

# **TEORIA dello SCATTERING e delle REAZIONI NUCLEARI**

**GUALTIERO PISENT**

Dipartimento di Fisica, Università di Padova

13 gennaio 2001



## 0.1 Premessa

Il punto di partenza della teoria è dato dall'interazione di 2 particelle puntiformi nello spazio. Il passaggio dalla teoria ad un corpo (immerso eventualmente in un campo di forze) alla teoria a 2 corpi è, com'è noto, indolore, purchè ci si riferisca al moto relativo. Noi ci limitiamo agli stati ad energia totale positiva (stati di scattering), con condizioni al contorno di onde piane entranti ed onde sferiche uscenti. Affrontiamo subito il processo stazionario di scattering partendo dall'equazione di Schroedinger non relativistica indipendente dal tempo. La soluzione dell'equazione integrale dello scattering consente di definire la funzione di Green, e scrivere una soluzione che include le condizioni al contorno di onde entranti od uscenti.

Si introducono quindi gli sviluppi multipolari, facendo uso di una teoria molto formalizzata, che consente di inserire gli sviluppi multipolari a qualsiasi stadio intermedio della teoria. Un aspetto problematico della teoria delle reazioni nucleari è che l'equazione radiale di Schroedinger non è in generale risolvibile algebricamente per nessun tipo di potenziale minimamente sofisticato. Ciò non consente di portare fino in fondo esempi ed esercizi. A questo fatto ben noto si è cercato di ovviare in due modi. Da un lato si sono sviluppati esercizi (per esempio sulle risonanze) con potenziali a buca quadrata, che pur non essendo realistici consentono analisi didatticamente utili. Dall'altro lato si è dato largo spazio alla tecnica dello sviluppo separabile dei potenziali, che è uno strumento molto utile per algebrizzare il problema dello scattering.

Tramite la teoria di matrice  $R$  si discute la genesi di risonanze di particella singola.

La prima generalizzazione è dedicata all'interazione di particelle con spin. Dopo aver considerato il caso di particelle dotate di spin ma non polarizzate in senso macroscopico, si considera il caso di fasci e/o bersagli polarizzati. Si rompe la simmetria cilindrica rispetto alla direzione del fascio incidente, e si ottiene una sezione d'urto dipendente da  $\phi$  oltre che da  $\theta$ . Si discute l'effetto di forze non centrali sull'equazione di Schroedinger, che può trasformarsi in un set di equazioni accoppiate.

La generalizzazione successiva è all'interazione fra particelle dotate di struttura, ad energie che rendono possibile l'eccitazione ma non la frammentazione. Si discute il problema a canali accoppiati e le possibili risonanze composte e quasi composte. Si discute l'approccio di Feshbach ed un'applicazione al caso di potenziali multicanali di rancio finito.

L'ultima parte è dedicata al caso più generale di reazioni con riarran-

giamento. Largo spazio è dedicato alle cinematiche per il calcolo di sezioni d'urto ed effetti della polarizzazione.

Chiude il libro un accenno al problema a 3 corpi in meccanica quantistica.

Una vasta appendice è dedicata alla teoria quantistica dei momenti angolari, alle proprietà di trasformazioni dei campi tensoriali per rotazioni del riferimento, e ai tensori sferici irriducibili.

La bibliografia di riferimento riguarda la teoria dello scattering ([1], [2], [3]), la teoria delle reazioni nucleari ([4], [5]), e la teoria dei momenti angolari ([6], [7]).

# Parte I

## Lo scattering elastico fra due particelle puntiformi

# Capitolo 1

## Equazioni integrali dello scattering

### 1.1 Gli autostati di momento

Consideriamo lo scattering elastico non-relativistico fra 2 particelle puntiformi di massa  $m_1, m_2$ .

Particelle puntiformi significa particelle senza struttura interna, quindi interazione elastica.

Dette  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$  le coordinate delle 2 particelle in un riferimento (inerziale) qualsiasi, il problema (classico) dell'interazione è dato dalle

$$\begin{aligned}m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{f}_{12}, \\m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{f}_{21}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Discende sempre dalla natura puntiforme delle particelle (e dal principio di azione e reazione), che  $\mathbf{f}_{12} = \mathbf{f}_{12}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)$ ,  $\mathbf{f}_{21} = -\mathbf{f}_{12}$ . Conviene allora la trasformazione di coordinate

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2},\end{aligned}\tag{1.2}$$

L'inversione del sistema 1.2 dà

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_1 &= \mathbf{R} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r},\end{aligned}\tag{1.3}$$

e quindi le equazioni 1.1 danno:

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0, \quad (1.4)$$

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{f}_{12}(|\mathbf{r}|), \quad (1.5)$$

dove

$$m = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)}, \quad (1.6)$$

è la massa ridotta del sistema. Il risultato è noto: sottraendo il moto (inessenziale) del baricentro, il problema a 2 corpi si riduce a un problema (efficace) a 1 corpo.

L'energia cinetica nel laboratorio è

$$E_{lab} = \frac{1}{2} m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\mathbf{R}}^2 + E, \quad (1.7)$$

dove

$$E = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}^2 = \frac{p^2}{2m} \quad (1.8)$$

è l'energia nel CM. Il momento relativo  $\mathbf{p}$  è definito dalla relazione

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\dot{\mathbf{p}}_1}{m_1} = \frac{\dot{\mathbf{p}}_2}{m_2} = \frac{\dot{\mathbf{p}}}{m}. \quad (1.9)$$

Tutto questo è classico. Quantisticamente bisogna introdurre il numero d'onda  $\mathbf{k}$  e la sua rappresentazione operatoriale, secondo la ricetta:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \rightarrow -i\nabla, \quad (1.10)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}. \quad (1.11)$$

Quindi all'energia cinetica

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{k^2}{\mu}; \quad \mu = \frac{2m}{\hbar^2}, \quad (1.12)$$

corrisponde l'operatore (hamiltoniano libero)

$$H_0 = -\frac{\nabla^2}{\mu}, \quad (1.13)$$

dove

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (1.14)$$

è il laplaciano.

L'equazione (stazionaria non relativistica) di  $S$  per la particella libera, si può scrivere nelle due forme equivalenti.

$$\begin{aligned}(H_0 - E)\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= 0; \\ (\nabla^2 + k^2)\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= 0,\end{aligned}\tag{1.15}$$

avendo indicato con  $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  la funzione d'onda della particella libera, auto-stato dell'operatore  $H_0$ , relativo all'autovalore  $E$ .

Quando passeremo dall'equazione di  $S$  libera, all'equazione con interazione, l'ipotesi fatta su  $\mathbf{f}_{12}$  si ridurrà ad assumere un potenziale d'interazione  $V(r)$  centrale. Si assumerà anche (almeno in un primo momento) che il potenziale sia locale (vedi più avanti definizione di non località), e a corto raggio [ il che vuol dire limitarsi all'interazione forte ed escludere almeno in un primo tempo l'interazione coulombiana ].

La soluzione dell'equazione 1.15 è l'onda piana

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikr \cos \theta},\tag{1.16}$$

avendo assunto  $\frac{\mathbf{k}}{k} = \text{versore asse } z$ .

Le superfici d'onda di  $\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r})$  sono i piani ortogonali all'asse  $z \equiv$  direzione di  $\mathbf{k}$ .

