1.31). Riassumendo le equazioni precedenti si possono esprimere a parole in questo modo:  $\omega^1(0)$  é autovettore di  $\Sigma(u_z)$  con autovalore +1,  $\omega^2(0)$  é autovettore di  $\Sigma(u_z)$  con autovalore -1,  $\omega^3(0)$  é autovettore di  $\Sigma(u_z)$  con autovalore -1,  $\omega^4(0)$  é autovettore di  $\Sigma(u_z)$  con autovalore +1. Infine ricordo che  $\omega^1, \omega^2$  sono gli spinori a energia positiva mentre  $\omega^3, \omega^4$  sono gli spinori a energia negativa. Una cosa importante da sottolineare é che i proiettori di energia  $\Lambda_\pm$  definiti prima e i proiettori di spin  $\Sigma(\pm u_z)$  appena definiti commutano tra loro. Applicandoli entrambi ad un generico spinore lo si proietta su uno stato con energia e spin definiti:

$\Lambda_+(p)\Sigma(u_\alpha)$	proietta su stati con $E > 0$ e spin $\uparrow$
$\Lambda_+(p)\Sigma(-u_\alpha)$	proietta su stati con $E > 0$ e spin $\downarrow$
$\Lambda_-(p)\Sigma(-u_\alpha)$	proietta su stati con $E < 0$ e spin $\uparrow$
$\Lambda_-(p)\Sigma(u_\alpha)$	proietta su stati con $E < 0$ e spin $\downarrow$

ricordando che, per le soluzioni a energia negativa, la direzione di polarizzazione (per convenzione) é invertita. E' bene sottolineare questa convenzione sulle direzioni di polarizzazione: se il proiettore di spin  $\Sigma(u_\alpha)$  agisce sullo spinore a energia positiva  $u(p, u_\alpha)$  si ottiene lo stesso spinore, mentre  $\Sigma(-u_\alpha)u(p, u_\alpha) = 0$ . Se invece considero l'azione del proiettore di spin  $\Sigma(-u_\alpha)$  su uno spinore a energia negativa  $v(p, -u_\alpha)$  ottengo zero perché  $\Sigma(u_\alpha)$ , agendo su uno spinore a energia negativa, proietta su stati di spin "su" e, concludendo con l'ultimo caso rimasto,  $\Sigma(u_\alpha)v(p, -u_\alpha) = v(p, -u_\alpha)$

## 1.10 Pacchetti a energia positiva

Fin' ora si sono analizzate in dettaglio le proprietà degli spinori, che sono le soluzioni dell'equazione di Dirac (1.8). Sfruttando il fatto che l'equazione di Dirac é lineare, possiamo concludere che una combinazione lineare di soluzioni dell'equazione di Dirac é anch' essa soluzione della stessa equazione. Si é anche visto che la soluzione dell'equazione di Dirac per una particella libera nel sistema di riferimento a riposo rispetto alla particella corrisponde a delle onde piane. Quindi, dopo aver analizzato le proprietà degli spinori soluzione dell'equazione di Dirac proviamo a costruire un pacchetto d'onde sovrapponendo tante soluzioni a vari tempi. Questo pacchetto d'onda é localizzato in una certa regione di spazio (una singola onda monocromatica, quindi di energia definita, ha la stessa probabilità di essere dappertutto a causa del principio di indeterminazione). Poiché non siamo ancora riusciti a trovare un'interpretazione fisica delle soluzioni dell' equazione di Dirac a energia negativa, per ora ci limiteremo a costruire un pacchetto d'onda utilizzando solo gli spinori a energia positiva. Come vedremo, trascurare le soluzioni a energia negativa, che non sappiamo interpretare, porterá a delle inconsistenze interne.