---

Verifica: il Laplaciano in coordinate polari si scrive:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{1}{(r \sin \theta)^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \equiv \nabla_r^2 + \nabla_\theta^2 + \nabla_\phi^2.\tag{1.17}$$

E' facile verificare che:

$$\begin{aligned}\nabla_r^2 \Phi &= \left( \frac{2ik \cos \theta}{r} - k^2 \cos^2 \theta \right) \Phi, \\ \nabla_\theta^2 \Phi &= \left( \frac{2ik \cos \theta}{r} - k^2 \sin^2 \theta \right) \Phi, \\ \nabla_\phi^2 \Phi &= 0,\end{aligned}$$

e quindi

$$\nabla^2 \Phi = k^2 \Phi, \text{ c.v.d.}$$


---



Gli autostati di momento non sono normalizzabili in senso proprio, ma nel senso delle distribuzioni.

Partiamo dal caso unidimensionale

$$(H_0 - E)\Phi(k, x) = 0; \left(\frac{d^2}{dx^2} + k^2\right)\Phi(k, x) = 0, \quad (1.18)$$

che è l'equazione dell'oscillatore armonico (salvo il diverso significato delle variabili).

Consideriamo la soluzione

$$\Phi(k, x) = e^{ikx}. \quad (1.19)$$

Operiamo prima nell'intervallo limitato  $-a \leq x \leq a$ , e definiamo il prodotto scalare

$$(\Phi(k'), \Phi(k)) = \int_{-a}^a \Phi^*(k', x)\Phi(k, x)dx = \int_{-a}^a e^{i(k-k')x}dx = \frac{2 \sin[a(k-k')]}{k-k'}. \quad (1.20)$$

In particolare la norma è finita, poichè:

$$\|\Phi(k)\|^2 = (\Phi(k), \Phi(k)) = \lim_{k' \rightarrow k} \frac{2 \sin a(k-k')}{k-k'} = 2a. \quad (1.21)$$

Vediamo adesso cosa succede al limite per  $a \rightarrow \infty$ .

Consideriamo  $(\Phi(k'), \Phi(k))$  come funzione di  $k - k'$ : La funzione disegnata in figura 1.1 gode delle seguenti proprietà:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (\Phi(k'), \Phi(k)) = \begin{cases} \infty & \text{se } k = k' \\ 0 & \text{se } k \neq k' \end{cases}, \quad (1.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin x a}{x} dx = 2\pi, \quad (1.23)$$

per qualsiasi  $a$ , e quindi anche al limite per  $a \rightarrow \infty$ , e questo ci porta a una delle possibili definizioni della delta di Dirac. Possiamo scrivere quindi:

$$(\Phi(k'), \Phi(k)) = 2\pi\delta(k - k'), \quad (1.24)$$

e ridefinire  $\Phi$ , normalizzata nel senso delle distribuzioni:

$$\Phi(k, x) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}e^{ikx}. \quad (1.25)$$

In 3 dimensioni la 1.25 è sostituita dalla:

$$\int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}} d\mathbf{r} = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.26)$$

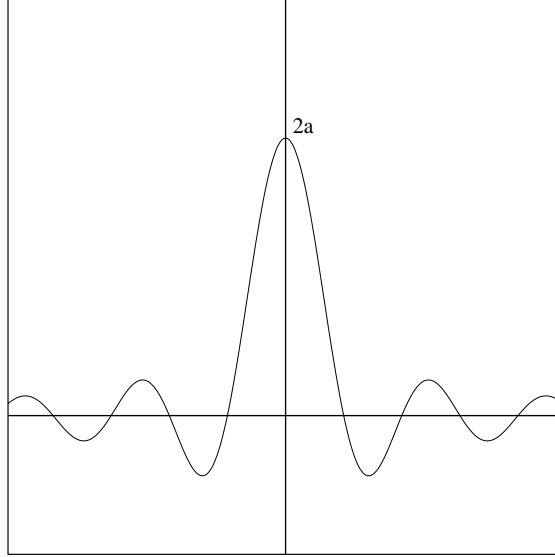


Figura 1.1:  $(\Phi(k'), \Phi(k))$

dove  $d\mathbf{r} \equiv r^2 dr d\hat{r} \equiv r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ , e dove l' $f$  si intende esteso a tutto lo spazio.

C'è perfetta simmetria fra gli spazi  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{k}$ , ovvero:

$$\int e^{i(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathbf{k}} d\mathbf{k} = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.27)$$

Conviene allora definire formalmente uno stato di momento  $|\mathbf{k}\rangle$  ortonormale

$$\langle \mathbf{k}|\mathbf{k}' \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.28)$$

e completo

$$\int |\mathbf{k}\rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k}| = \mathbf{1}, \quad (1.29)$$

in modo che la rappresentazione coordinata di  $|\mathbf{k}\rangle$  dia l'onda piana normalizzata:

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}; \quad \langle \mathbf{k}|\mathbf{r}\rangle = \langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle^* . \quad (1.30)$$

Dalla completezza dei momenti 1.29, discende l'ortonormalità delle coordinate.

$$\langle \mathbf{r}'|\mathbf{r}\rangle = \int \langle \mathbf{r}'|\mathbf{k}\rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k}|\mathbf{r}\rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.31)$$

[per la 1.27], e viceversa:

$$\int |\mathbf{r}\rangle d\mathbf{r} \langle \mathbf{r}| = \mathbf{1}. \quad (1.32)$$

Un'espressione formale per l'equazione di S. per particella libera è la seguente:

$$H_0|\mathbf{k}\rangle = E|\mathbf{k}\rangle. \quad (1.33)$$

Proiettando sullo stato di momento si ottiene:

$$\langle \mathbf{p}|H_0|\mathbf{k}\rangle = E\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}). \quad (1.34)$$

L'operatore  $H_0$  è diagonale in rappresentazione momento. Dalla 1.34 si deduce immediatamente l'hermiticità di  $H_0$ :

$$\langle \mathbf{k}|H_0|\mathbf{p}\rangle = E \langle \mathbf{k}|\mathbf{p}\rangle = E \langle \mathbf{p}|\mathbf{k}\rangle^* = \langle \mathbf{p}|H_0|\mathbf{k}\rangle^*. \quad (1.35)$$

Dalla proprietà generale

$$\langle \mathbf{k}|H_0|\mathbf{p}\rangle = \langle \mathbf{p}|H_0^\dagger|\mathbf{k}\rangle^*; \quad (1.36)$$

segue

$$H_0 = H_0^\dagger. \quad (1.37)$$

Proiettando la 1.33 sullo stato di coordinata si ottiene:

$$\langle \mathbf{r}|H_0|\mathbf{k}\rangle = E \langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\rangle = \frac{E}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.38)$$

Sullo stato di coordinata,  $H_0$  opera nel modo seguente:

$$H_0|\mathbf{r}\rangle = -\frac{\nabla^2(\mathbf{r})}{\mu}|\mathbf{r}\rangle. \quad (1.39)$$

Proiettando la 1.39 sullo stato di momento si ottiene:

$$\langle \mathbf{k}|H_0|\mathbf{r}\rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\mu} \nabla^2(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (1.40)$$

Da questa e dall'hermiticità di  $H_0$  si ottiene:

$$\langle \mathbf{r}|H_0|\mathbf{k}\rangle = \langle \mathbf{k}|H_0|\mathbf{r}\rangle^* = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\mu} \nabla^2(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (1.41)$$

e confrontando questa con la 1.38 si ottiene l'equazione di S. (non formale) per particella libera

$$\left(E + \frac{\nabla^2(\mathbf{r})}{\mu}\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 0. \quad (1.42)$$

## 1.2 Equazione di Lippmann–Schwinger e sua soluzione formale

L'hamiltoniano completo  $H = H_0 + V$  si ottiene sommando all'hamiltoniano libero, l'interazione. L'equazione completa di Schrödinger (stazionaria, non relativistica), si scrive quindi:

$$(H - E)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0; \quad H = H_0 + V(r). \quad (1.43)$$

Consideriamo le seguenti forme, tutte fra loro equivalenti:

$$(E - H_0)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = V(r)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (1.44)$$

$$[\nabla^2 + k^2 - \mu V(r)]\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0, \quad (1.45)$$

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \mu V(r)\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (1.46)$$

Consideriamo la 1.44 [ovvero 1.43] alla stregua di un'equazione differenziale non omogenea, e scriviamo:  $\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) +$  una soluzione dell'equazione completa, ricavando quest'ultima con il metodo di Green.