### 1.10.1 Costruzione del pacchetto

Comunque, cominciamo definendo il pacchetto di soluzioni a energia positiva  $\Psi^{(+)}(\vec{x}, t)$ :

$$\Psi^{(+)}(\vec{x}, t) = \int d^3p \sqrt{\frac{m}{E}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sum_s b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} \quad (1.43)$$

Prima di proseguire esplicitiamo in dettaglio il significato dei vari componenti di (1.43): il fattore  $\sqrt{m/E}(2\pi)^{-3/2}$  é un fattore di normalizzazione, che vedremo meglio fra poco; la sommatoria é estesa ai due valori possibili della proiezione dello spin  $s$  rispetto a qualche asse;  $u(p, s)$  indica lo spinore a energia positiva dell'equazione di Dirac e l'esponenziale indica proprio la caratteristica di onda piana a energia positiva dello spinore  $u(p, s)$  e naturalmente  $px = p_0x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$ . La normalizzazione é scelta in modo che

$$\int d^3x \Psi^{(+)\dagger}(\vec{x}, t) \Psi^{(+)}(\vec{x}, t) = 1 \quad (1.44)$$

dove  $\Psi^{(+)\dagger}(\vec{x}, t)$  é lo spinore aggiunto di  $\Psi^{(+)}(\vec{x}, t)$ . L'equazione (1.44) sta a significare che la probabilità di rivelare il pacchetto d'onde in qualche posizione dello spazio é l'unitá, ricordando che la densitá di probabilità associata all'equazione di Dirac é  $\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$  dove  $\psi$  é un generico spinore soluzione dell'equazione di Dirac. Puó essere un esercizio utile verificare che la normalizzazione scelta in (1.43) porta all'equazione (1.44) poiché per fare questo calcolo si dovranno utilizzare sia proprietà degli spinori sia proprietà della delta di Dirac; cominciamo ricordando due proprietà della delta di Dirac:

$$\begin{aligned} \int d^3x e^{i(\vec{p}-\vec{p}')x} &= (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}') \\ \int d^3p' \delta(p-p') f(p') &= f(p) \end{aligned} \quad (1.45)$$

Ora esplicito l'equazione (1.44) sviluppando i pacchetti contenuti con l'equazione (1.43); nel fare l'aggiunto del pacchetto d'onde devo prendere il complesso coniugato di ogni quantitá

scalare che compare e l'aggiunto degli operatori, in questo caso degli spinori  $u(p, s)$ :

$$\int d^3x \left( \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E'}} \sum_{s'} b^*(p', s') u^\dagger(p', s') e^{ip'x} \cdot \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_s b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} \right)$$

Usando la prima proprietà di (1.45) elimino l'integrazione in  $d^3x$ , compare  $(2\pi)^3 \delta(p - p')$  che semplifica i due  $(2\pi)^{3/2}$ . Usando la  $\delta(p - p')$  sparisce l'integrazione in  $p'$  (o in  $p$ , è lo stesso) e tutte le quantità rimaste devono essere valutate in  $p$ . Quindi si ottiene

$$\int d^3p \frac{m}{E} \sum_{s, s'} b^*(p, s') b(p, s) u^\dagger(p, s') u(p, s)$$

Per semplificare l'equazione trovata considero questa proprietà degli spinori che si può verificare a partire da (1.36): se  $\omega^r$  e  $\omega^{r'}$  con  $r, r' = 1, 2, 3, 4$  sono spinori, soluzioni dell'equazione di Dirac allora vale la seguente equazione:

$$\omega^{r\dagger}(p) \omega^{r'}(p) = \delta^{rr'} \frac{E}{m} \quad (1.46)$$

ossia si ha un prodotto nullo solo se gli spinori hanno lo stesso segno dell'energia e la stessa polarizzazione. Precedentemente si era trovata un'equazione simile che diceva:

$$\bar{\omega}^r \cdot \omega^r = \epsilon_r \quad \bar{\omega} = \omega^\dagger \gamma^0 \quad \epsilon_r = 1 \leftrightarrow r = 1, 2 \quad \epsilon_r = -1 \leftrightarrow r = 3, 4$$

Questa equazione vale nel sistema a riposo, cioè dove  $E = m$ . Tenendo conto della struttura di  $\gamma^0 = \text{diag}(1, 1, -1, -1)$ , si vede che l'equazione appena scritta è equivalente a (1.46). Utilizzando (1.46) nell'ultimo sviluppo trovato elimino la sommatoria in  $s'$  in quanto contribuiscono solo i prodotti di spinori con lo stesso spin e gli spinori  $u, u^\dagger$  spariscono dando solo il prodotto  $E/m$  per cui si ottiene

$$\int d^3p \sum_s b^*(p, s) b(p, s) = \int d^3p \sum_s |b(p, s)|^2 = 1$$

come deve essere per definizione poiché  $b(p, s)$  sono i pesi che corrispondono agli spinori di momento  $p$  e spin  $s$ . Alla fine l'equazione (1.44) è verificata. Fino a qui non sembrano essere sorti particolari problemi nella definizione del pacchetto d'onde (1.43) con solo spinori a energia positiva, ma vedremo presto che non è così.