Naturalmente, poichè il termine noto contiene l'incognita, ciò che otterremo sarà non una soluzione, ma una rappresentazione integrale, che conterrà ancora l'incognita nel kernel.

Premettiamo alcune considerazioni generali sul metodo di Green. Consideriamo l'equazione non omogenea

$$\Omega(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r}), \quad (1.47)$$

con  $\Omega$  operatore differenziale lineare. La funzione di Green  $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  associata alla  $\Psi$  è per definizione la soluzione dell'equazione

$$\Omega(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.48)$$

dove si intende che le due equazioni 1.47 e 1.48, sono soggette alle stesse condizioni al contorno. Allora per la  $\Psi$ , vale la seguente rappresentazione integrale:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' \quad (1.49)$$

Per verificare basta operare a sinistra con  $\Omega(\mathbf{r})$ .

Si ottiene:  $\Omega(\mathbf{r})\Psi(\mathbf{r}) = \int \Omega(\mathbf{r})G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \int \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}')d\mathbf{r}' = \rho(\mathbf{r})$ , che è la 1.47. Nello sviluppo si è usata la 1.48, e si è anche tenuto conto che  $\Omega(\mathbf{r})$  può scavalcare  $\int d\mathbf{r}'$ .

Nel nostro caso (equazione 1.44),  $\Omega = E - H_0$ ,  $\rho = V\Psi$ , e quindi

$$\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \int G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}')V(r')\Psi(\mathbf{k}, \mathbf{r}')d\mathbf{r}', \quad (1.50)$$

con  $G_0$  soluzione della

$$(E - H_0)G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.51)$$

Per risolvere la 1.51, sviluppiamo  $G_0$  in integrali di Fourier nella variabile  $\mathbf{r}$ <sup>1</sup>:

$$G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \int g(k; \mathbf{k}', \mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}d\mathbf{k}', \quad (1.52)$$

e operiamo a sinistra con  $E - H_0(\mathbf{r})$  sulla 1.52, ricordando le 1.51,1.15,1.18:

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \int g(k; \mathbf{k}', \mathbf{r}') (E - H_0(\mathbf{r}))e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}d\mathbf{k}' = \frac{1}{\mu} \int g(k; \mathbf{k}', \mathbf{r}') (k^2 - k'^2)e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}d\mathbf{k}'. \quad (1.53)$$

Adesso usiamo l'ortonormalità dell'onda piana 1.27 per rappresentare la  $\delta$  di Dirac:

$$\int e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}d\mathbf{k}' = \frac{(2\pi)^3}{\mu} \int g(k; \mathbf{k}', \mathbf{r}') (k^2 - k'^2)e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}d\mathbf{k}', \quad (1.54)$$

da cui

$$\int \left[ \frac{(2\pi)^3}{\mu} g(k; \mathbf{k}', \mathbf{r}') (k^2 - k'^2) - e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \right] e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}}d\mathbf{k}' = 0, \quad (1.55)$$

---

<sup>1</sup>Osserviamo per inciso che la trasformata di Fourier coincide con lo sviluppo in autostati di momento. Dato  $|f\rangle$ , definito dalle rappresentazioni

$$\langle \mathbf{r}|f\rangle = f(\mathbf{r}), \quad \langle \mathbf{k}|f\rangle = f(\mathbf{k}),$$

Scriviamo un'identità tramite la completezza 1.29:

$$|f\rangle = \int |\mathbf{k}\rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k}|f\rangle$$

che scritta esplicitamente, e semprechè l'integrale esista, diventa:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} f(\mathbf{k}).$$

L'antitrasformata è

$$\langle \mathbf{k}|f\rangle = \int \langle \mathbf{k}|\mathbf{r}\rangle d\mathbf{r} \langle \mathbf{r}|f\rangle,$$

ovvero

$$f(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}).$$

ovvero

$$g(k; \mathbf{k}', \mathbf{r}') = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'}}{k^2 - k'^2}, \quad (1.56)$$

che sostituita nella 1.52 dà:

$$G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\mu}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k}'(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k^2 - k'^2} d\mathbf{k}'. \quad (1.57)$$

L'integrazione sugli angoli è immediata ponendo  $\mathbf{r} - \mathbf{r}' \equiv \rho =$  asse  $z$ :

$$\begin{aligned} G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \frac{\mu}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k'^2 dk' \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \frac{e^{ik'\rho \cos\theta}}{k^2 - k'^2} = \\ &= \frac{\mu}{i\rho(2\pi)^2} \left[ \int_0^\infty k' dk' \frac{e^{ik'\rho}}{k^2 - k'^2} - \int_0^\infty k' dk' \frac{e^{-ik'\rho}}{k^2 - k'^2} \right] \end{aligned} \quad (1.58)$$

Sostituendo formalmente  $k' \rightarrow -k'$  nel secondo  $\int$ , questo diventa

$$- \int_0^{-\infty} (-k')(-dk') \frac{e^{ik'\rho}}{k^2 - k'^2} = \int_{-\infty}^0 k' dk' \frac{e^{ik'\rho}}{k^2 - k'^2}, \quad (1.59)$$

e quindi  $G_0$  si può esprimere tramite un'integrazione su tutto l'asse:

$$G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{i\rho(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty k' dk' \frac{e^{ik'\rho}}{k'^2 - k^2}. \quad (1.60)$$

L'integrando ha due poli in  $k' = \pm k$ , e quindi  $G_0(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  non è definito. E' però definito  $G_0^{(\pm)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G_0(k \pm i\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$  ed anzi, come vedremo, questa scelta conferisce alla relativa funzione d'onda  $\Psi^{(\pm)}$  un significato fisico preciso, in quanto corrisponde alle corrette condizioni al contorno.

Calcoliamo prima

$$G_0^{(+)}(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{i\rho(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty k' dk' \frac{e^{ik'\rho}}{(k' + k + i\varepsilon)(k' - k - i\varepsilon)}. \quad (1.61)$$

Ricordiamo il lemma di Jordan (con riferimento alla figura 1.2): se  $f(z)$  è regolare sul semipiano superiore (compreso l'asse reale), salvo un numero finito di poli, e se  $|f(z)| \rightarrow 0$  su  $\Gamma$  (semicerchio di centro  $O$  e raggio  $R$  sul semipiano superiore) quando  $R \rightarrow \infty$ , allora  $\int_\Gamma f(z)e^{imz} dz \rightarrow 0$  per  $R \rightarrow \infty$  e  $m > 0$ .