### 1.10.2 Problemi del pacchetto

Ricordo la 4-corrente conservata nel caso di Dirac

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$$

Nel caso della 3-corrente spaziale si ha

$$j^i = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \psi = \gamma^0 \alpha^i \psi \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

con  $\sigma_i$  le solite matrici di Pauli. Come prima ho costruito un pacchetto di soluzioni dell'equazione di Dirac ora posso fare altrettanto per calcolare la velocità del pacchetto (velocità di

gruppo =velocitá di propagazione dell'energia del pacchetto) data dal valore di aspettazione si  $c\vec{\alpha}$  dove  $\vec{\alpha}$  é un vettore formato dalle matrici di Dirac  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Quindi posso costruire il seguente pacchetto:

$$\vec{J}^{(+)} = d^3x \Psi^{(+)\dagger}(\vec{x}, t) c\vec{\alpha} \Psi^{(+)}(\vec{x}, t) \quad (1.47)$$

dove ho posto  $c = 1$ . Usando l'equazione (1.43) per esprimere i pacchetti  $\Psi^\dagger, \Psi$  l'equazione precedente diventa:

$$\int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{EE'} \sum_{s,s'} b^*(p', s') b(p, s) u^\dagger(p', s') \vec{\alpha} u(p, s) e^{-i(px-p'x)} \quad (1.48)$$

Prima di calcolare il valore di aspettazione di  $c\vec{\alpha}$  vediamo in un altro modo perché proprio  $c\vec{\alpha}$  é la velocitá di gruppo. Consideriamo l'equazione di Dirac (1.8) scritta utilizzando le matrici di Dirac  $\beta, \alpha_i$ : ricordiamo che  $\alpha_i = \gamma^0 \gamma^i$  e  $\beta = \gamma^0$  e inseriamo anche la costante  $c$ . Tenendo d'occhio anche l'equazione (1.5) scrivo

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( c\vec{\alpha}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}) + \beta mc^2 + e\phi \right) \psi$$

Il secondo membro dell'equazione precedente corrisponde all'hamiltoniana della particella immersa in un campo elettromagnetico e puó essere scomposta in una parte  $H_0$  corrispondente al caso non perturbato (senza potenziale scalare e vettore) e in una parte perturbata  $H_1 = -e\vec{\alpha} \cdot \vec{A} + e\phi$ . Confrontando con  $H_1$  classico che é  $H_1 = -(e/c)\vec{v} \cdot \vec{A} + e\phi$  dal principio di corrispondenza si ha  $c\vec{\alpha} \leftrightarrow \vec{v}$ . Quindi, riassumendo, valgono le seguenti identificazioni

$$\langle c\vec{\alpha} \rangle_+ = \langle c^2 \frac{\vec{p}}{E} \rangle_+ = \langle \vec{v}_{grupp} \rangle_+ \quad (1.49)$$

(il “+” si riferisce al considerare solo soluzioni a energia positiva). Detto questo torniamo all'equazione (1.48) e continuiamone l'analisi. A tal proposito utilizziamo la decomposizione di Gordon: se  $u(p, s)$  e  $u(q, s')$  sono spinori soluzione dell'equazione di Dirac con momenti e spin rispettivamente  $p, s$  e  $q, s'$  allora vale la seguente decomposizione

$$\bar{u}(p, s) \gamma^\mu u(q, s') = \frac{1}{2m} \bar{u}(p, s) [(p+q)^\mu + i\sigma^{\mu\nu}(p-q)_\nu] u(q, s) \quad (1.50)$$

dove  $\sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ . Specializzando (1.50) all'indice  $i$  spaziale e a due spinori con momenti  $p, p'$  e spin  $s, s'$  si ha

$$u^\dagger(p', s') \alpha^i u(p, s) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s') [(p+p')^i + i\sigma^{i\nu}(p'-p)_\nu] u(p, s)$$

( $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$  e  $\gamma^0 \gamma^i = \alpha^i$ ). Se inserisco questa equazione in (1.48) dove l'esponenziale integrato in  $d^3x$  impone una  $\delta(p'-p)$  quindi nell'ultima equazione la parte in  $(p-p')$  si elimina per cui si ottiene

$$u^\dagger(p', s') \alpha^i u(p, s) = \frac{1}{2m} \bar{u}(p', s') 2p^i u(p, s)$$

Inserendo questo risultato in (1.48) si trova il semplice risultato (i passaggi sono analoghi a prima, naturalmente  $E = E'$  e vari fattori tipo 2,  $m, 2\pi$  si semplificano)

$$\vec{J} = \int d^3p \frac{\vec{p}}{E} \sum_s |b(p, s)|^2 \quad (1.51)$$

Secondo l'equazione (1.47)  $\vec{J}$  é per definizione il valore di aspettazione di  $c\vec{\alpha}$  e secondo l'ultima equazione  $\vec{J}$  é il valore di aspettazione di  $c^2 \frac{\vec{p}}{E}$  (inserendo le costanti per avere una velocità). Va ricordato che i pacchetti costruiti fin' ora si riferiscono a particelle libere per cui la velocità di gruppo é una costante. Poiché gli autovalori di aspettazione delle matrici  $\alpha$  sono  $\pm 1$  significa che i valori di aspettazione di  $c\alpha$  sono  $\pm c$  ma le particelle con massa non possono muoversi con velocità  $c$  e infatti il valore di aspettazione di  $c^2 \frac{\vec{p}}{E}$  é minore di  $c$  poiché  $\vec{p} < E$ . Si é trovata una palese inconsistenza nel procedimento seguito e l'unico passaggio non lecito é stato quello di limitarsi a costruire un pacchetto sovrapponendo solo soluzioni a energia positiva. Quindi, nella prossima sezione, estenderemo il pacchetto ad includere soluzioni ad energia negativa rappresentate dagli spinori  $v(p, s)$ .

## 1.11 Pacchetti a energia positiva e negativa

Nella sezione precedente il punto di partenza era il pacchetto  $\Psi^{(+)}(\vec{x}, t)$  costruito in (1.43); ora estenderemo il pacchetto a considerare anche le soluzioni a energia negativa per le quali non abbiamo ancora un' interpretazione fisica.

### 1.11.1 Costruzione del pacchetto

Il punto di partenza é la costruzione del pacchetto  $\Psi(\vec{x}, t)$ :

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{p}{E}} \sum_s (b(p, s)u(p, s)e^{-ipx} + d^*(p, s)v(p, s)e^{ipx}) \quad (1.52)$$

dove  $b(p, s)$  sono i pesi associati agli spinori a energia positiva  $u(p, s)$  mentre  $d^*(p, s)$  sono i pesi associati agli spinori a energia negativa  $v(p, s)$  come si vede dall'esponentiale  $e^{ipx}$ . La condizione di normalizzazione é analoga alla (1.44):

$$\int d^3x \Psi^\dagger(\vec{x}, t) \Psi(\vec{x}, t) = 1 \quad (1.53)$$

Se inserisco (1.52) in (1.53) ottengo, simbolicamente, termini del tipo

$$\left( b^* u^\dagger e^{ipx} + d v^\dagger e^{-ipx} \right) \left( b u e^{-ip'x} + d^* v e^{ip'x} \right)$$

Non rifacciamo in dettaglio i calcoli fatti nella sezione precedente, ricordiamo solo che l'integrazione in  $d^3x$  (quando considero i prodotti del primo e del terzo termine o del secondo e del quarto) porta una  $\delta(p - p')$  e valgo le regole di ortonormalizzazione degli spinori date in (1.46) per cui il prodotto dei termini misti, nel senso che accoppia spinori  $u$  con spinori  $v$  da zero. Alla fine il prodotto del primo e del terzo termine dá  $|b^2|$  e il prodotto del secondo e del quarto dá  $|d^2|$ . Quindi la normalizzazione (1.53) diventa, in termini dei pesi  $b(p, s)$  e  $d^*(p, s)$

$$\int d^3p \sum_s [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] = 1 \quad (1.54)$$

Seguendo quanto fatto nella sezione precedente la 3-corrente  $\vec{J}$  diventa

$$\vec{J} = \int d^3x \int \frac{d^3p d^3p'}{(2\pi)^3} \frac{m}{\sqrt{EE'}} \sum_{s, s'} \left( b^* u^\dagger e^{ipx} + d v^\dagger e^{-ipx} \right) \vec{\alpha} \left( b u e^{-ip'x} + d^* v e^{ip'x} \right) \quad (1.55)$$