Nel nostro caso  $f(k') = \frac{k'}{k'^2 - (k + i\varepsilon)^2}$  soddisfa alle condizioni richieste, ed  $m = \rho$  è  $> 0$ . Quindi si può applicare il teorema di Cauchy:

$$\oint = 2\pi i \sum \text{residui}. \quad (1.62)$$

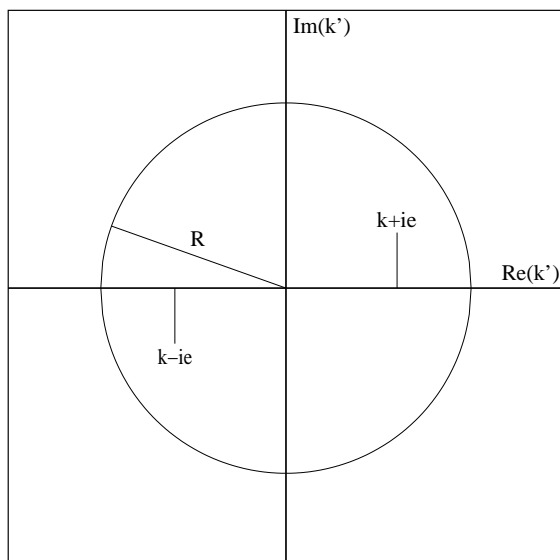


Figura 1.2: Integrale sul piano complesso

L'unico polo che interessa è in  $k' = k + i\varepsilon$ , e quindi abbiamo

$$G_0^{(\pm)}(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}, \quad (1.63)$$

avendo scritto direttamente la formole generale, valida per ambedue le scelte di segno.

Sostituendo la 1.63 nella 1.50 si ottengono due funzioni d'onda, corrispondenti alle due scelte sul cammino d'integrazione:

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \int G_0^{(\pm)}(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') V(r') \Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.64)$$

Per capire il significato di  $G_0^{(\pm)}$  e  $\Psi^{(\pm)}$ , studiamo il comportamento asintotico ( $r \rightarrow \infty$ ) della funzione d'onda.

Sviluppriamo  $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$  per  $r \rightarrow \infty$ , nell'ipotesi di interazione a corto raggio:

$$V(r') \sim 0 \quad \text{se } r' \geq R. \quad (1.65)$$

Mentre  $r \rightarrow \infty$ ,  $r'$  è vincolato a restare dentro  $R$  (vedi la figura 1.3), e quindi  $r'/r \rightarrow 0$ . Possiamo effettuare allora i seguenti sviluppi:

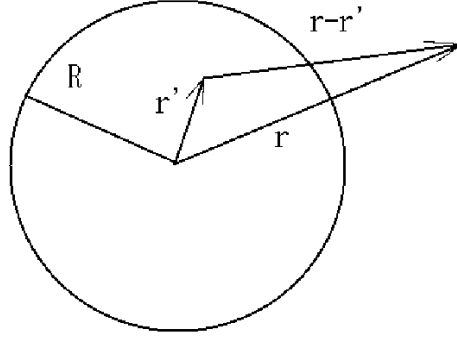


Figura 1.3: Vincoli su  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}'$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \rightarrow \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} = r \sqrt{1 + \left(\frac{r'}{r}\right)^2 - 2\frac{r'}{r} \cos \theta} \sim r - r' \cos \theta, \quad (1.66)$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rightarrow \frac{1}{r}, \quad (1.67)$$

$$e^{\pm ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sim e^{\pm ikr} e^{\mp ikr' \cos \theta}, \quad (1.68)$$

con cui possiamo scrivere la forma integrale asintotica della funzione d'onda:

$$\Psi_{\infty}^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int e^{\mp ikr' \cos \theta} V(r') \Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \quad (1.69)$$

La forma asintotica per la funzione d'onda fisica di scattering, è la seguente:

$$\Psi_{\infty}^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + f(\widehat{kr}) \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1.70)$$

Qui  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$  è l'onda piana incidente (le superfici d'onda sono piano ortogonali alla direzione della particella incidente  $\mathbf{k}$ ),  $\frac{e^{ikr}}{r}$  è l'onda sferica uscente normalizzata (le superfici d'onda sono sfere con centro in  $O$ , ed  $r$  a denominatore serve a rendere costante il flusso),  $f$ , coefficiente di proporzionalità fra le due



è l'ampiezza di scattering,  $\widehat{kr}$  è l'angolo (di scattering) fra la direzione delle particelle incidenti  $\mathbf{k}$ , e la direzione della particella uscente  $\mathbf{r}$ .

Si osservi che, siccome siamo in fase stazionaria ( $t$  non compare esplicitamente), scrivere  $e^{ikr}$  per le onde sferiche uscenti è convenzionale, ma serve poi da riferimento per tutto il formalismo.

Dal confronto fra le 1.69 e 1.70 si ricava

$$f(\widehat{kr}) = -\frac{\mu}{4\pi} \int e^{-ikr' \cos \theta} V(r') \Psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.71)$$

cui si può dare una forma più interessante.

Siccome  $\theta = \widehat{r'r'}$ , ne consegue che  $\cos \theta = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{rr'}$ , e quindi:

$$kr' \cos \theta = k \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r} = \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}', \quad (1.72)$$

avendo posto

$$\mathbf{k}' = k \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (1.73)$$

Il nuovo vettore  $\mathbf{k}'$  ha il modulo di  $\mathbf{k}$  e la direzione di  $\mathbf{r}$  (particella uscente), ed è quindi il momento dello stato finale. Naturalmente  $k = k'$  in quanto stiamo considerando un processo elastico, in cui si conserva l'energia cinetica.

Con le nuove posizioni la 1.71 si scrive:

$$f(\widehat{kk'}) = -\frac{\mu}{4\pi} \int e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(r') \Psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (1.74)$$

L'equazione 1.64 (detta di Lippmann-Schwinger), dà una rappresentazione integrale della funzione d'onda di scattering, tramite la funzione di GREEN, o propagatore libero  $G_0$ , la cui espressione è data in 1.63. Esistono due propagatori ( $G_0^{(\pm)}$ ), caratterizzati da due modi diversi di definire l'integrale in  $G_0$ . Questi due propagatori sono connessi alle due funzioni d'onda  $\Psi^{(\pm)}$ , quella cosiddetta outgoing ( $\Psi^{(-)}$ ), caratterizzata da onde piane + onde sferiche uscenti, e quella ingoing ( $\Psi^{(+)}$ ), costituita da onde piane + onde sferiche entranti. La prima è la funzione d'onda fisica (tanto è vero che da essa deriva l'ampiezza di scattering  $f$ ) ma anche la seconda entra come ingrediente nella teoria, come si vedrà in seguito.

Come si è detto l'equazione di L.S. non dà una soluzione al problema dello scattering, ma solo una rappresentazione integrale della  $\Psi$ . Essa è però importantissima per i seguenti motivi:

Contiene le condizioni al contorno;

E' una forma globale che precede la decomposizione in momenti angolari (tecnica di riduzione a 1 dimensione se l'interazione è centrale);

E' il punto di partenza per ogni sviluppo perturbativo, e in particolare per l'approssimazione di Born.