Quella appena scritta é la solita  $\vec{J} = \Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi$  con  $\Psi$  dato da (1.52). In (1.55) compaiono 4 prodotti: il prodotto del primo per il terzo e del secondo per il quarto sono analoghi al caso precedente e danno

$$\int d^3p \sum_s [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] \frac{\vec{p}}{E}$$

Rimangono da vedere i prodotti misti che accoppiano spinori  $u$  con spinori  $v$ : ora non posso utilizzare le proprietá di ortonormalizzazione (1.46) per concludere che questi prodotti sono nulli poiché fra i prodotti di spinori compaiono le matrici  $\alpha$  che non assicurano che sia preservata l'ortogonalitá degli spinori. Utilizzo la decomposizione di Gordon (1.50) nel caso particolare  $p = -p'$  derivante dalla  $\delta(p + p')$  che compare nei prodotti misti di (1.55): ora in (1.50) sparisce il termine in  $(p + q) = (p - p)$  mentre il termine che moltiplica  $\sigma^{\mu\nu}$  diventa  $(p - q) = (p + p) = 2p$ . Ricordando che integrando  $\delta^3$  in  $d^3x$  resta la parte temporale dell'esponenziale poiché  $e^{ipx} = e^{iEt - \vec{p}\cdot\vec{x}}$  si ottiene

$$\vec{J} = \int d^3p \left( \sum_s [|b(p, s)|^2 + |d(p, s)|^2] \frac{\vec{p}}{E} + \sum_{s, s'} b^*(-p, s) d^*(p, s) e^{2iEt} \bar{u}(-p, s') i\sigma^{\mu\nu} v(p, s) + (T.A.) \right) \quad (1.56)$$

dove (T.A.) indica un termine analogo per l'altro prodotto misto (secondo per il quarto in (1.55)). I primi due pezzi di (1.56) sono indipendenti dal tempo mentre i pezzi restanti sono pezzi oscillanti che accoppiano spinori a energia positiva e spinori a energia negativa. Questo significa che le soluzioni a energia negativa non possono essere trascurate e la frequenza di oscillazione é

$$\omega = \frac{2E}{\hbar} > \frac{2mc^2}{\hbar} \Rightarrow \lambda = \frac{c}{\omega} \gtrsim \frac{\hbar}{mc}$$

che corrisponde alla lunghezza compton della particella. Nel caso di un elettrone la frequenza di oscillazione é attorno a  $2 \cdot 10^{21} \text{ sec}^{-1}$ . Quindi, per vedere questa oscillazione devo utilizzare una particella di energia pari alla massa dell'elettrone.

Riassumendo i passaggi importanti nella costruzione dei pacchetti di soluzioni dell'equazione di Dirac sono:

1. l'equazione di Dirac (1.8) ammette due classi di soluzione: spinori  $\psi^+$  a energia positiva e spinori  $\psi^-$  a energia negativa.
2. costruendo un pacchetto di soluzioni a energia positiva si é trovato che la velocitá di gruppo del pacchetto é  $\pm c$  che é in contraddizione con la causalitá in quanto nessuna particella massiva puó propagarsi a velocitá  $c$ .
3. provando a costruire un pacchetto che inglobi sia soluzioni a energia positiva che soluzioni a energia negativa si sono trovati termini di interferenza fra queste due soluzioni. Questa interferenza si indica in gergo col nome di *zitterbewegung*.

### 1.11.2 Peso degli spinori a energia negativa

Abbiamo visto che le soluzioni a energia negativa devono essere considerate nel costruire un pacchetto di spinori. Ora ci chiediamo quanto peso hanno effettivamente queste soluzioni. A tal proposito costruiamo un pacchetto gaussiano al tempo zero  $\Psi(0, \vec{x})$ :

$$\Psi(0, \vec{x}) = \frac{1}{(\pi d^2)^{\frac{3}{4}}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\vec{x}^2}{d^2}} \omega^1(0) \quad (1.57)$$

dove  $d$  é la semilarghezza della gaussiana e  $\omega^1(0)$  é uno spinore con energia positiva e spin in su. Nel caso in cui non intervengono forze esterne gli spinori a energia positiva e negativa non si mischiano fra di loro perché gli spinori hanno la forma data in (1.31). Se voglio localizzare l'elettrone devo applicare una forza esterna e l'assunto che le soluzioni a energia positiva e negativa non si mischiano piú non é piú valido. Al tempo  $t$  il generico pacchetto, sovrapposizione di soluzioni a energia positiva e negativa, é

$$\Psi(t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_s \left( b(p, s) u(p, s) e^{-ipx} + d^*(p, s) v(p, s) e^{ipx} \right) \quad (1.58)$$