Osserviamo per inciso che ci sarebbe un terzo modo per eseguire l'integrazione in 1.60: fare la parte principale secondo Cauchy. Avendo già calcolato  $G_0^{(\pm)}$  in 1.63, conviene ricordare l'importante relazione formale

$$P \frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0 \pm i\epsilon} \pm i\pi\delta(x - x_0). \quad (1.75)$$

Noi abbiamo forme quadratiche ( $x \equiv k'^2$ ,  $x_0 \equiv k^2$ ), e bisogna ricordare che:

$$\delta(k'^2 - k^2) = \delta[(k' - k)(k' + k)] = \frac{\delta(k - k')}{2k},$$

poichè  $\delta[c(x - x_0)] = \frac{1}{|c|}\delta(x - x_0)$ . Allora la 1.75 diventa

$$P \frac{1}{k'^2 - k^2} = \frac{1}{k'^2 - k^2 \pm i\epsilon} \pm \frac{i\pi}{2k}\delta(k' - k). \quad (1.76)$$

Confrontando con la 1.60 si ottiene

$$G_0^P(k; \mathbf{r}\mathbf{r}') = \frac{1}{2}[G_0^{(+)}(k; \mathbf{r}\mathbf{r}') + G_0^{(-)}(k; \mathbf{r}\mathbf{r}')], \quad (1.77)$$

avendo indicato con  $G_0^P$  la scelta secondo Cauchy, e finalmente dalla 1.63 si ottiene

$$G_0^P(k; \mathbf{r}\mathbf{r}') = -\frac{\mu \cos k|r - r'|}{4\pi |r - r'|}. \quad (1.78)$$

L'espressione 1.74 per l'ampiezza di scattering, è della massima importanza, poichè con  $f$  è connessa la sezione d'urto, che è l'osservabile per eccellenza in un processo di scattering:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f(\theta)|^2. \quad (1.79)$$

Ricordiamo la definizione operativa di sezione d'urto (per il momento nel caso dell'interazione elastica fra particelle puntiformi,  $a + b \rightarrow a + b$ ):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{1}{\Phi_a N_b} \frac{dn_a(\theta)}{d\Omega}, \quad (1.80)$$

dove:

$\frac{dn_a(\theta)}{d\Omega}$  è il numero di particelle  $a$  uscenti nell'unità di tempo in  $d\Omega$ ,  
 $\Phi_a$  è il numero di  $a$  incidenti nell'unità di tempo sull'unità di superficie, e  
 $N_b$  il numero di centri scatteratori  $b$  nel bersaglio investito.

La definizione di sezione d'urto differenziale è

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\Phi(\mathbf{J}_{scat})}{|\mathbf{J}_{inc}|d\Omega}, \quad (1.81)$$

Si noti che dimensionalmente la sezione d'urto è una superficie come deve. La densità di corrente si calcola in base alla formula:

$$\mathbf{J} = Re(\Psi^*, \mathbf{v}\Psi), \quad (1.82)$$

dove  $\mathbf{v}$  si ricava dalla:

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} = \frac{\hbar\nabla}{mi}. \quad (1.83)$$

Tutte le funzioni d'onda si intendono calcolate al valore asintotico. A parte coefficienti che si elidono fra numeratore e denominatore abbiamo:

$$\Psi_{inc} = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = e^{ikz}, \quad (1.84)$$

$$\nabla\Psi_{inc} = D_z\Psi_{inc}\hat{z} = ike^{ikz}\hat{z}, \quad (1.85)$$

$$\mathbf{J}_{inc} = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} = \mathbf{v}. \quad (1.86)$$

Questo è un risultato classico. Le particelle che attraversano l'unità di superficie nell'unità di tempo sono quelle contenute nel cilindro di base unitaria e altezza  $v$ . Per quanto riguarda il denominatore abbiamo:

$$\Psi_{scat} = f(\theta)\frac{e^{ikr}}{r}. \quad (1.87)$$

$$\nabla\Psi_{scat} = D_r\Psi_{scat}\hat{r}, \quad (1.88)$$

$$d\Phi(\mathbf{J}_{scat}) = \frac{\hbar}{m}Re(\Psi_{scat}^*, \nabla\Psi_{scat})r^2d\Omega = |f(\theta)|^2\frac{\hbar k}{m}d\Omega, \quad (1.89)$$

avendo approssimato  $ikr - 1 \sim ikr$ , poichè siamo al limite di  $r \rightarrow \infty$ . Si trova infine la 1.79.

Estendiamo adesso alla  $\Psi$  la trattazione formale già usata per la  $\Phi$ .

Definiamo lo stato  $|\mathbf{k}\pm\rangle$  (autostato dell'hamiltoniano completo  $H$  relativo all'autovalore  $E$ , con le condizioni al contorno di tipo in- o out-going), in modo che la sua rappresentazione coordinata sia:

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\pm\rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (1.90)$$

Se si spegne l'interazione ( $V = 0$ ),  $|\mathbf{k}\pm\rangle \rightarrow |\mathbf{k}\rangle$ , definita dalla 1.30.

Osserviamo che

$$\langle \mathbf{p}|\mathbf{k}\pm\rangle = \int \langle \mathbf{p}|\mathbf{r}\rangle d\mathbf{r} \langle \mathbf{r}|\mathbf{k}\pm\rangle = (2\pi)^{-3} \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} d\mathbf{r} \Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \quad (1.91)$$

ovvero la rappresentazione momento dello stato  $|\mathbf{k}\pm\rangle$  è la trasformata di Fourier della funzione d'onda.

Consideriamo l'equazione di  $S$  nella forma 1.44, facendo riferimento alle soluzioni con il corretto comportamento asintotico:

$$[E - H_0]\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = V(r)\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (1.92)$$

Consideriamo l'equazione formale

$$(E - H_0)|\mathbf{k}\pm\rangle = V|\mathbf{k}\pm\rangle, \quad (1.93)$$

e la sua proiezione sullo stato di coordinata

$$\langle \mathbf{r}|E - H_0|\mathbf{k}\pm\rangle = \langle \mathbf{r}|V|\mathbf{k}\pm\rangle. \quad (1.94)$$

Inserendo una completezza in  $\mathbf{r}$  nel membro di destra, la 1.94 si può porre nella forma seguente:

$$[E - H_0(\mathbf{r})]\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int \langle \mathbf{r}|V|\mathbf{r}'\rangle d\mathbf{r}'\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}'), \quad (1.95)$$

che coincide con la 1.92 se e solo se

$$\langle \mathbf{r}|V|\mathbf{r}'\rangle = V(r)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.96)$$

Un potenziale che soddisfa alla 1.96, ovvero che è diagonale in rappresentazione coordinate, si dice locale.

Lo scattering (anche elastico) fra particelle con struttura (per esempio l'interazione nucleone-nucleo) porta alla definizione di potenziali più generali, non diagonali in  $\mathbf{r}$ , ovvero non locali, per cui vale al posto della 1.96, la più generale relazione

$$\langle \mathbf{r}|V|\mathbf{r}'\rangle = V(r, r'). \quad (1.97)$$

In questo caso l'equazione formale dello scattering è sempre la 1.93, ma la sua rappresentazione coordinata non è più la 1.92, bensì la seguente:

$$[E - H_0(\mathbf{r})]\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int V(r, r')d\mathbf{r}'\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}'), \quad (1.98)$$

L'operatore  $V$  è tale che  $V\Psi$ , calcolato in  $\mathbf{r}$ , dipende dall'integrale della funzione d'onda a tutto lo spazio, e come conseguenza l'equazione di  $S$  diventa integro-differenziale. È un problema di interazione elastica fra particelle estese.

Consideriamo adesso l'equazione 1.51 che definisce il propagatore libero  $G_0$ .