Il pacchetto dato in (1.58) calcolato al tempo 0 diventa

$$\Psi(0) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{m}{E}} \sum_s \left( b(p, s) u(p, s) e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + d^*(p, s) v(p, s) e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right) \quad (1.59)$$

( $px = p^\mu x_\mu = Et - \vec{p}\cdot\vec{x}$  e ho la condizione  $t = 0$ ). Per confrontare (1.59) con (1.57) calcolo la trasformata di Fourier di (1.57):

$$F\psi(0, \vec{x}) = \omega^1(0) \int_{-\infty}^{\infty} d^3x e^{-\frac{x^2}{2d^2} - i\vec{p}\cdot\vec{x}} = (2\pi d^2)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2 d^2}{2}} \omega^1(0) \quad (1.60)$$

Antitrasformando (1.60) ossia, integrandola in  $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$  posso uguagliare l'integrando con (1.59) ottenendo

$$\left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{p^2 d^2}{2}} \omega^1(0) = \frac{m}{E} \sum_s \left( b(p, s) u(p, s) + d^*(-p, s) v(-p, s) \right)$$

dove  $-p = (p_0, -\vec{p})$ . Ho definito  $-p$  in modo da semplificare l'esponenziale  $e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}}$  derivante dall'antitrasformata di Fourier con gli esponenziali di (1.59). Moltiplicando a sinistra per  $u^\dagger(p, s)$ , a destra per  $v^\dagger(-p, s)$  e ricordando le relazioni di ortonormalità date in (1.46) si ottiene:

$$\begin{aligned} b(p, s) &= \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{p^2}{2d^2}} u^\dagger(p, s) \omega^1(0) \\ d^*(p, s) &= \left( \frac{d^2}{\pi} \right)^{\frac{3}{4}} e^{-\frac{p^2}{2d^2}} v^\dagger(-p, s) \omega^1(0) \end{aligned}$$

Si vede che  $b(p, s) \propto$  grandi componenti di  $\omega^1(0)$  mentre  $d^*(p, s) \propto$  piccole componenti di  $\omega^1(0)$ . Quindi il peso dei coefficienti  $d^*(p, s)$  va come il rapporto fra le piccole e le grandi componenti dello spinore a energia positiva. Ricordando la forma generale degli spinori data in (1.36) si vede che, se le energie in gioco sono paragonabili alla massa della particella, allora le piccole componenti assumono lo stesso peso delle grandi componenti e non possono essere trascurate. Il problema é che per uno spinore a energia positiva, le piccole componenti sono legate alle soluzioni ad energia negativa, per le quali non si é riusciti ancora a trovare un'interpretazione. Questa situazione é ben esemplificata dal paradosso di Klein, di cui parleremo ora.



### 1.11.3 Il paradosso di Klein

Consideriamo una barriera di potenziale: un potenziale é nullo fino a  $z = 0$  e poi assume il valore  $V > 0$  per  $z > 0$ . Considero uno spinore rappresentante un elettrone libero (con energia positiva) proveniente dalla regione con  $V = 0$  con momento  $k$  e spin rivolto verso l'alto. Semplifico il problema limitandomi ad una dimensione: lo spinore ha momento  $k$  solo lungo l'asse  $z$ , ossia  $p_x = p_y = 0$ . Indico con  $\psi_{inc}$  lo spinore rappresentante un tale elettrone e da (1.36) con  $c = 1$  e  $p_x = p_y = 0$  si ha

$$\psi_{inc}(z) = e^{-i(k^0 z^0 - \vec{k} \cdot \vec{k})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.61)$$

La parte di onda riflessa  $\psi_{rif}$  dalla barriera é rappresentata da uno spinore con lo stesso esponenziale di (1.61) poiché l'esponenziale é legato al segno dell'energia e momento  $-k$  lungo l'asse  $z$ . Non posso escludere a priori un' inversione di spin per cui esprimo  $\psi_{rif}$  come una combinazione lineare di uno spinore a energia positiva con spin rivolto verso l'alto e di uno con spin verso il basso:

$$\psi_{rif}(z) = e^{-ikz} \left( a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{k}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (1.62)$$