L'espressione formale della 1.51 è la seguente:

$$(E - H_0)G_0(E) = 1. \quad (1.99)$$

Trattandosi di un'equazione fra operatori (e non fra stati), per passare alla forma esplicita bisogna non proiettare su  $\langle \mathbf{r} |$ , ma fare il sandwich fra  $\langle \mathbf{r} |$  ed  $|\mathbf{r}' \rangle$ :

$$\langle \mathbf{r} | (E - H_0)G_0(E) |\mathbf{r}' \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle. \quad (1.100)$$

Possiamo scrivere:

$$[E - H_0] \langle \mathbf{r} | G_0(E) |\mathbf{r}' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.101)$$

che coincide con la 1.51 se poniamo

$$\langle \mathbf{r} | G_0(E) |\mathbf{r}' \rangle = G_0(E; \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.102)$$

Il propagatore è per sua natura non diagonale in rappresentazione coordinata.

Se esiste l'operatore  $\frac{1}{E-H_0}$ , definito dalle condizioni

$$\frac{1}{E - H_0} (E - H_0) = (E - H_0) \frac{1}{E - H_0} = 1, \quad (1.103)$$

moltiplicando la 1.99 a sinistra per  $\frac{1}{E-H_0}$ , si ottiene:

$$G_0(E) = \frac{1}{E - H_0} \quad (1.104)$$

La natura di operatore integrale di  $G_0$ , già implicita p. es. nella relazione 1.50, riemerge più chiaramente nella 1.104, dove il propagatore è espresso come l'inverso di un operatore differenziale.

Occupiamoci adesso dello spettro di  $G_0$ . Consideriamo l'identità

$$(E - H_0) |\mathbf{k}' \rangle = (E - E') |\mathbf{k}' \rangle, \quad (1.105)$$

che discende formalmente dalla 1.34. Qui e nel seguito noi intendiamo che  $k = \sqrt{\mu E}$ ,  $k' = \sqrt{\mu E'}$ ,  $k'' = \sqrt{\mu E''}$ , senza specificarlo.

Sia  $E \neq E'$ , e moltiplichiamo ambo i membri della 1.105 per  $G_0(E) \rightarrow$ , e per  $\frac{1}{E-E'}$ . Si ottiene:

$$\frac{1}{(E - H_0)} |\mathbf{k}' \rangle = \frac{1}{(E - E')} |\mathbf{k}' \rangle, \quad (1.106)$$

Gli autostati di momento sono anche autostati di  $G_0(E)$ , con autovalori  $\frac{1}{E-E'}$ , escluso il caso  $E = E'$ . Se però modifichiamo la definizione 1.104 nel modo seguente:

$$G_0(E^{(\pm)}) \equiv G_0^{(\pm)}(E) = \frac{1}{E \pm i\epsilon - H_0} \equiv \frac{1}{E^{(\pm)} - H_0}, \quad (1.107)$$

con la convenzione di fare il limite per  $\varepsilon \rightarrow 0$  dopo aver applicato l'operatore, otteniamo due obiettivi:

–Si elimina la patologia,

–L'operatore contiene anche le condizioni al contorno.

Con queste convenzioni si ottiene immediatamente l'espressione formale per l'equazione di L.S. 1.64:

$$|\mathbf{k}\pm\rangle = |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E^{(\pm)} - H_0} V |\mathbf{k}\pm\rangle. \quad (1.108)$$

Le 1.64 e 1.108 differiscono per un inessenziale fattore  $(2\pi)^{\frac{3}{2}}$  in ambo i membri.

Vogliamo ricavare adesso la cosiddetta soluzione formale dell'equazione di L.S.

Riscriviamo la 1.64 nella forma

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \quad (1.109)$$

avendo posto  $\varphi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int G_0^{(\pm)}(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') V(r') \Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' =$  componente sferica (in- e out-going) dell'onda.

Usando la 1.109, la 1.44 diventa:

$$(E - H_0)(\Phi + \varphi^{(\pm)}) = V(\Phi + \varphi^{(\pm)}). \quad (1.110)$$

Ma, siccome  $(E - H_0)\Phi = 0$ , si può scrivere nella forma

$$(E - H_0 - V)\varphi^{(\pm)} = V\Phi, \quad (1.111)$$

ovvero

$$(E - H)\varphi^{(\pm)} = V\Phi, \quad (1.112)$$

avendo introdotto l'hamiltoniano totale  $H = H_0 + V$ . Questa è un'equazione non omogenea vera, cui si può applicare il metodo di Green esattamente come per la 1.44, e si ottiene:

$$\Psi^{(\pm)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} + \int G^{\pm}(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') V(r') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} d\mathbf{r}', \quad (1.113)$$

dove la funzione completa di Green, o propagatore totale  $G$ , è soluzione della

$$(E - H)G^{(\pm)}(k; \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.114)$$

A proposito della 1.113 si parla di soluzione formale: soluzione in contrapposizione a rappresentazione integrale 1.64, in quanto qui l'integrale va fatto

sull'onda piana (nota) e non sulla  $\Psi$  (incognita); ma formale in quanto contiene il propagatore completo  $G$  che, essendo soluzione della 1.114 dipende anche dall'interazione  $V$  (calcolatore  $G$  è difficile quanto risolvere il problema di scattering). In altre parole la 1.113 differisce dalla (11) nel senso che la difficoltà è stata spostata dalla funzione d'onda ( $\Psi \rightarrow \Phi$ ), al Kernel ( $G_0 \rightarrow G$ ).

Il segno  $\pm$  su  $G$  definisce le modalità di integrazione, anche se in questo caso non esiste un'espressione generale come la 1.63.

In analogia agli sviluppi precedenti, è immediato dare un'espressione operatoriale formale per la  $G$ :

$$G^{(\pm)}(E) = \frac{1}{E^{(\pm)} - H}, \quad (1.115)$$

il suo spettro:

$$\frac{1}{(E^{(\pm)} - H)} |\mathbf{k}' \pm \rangle = \frac{1}{(E^{(\pm)} - E')} |\mathbf{k}' \pm \rangle, \quad (1.116)$$

e l'espressione formale della 1.113, soluzione formale della 1.108:

$$|\mathbf{k} \pm \rangle = |\mathbf{k} \rangle + \frac{1}{E^{(\pm)} - H} V |\mathbf{k} \rangle = [1 + G^{(\pm)}(E)V] |\mathbf{k} \rangle. \quad (1.117)$$

La 1.117 può però essere derivata anche direttamente dalla 1.108, nel modo seguente.

Consideriamo l'identità operatoriale:

$$\frac{1}{\Omega_1} - \frac{1}{\Omega_2} = \frac{1}{\Omega_1} (\Omega_2 - \Omega_1) \frac{1}{\Omega_2} = \frac{1}{\Omega_2} (\Omega_2 - \Omega_1) \frac{1}{\Omega_1}, \quad (1.118)$$

di immediata verifica, e appliciamola a:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^{(\pm)} - H} - \frac{1}{E^{(\pm)} - H_0} &= \frac{1}{E^{(\pm)} - H} (H - H_0) \frac{1}{E^{(\pm)} - H_0} = \\ &= \frac{1}{E^{(\pm)} - H} V \frac{1}{E^{(\pm)} - H_0}. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Risolvendo otteniamo l'espressione:

$$\frac{1}{E^{(\pm)} - H_0} = \frac{1}{E^{(\pm)} - H} - \frac{1}{E^{(\pm)} - H} V \frac{1}{E^{(\pm)} - H_0}, \quad (1.120)$$

che può esser messa nella forma:

$$G^\pm(E) = G_0^\pm(E) + G^\pm(E) V G_0^\pm(E). \quad (1.121)$$

Sostituiamo nella 1.108 otteniamo:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}\pm\rangle &= |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E^{(\pm)} - H} V |\mathbf{k}\pm\rangle - \frac{1}{E^{(\pm)} - H} V (|\mathbf{k}\pm\rangle - |\mathbf{k}\rangle) = \\ &= |\mathbf{k}\rangle + \frac{1}{E^{(\pm)} - H} V |\mathbf{k}\rangle, \end{aligned} \quad (1.122)$$

che è la 1.117. L'esempio è assai interessante: il calcolo formale è rapido e globale nell'operatore le condizioni al contorno.