La parte di onda trasmessa é invece rappresentata da uno spinore  $\psi_{tra}$  combinazione lineare di due spinori a energia positiva e spin opposto. Ora l'esponenziale dello spinore é diverso da quello in (1.61) o (1.62) a causa dell'effetto del potenziale non nullo: l'energia associata alla particella é  $E - V$  e, dall'equazione relativistica dell'energia, il corrispondente momento é  $q = \sqrt{(E - V)^2 - m^2}$  quindi l'espressione per  $\psi_{tra}$  é:

$$\psi_{tra}(z) = e^{-iqz} \left( c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{k}{E-V+m} \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{k}{E-V+m} \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (1.63)$$

La probabilità deve conservarsi per cui deve valere per ogni  $z$  l'equazione  $\psi_{inc}(z) = \psi_{rif}(z) + \psi_{tra}(z)$ . Imponendo la continuità in  $z = 0$  si trovano le relazioni cui devono soddisfare i coefficienti  $a, b, c, d$  (posso definire il tempo in modo che per  $z = 0$  si abbia  $t = 0$  in modo che tutti gli esponenziali siano pari a 1):

$$\begin{aligned} 1 + a &= c \\ b = d &= 0 \\ \frac{1 - a}{E + m} k &= q \frac{c}{E - V + m} \end{aligned}$$

Da queste equazioni si vede che non c'è inversione di spin. Ricordando l'espressione per la 3-corrente spaziale in questo caso si ha solo la corrente lungo l'asse  $z$  data da  $J^3 = \psi^\dagger \alpha^3 \psi$  dove  $\alpha^3$  é la matrice di Dirac costruita con la matrice di Pauli  $\sigma^3$ . A partire dai coefficienti

trovati e dall'espressione della corrente in termini degli spinori si trovano i seguenti rapporti:

$$\frac{J_{tra}}{J_{inc}} = \frac{4\pi}{(1+R)^2}$$

$$\frac{J_{rif}}{J_{inc}} = 1 - \frac{J_{tra}}{J_{inc}} = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$$

dove  $R$  é dato dall'espressione

$$R = \frac{q}{k} \frac{E+m}{E-V+m}$$

Il paradosso di Klein nasce dal fatto che, se  $V > E$  allora  $R < 0$  da cui infine  $\frac{J_{tra}}{J_{inc}} > 1$  cioè  $J_{tra} > J_{inc}$ ! Si ha piú corrente trasmessa di quanta sia quella incidente se la barriera di potenziale supera l'energia della particella incidente. Inoltre resta il problema di interpretare le soluzioni a energia negativa che a energie paragonabili alla massa della particella non possono assolutamente essere trascurate.

Ormai siamo alla fine di questo lavoro: nella prossima e ultima sezione discuteremo brevemente la teoria della lacuna di Dirac per poi renderci conto che l'approccio a una particella non é sostenibile. Vedremo che l'idea di Dirac porta alla predizione teorica dell'esistenza delle antiparticelle e diremo qualcosa riguardo al passaggio dalla meccanica quantistica relativistica basata sull'equazione di Dirac alla teoria dei campi.

## 1.12 La teoria della lacuna

Si é visto che l'approccio basato sull'equazione di Dirac, pur avendo indiscutibili successi come la spiegazione del fattore di Landé dell'elettrone (che in realtà é leggermente maggiore di due) e dell'equazione che descrive il moto di un elettrone in un campo magnetico, lascia insoluto il problema delle soluzioni a energia negativa. Il problema derivante dall'esistenza di soluzioni a energia negativa é l'instabilità che ne consegue: si avrebbe che ogni sistema fisico é instabile perché una particella di energia positiva potrebbe interagire con il campo elettromagnetico e diventare una particella di energia negativa in un processo senza fine. Potrei quindi estrarre un quantitativo infinito di energia. Va detto però che alle scale di energia che si usano in fisica atomica le soluzioni a energia negativa sono trascurabili, mentre ad energia dell'ordine della massa dell'elettrone non si possono assolutamente trascurare.