### 1.3 Ampiezza di scattering, operatore di Moeller, matrice transizione e matrice di scattering

Il problema centrale della teoria dello scattering è il calcolo della sezione d'urto, e quindi dell'ampiezza di scattering. Prendiamo l'espressione 1.74 e scriviamola in forma astratta:

$$f(\widehat{kk'}) = -\frac{\mu}{4\pi} \int (2\pi)^{\frac{3}{2}} \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r}' \rangle d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r}' | V | \mathbf{k}+ \rangle (2\pi)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.123)$$

ovvero:

$$f(\widehat{kk'}) = -2\pi^2 \mu \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k}+ \rangle. \quad (1.124)$$

Questa espressione è molto interessante:  $f$  è proporzionale all'operatore  $V$ , braketato fra l'onda piana uscente, e lo stato stazionario outgoing. C'è una asimmetria nel membro di destra:  $V$  è braketato fra stati di natura diversa. Per migliorare formalmente quella espressione, diamo le seguenti definizioni.

Definiamo un operatore  $\Omega_+$  tramite l'equazione seguente:

$$|\mathbf{k}+\rangle = \Omega_+ |\mathbf{k}\rangle. \quad (1.125)$$

$\Omega$  è detto operatore di Möller: applicato a uno stato imperturbato, lo trasforma in uno stato stazionario outgoing.

Quindi definiamo l'operatore transizione  $T$  tramite l'equazione seguente:

$$T = V\Omega_+; |T\mathbf{k}\rangle = |V\mathbf{k}+\rangle \quad (1.126)$$

Con queste definizioni la 1.124 può essere riscritta come segue:

$$f(\widehat{kk'}) = -2\pi^2 \mu \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle = -2\pi^2 \mu T(\mathbf{k}, \mathbf{k}'). \quad (1.127)$$



L'ampiezza di scattering  $f$  è la rappresentazione momento della matrice  $T$ , fra gli stati finale e iniziale.

Tutto questo è elegante e vedremo che sarà anche utile, ma solo formale. Dalla 1.124 alla 1.127 la difficoltà è stata trasferita dal ket ( $|\mathbf{k}_+ \rangle \rightarrow |\mathbf{k} \rangle$ ) all'operatore ( $V \rightarrow T$ ). Inoltre vedremo più avanti che la asimmetria congenita nella 1.124 si ritrova in una congenita patologia di  $\Omega_+$ .

Gli operatori  $\Omega_+$  e  $T$  non sono noti come  $V$ , ma si devono ricavare da equazioni operatoriali che derivano dalla L.S.

Sostituendo la 1.125 nella 1.108 e 1.117 rispettivamente si ottiene:

$$\begin{aligned}\Omega_+|\mathbf{k} \rangle &= [1 + G_0^+(E)V\Omega_+]| \mathbf{k} \rangle, \\ \Omega_+|\mathbf{k} \rangle &= [1 + G^+(E)V]| \mathbf{k} \rangle.\end{aligned}\tag{1.128}$$

Queste sono equazioni fra ket, da cui si ricavano finalmente le equazioni fra operatori:

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= 1 + G_0^+V\Omega_+, \\ \Omega_+ &= 1 + G^+V,\end{aligned}\tag{1.129}$$

che sono rispettivamente l'equazione per  $\Omega$  e la sua soluzione formale<sup>2</sup>. Moltiplicando a sinistra per  $V$ , si ottengono le analoghe relazioni cui soddisfa  $T$ :

$$\begin{aligned}T &= V + VG_0^+T, \\ T &= V + VG^+V.\end{aligned}\tag{1.130}$$

A questo punto conviene approfondire il discorso sugli stati e operatori che abbiamo introdotto.

Premettiamo alcune definizioni e notazioni:

Se  $c$  è un numero complesso,  $|x \rangle, |y \rangle$  sono stati, e  $O =$  è un operatore, allora indichiamo con  $c^*$  il complesso coniugato di  $c$ , e con  $O^\dagger =$  il coniugato hermitiano di  $O =$ . Quest'ultimo è definito dalla condizione che, se

$$|y \rangle = O|x \rangle,\tag{1.131}$$

allora

$$\langle y | = \langle x | O^\dagger.\tag{1.132}$$

---

<sup>2</sup>Il significato delle eq. 1.129 sta proprio nelle equazioni precedenti: una relazione fra operatori implica l'equivalente relazione fra stati, per tutti gli stati dello spazio in cui gli operatori sono definiti.

Dato un qualsiasi  $|z\rangle$ , è

$$\langle z|y\rangle = \langle y|z\rangle^*, \quad (1.133)$$

e sostituendo le 1.131, 1.132:

$$\langle z|O|x\rangle = \langle x|O^\dagger|z\rangle^* = \langle O^\dagger z|x\rangle. \quad (1.134)$$

[Si distingua fra la croce latina del coniugato hermitiano e la croce greca di outgoing].

Formalmente, in linguaggio matriciale,

$$\mathbf{O}^\dagger = \widetilde{\mathbf{O}}^*, \quad (1.135)$$

ove  $\mathbf{O}$  significa matrice,  $\widetilde{\mathbf{O}}$  = matrice trasposta ( $\widetilde{O}_{ij} = O_{ji}$ ). Si ricordi l'importante proprietà, di verifica immediata:

$$(\mathbf{O}_1 \mathbf{O}_2 \dots \mathbf{O}_N)^\dagger = \mathbf{O}_N^\dagger \mathbf{O}_{N-1}^\dagger \dots \mathbf{O}_1^\dagger. \quad (1.136)$$

Ricordiamo infine le seguenti definizioni:  $O$  è autoaggiunto se

$$O = O^\dagger; \quad \langle x|O|y\rangle = \langle y|O^\dagger|x\rangle^* = \langle y|O|x\rangle^*. \quad (1.137)$$

Nel caso particolare  $x = y$ , se  $O$  è autoaggiunto

$$\langle x|O|x\rangle = \langle x|O|x\rangle^*. \quad (1.138)$$

Gli elementi diagonali dell'operatore autoaggiunto sono reali. Ovvero gli autovalori dell'operatore autoaggiunto sono reali.

$\mathbf{O}$  è unitario se

$$\mathbf{O}\mathbf{O}^\dagger = \mathbf{O}^\dagger\mathbf{O} = 1; \quad \mathbf{O}^\dagger = \mathbf{O}^{-1}. \quad (1.139)$$

La seconda equazione si ottiene moltiplicando la prima per  $\mathbf{O}^{-1}$ .

Finalmente  $\mathbf{O}$  è isometrico se

$$\mathbf{O}^\dagger\mathbf{O} = 1. \quad (1.140)$$

Ovviamente un operatore unitario è anche isometrico, ma non viceversa. Come faccia un operatore ad essere isometrico e non unitario è una questione delicata che verrà ripresa più avanti.