Per risolvere l'inghippo delle soluzioni a energia negativa Dirac nel 1930 propone una teoria degli elettroni e dei protoni (la hole-theory e teoria della lacuna), che erano le uniche particelle cariche note nel 1930. La sua idea si basa sul principio di esclusione di Pauli che vale per elettroni e protoni, poiché sono fermioni. In sintesi il ragionamento é il seguente:

1. Gli stati a energia negativa sono tutti occupati e, valendo il principio di esclusione, non ci possono stare dentro altre particelle.
2. Qualche stato tra quelli a energia negativa in questo "mare" potrebbe essere libero.
3. L'assenza di un elettrone a energia negativa può essere visto come la presenza di un elettrone a energia positiva (l'assenza di un debito vista come la presenza di un credito).
4. Un fotone colpisce un elettrone a energia negativa facendolo emergere dal mare e lo rende un elettrone di energia positiva. Nel mare c'è ora una lacuna che si comporta come un oggetto di carica positiva e in modulo pari a quella dell'elettrone.

5. Tale oggetto con carica viene associato da Dirac al protone.

Il processo di formazione della lacuna e di emissione di un elettrone di energia positiva a partire da un fotone incidente su un elettrone di energia negativa é rappresentabile come una creazione di coppia (tale meccanismo, col senno di poi, ricorda elettroni e lacune nei semiconduttori):

$$\gamma \rightarrow e^{-} + p$$

dove  $\gamma$  é il fotone incidente,  $e^{-}$  l' elettrone a energia positiva e  $p$  il protone associato alla lacuna. C' é anche il processo inverso in cui un elettrone a energia positiva va a riempire un buco nel mare di elettroni a energia negativa emettendo un fotone (annichilazione). In questo modo scompaiono sia l' elettrone a energia positiva che la lacuna a energia negativa e il processo si può rappresentare come:

$$e^{-} + p \rightarrow \gamma + \gamma$$

Tale teoria appare piuttosto strampalata (sempre col senno di poi) e si possono sollevare almeno tre obiezioni:

Critica 1 L'infinitá di elettroni data dal mare di Dirac dovrebbe creare un campo elettrico mostruoso che però non osserva.

Difesa 1 Si misurano sempre differenze di campo elettrico ossia differenze dallo stato di minima energia, rappresentato qui dal mare di Dirac.

Critica 2 Il buco che lascio deve avere la stessa massa ma carica opposta dell' elettrone ma il protone ha una massa 2000 volte superiore a quella dell' elettrone.

Difesa 2 *Non c' é*

Critica 3 se vale  $e^{-} + p \rightarrow \gamma + \gamma$  perché questo processo non avviene negli atomi, visto che il tempo necessario per questo processo é circa  $10^{-8}$  secondi?

Difesa 3 *Non c' é*

Come si vede la teoria della lacuna, cosí formulata non sta in piedi. Sempre Dirac, nel 1931, propone una versione migliore di questa teoria affermando la seguente proposizione: deve esistere una particella di carica pari a quella del protone e massa pari a quella dell' elettrone. Questa particella, chiamata positrone, venne effettivamente osservata nel 1932 ed é il primo esempio di antiparticella. In questo modo cadono le obiezioni 2 e 3. Un' affermazione piú forte di quella precedente, che é poi quella corretta per quanto se ne sa, é: per ogni particella di spin  $1/2$  esiste una particella con stessa massa e carica opposta detta antiparticella. Inoltre i processi di creazione e distruzione di coppie presenti nella teoria della lacuna si osservano continuamente negli acceleratori di particelle.

La storia comunque non finisce qua: posso fare una forte critica anche alla teoria della lacuna in versione migliorata:

Critica La teoria della lacuna va bene per i fermioni in quanto é basata sul principio di esclusione di Pauli. Non posso impedire un collasso di bosoni in stati a energia negativa (anzi i bosoni tenderebbero a collassare tutti nello stesso stato) perché per loro non vale il principio di esclusione.

Difesa *Non c' é*

Con questo si conclude questo lavoro dedicato all' equazione di Dirac. Il passo successivo sarebbe lo studio della teoria dei campi, dove i concetti introdotti qui saranno di grande utilità (specie in Q.E.D.).

Concludo questo lavoro scusandomi per le inesattezze, imprecisioni e anche cantonate che sono rimaste in queste pagine (nonché per i numerosi errori ortografici, di sintassi, di punteggiatura...). Spero comunque di essere stato utile all'eventuale studente che ci ha dato una letta.