Esaminiamo alcuni degli operatori già introdotti:

$\mathbf{H}_0$  è autoaggiunto (vedi le equazioni 1.35, 1.36, 1.37).

Lo stesso vale per  $\mathbf{H}$  (nel suo spazio che è lo spazio  $|\mathbf{k}\pm\rangle$ ).

$$\langle \mathbf{k}'\pm |H|\mathbf{k}\pm\rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})E = \langle H\mathbf{k}'\pm | \mathbf{k}\pm\rangle, \quad (1.141)$$

dove però si è usata una ortonormalità che verrà dimostrata più avanti (1.150).

Il propagatore invece non è autoaggiunto:

$$\langle \mathbf{k}' | G_0^{(\pm)}(z) | \mathbf{k} \rangle = (z \pm i\epsilon - E)^{-1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (1.142)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | G_0^{(\pm)\dagger}(z) | \mathbf{k} \rangle &= \langle G_0^{(\pm)}(z) \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \\ &= \langle (z \pm i\epsilon - E)^{-1} \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = (z^* \mp i\epsilon - E')^{-1} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \end{aligned} \quad (1.143)$$

Attenzione: quando si estrae il numero dal bra, bisogna asteriscare!

Quindi <sup>3</sup>:

$$G_0^{(\pm)\dagger}(z) = G_0^{(\mp)}(z^*). \quad (1.144)$$

Adesso occupiamoci della normalizzazione dell'onda distorta.

Coniugiamo la 1.117:

$$\langle \mathbf{k}' \pm | = \langle \mathbf{k}' | + \langle \mathbf{k}' V \frac{1}{E' \mp - H} |, \quad (1.145)$$

avendo tenuto conto che il coniugato di  $|\frac{1}{E' \pm - H} V \mathbf{k}' \rangle$  è :

$$\langle \mathbf{k}' \left( \frac{1}{E' \pm - H} V \right)^\dagger = \langle \mathbf{k}' V^\dagger \left( \frac{1}{E' \pm - H} \right)^\dagger = \langle \mathbf{k}' V \frac{1}{E' \mp - H} |. \quad (1.146)$$

Chiudiamo questo bra sul ket  $|\mathbf{k} \pm \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' \pm | \mathbf{k} \pm \rangle &= \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \pm \rangle + \langle \mathbf{k}' | V \frac{1}{E' \mp - H} | \mathbf{k} \pm \rangle = \\ &= \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \pm \rangle + \frac{1}{E' \mp - E} \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \pm \rangle, \end{aligned} \quad (1.147)$$

avendo fatto operare a destra il propagatore completo. Adesso sostituiamo la 1.108 nel ket nel primo termine del terzo membro della 1.147:

$$\langle \mathbf{k}' \pm | \mathbf{k} \pm \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{k}' | \frac{1}{E \pm - H_0} V | \mathbf{k} \pm \rangle + \frac{1}{E' \mp - E} \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \pm \rangle. \quad (1.148)$$

Facciamo operare a sinistra il propagatore libero nel secondo termine del secondo membro (in questo caso si opera a sinistra come a destra lasciando

---

<sup>3</sup>Questo nel caso in cui la definizione di  $G_0$  sia estesa a una variabile complessa  $z$ . L'argomento della continuazione analitica nel piano complesso  $k = z$  verrà ripreso più avanti

invariato il  $\pm$ . Ciò che succede in realtà è che si inverte due volte, per fare il coniugato hermitiano e per estrarre il bra):

$$\langle \mathbf{k}' \pm | \mathbf{k} \pm \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle + \underbrace{\left( \frac{1}{E^\pm - E'} + \frac{1}{E'^\mp - E} \right)}_0 \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \pm \rangle, \quad (1.149)$$

e quindi

$$\langle \mathbf{k}' \pm | \mathbf{k} \pm \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (1.150)$$

L'onda distorta è normalizzata come l'onda piana. Questo richiede alcuni commenti.

$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \pm \rangle$  è la soluzione completa e contiene il potenziale, quindi ogni proprietà della  $\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \pm \rangle$  dovrebbe presupporre la specificazione del potenziale. Ciò non è vero per la 1.150, e il motivo è il seguente: la norma di  $\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \pm \rangle$  diverge (come la norma di  $\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle$ ), ed è definita solo nel senso le distribuzioni; quindi il contributo del finito (cui partecipa  $V$ ) è irrilevante. Questo è il senso di quella parte della dimostrazione in cui si verifica che il termine contenente  $V$  sparisce.

Per quanto riguarda la completezza delle  $|\mathbf{k} \pm \rangle$ , il discorso è più complicato.

L'onda piana  $|\mathbf{k} \rangle$ , autostato di  $H_0$ , forma una base ortonormale dello spazio di Hilbert  $H$ . Per quanto riguarda gli autostati di  $H$ , bisogna tener conto del fatto che, accanto allo spettro continuo  $|\mathbf{k} \pm \rangle$ , definito dalla

$$H|\mathbf{k} \pm \rangle = E|\mathbf{k} \pm \rangle, \quad (1.151)$$

ci può essere uno spettro  $|n \rangle$  di stati legati, definiti dalla

$$H|n \rangle = -B_n|n \rangle \quad (B_n > 0). \quad (1.152)$$

Lo spazio  $H$  si può scrivere come somma diretta del sottospazio  $\mathcal{B}$  (scandito da  $|n \rangle$ , bound states), più il sottospazio  $\mathcal{S}$  (scandito da  $|\mathbf{k} \pm \rangle$ , scattering states):

$$\mathcal{H} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{S}. \quad (1.153)$$

Ogni  $|n \rangle$  è ortogonale a ogni  $|\mathbf{k} \pm \rangle$ :

$$\langle n | \mathbf{k} \pm \rangle = \langle \mathbf{k} \pm | n \rangle = 0. \quad (1.154)$$

Ora fra i  $|\mathbf{k} \pm \rangle$  ci sono come casi particolari anche i  $|\mathbf{k} \rangle$ . Quando  $V \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{B} \rightarrow 0$  e  $\mathcal{H}$  ed  $\mathcal{S}$  tendono ambedue allo spazio scandito da  $H_0$ . Quindi possiamo dire che mentre  $|\mathbf{k} \rangle$  è definito in  $\mathcal{H}$ , ed ivi completo 1.29,  $|\mathbf{k} \pm \rangle$  non è completo in  $\mathcal{H}$ , ma solo in  $\mathcal{S}$ , e in  $\mathcal{H}$  vale l'equazione seguente:

$$\int |\mathbf{k} \pm \rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k} \pm | + \sum_n |n \rangle \langle n| = \mathbf{1}, \quad (1.155)$$

ovvero, più dettagliatamente:

$$\begin{aligned} \int |\mathbf{k}\pm\rangle d\mathbf{k} \langle \mathbf{k}\pm| &= \mathbf{1} \text{ in } \mathcal{S}, \\ \sum_n |n\rangle \langle n| &= \mathbf{1} \text{ in } \mathcal{B}, \\ \mathbf{1} \text{ in } \mathcal{S} \oplus \mathbf{1} \text{ in } \mathcal{B} &= \mathbf{1} \text{ in } \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Queste considerazioni hanno conseguenze drammatiche su  $\Omega_{\pm}$  che trasforma  $|\mathbf{k}\rangle$  in  $|\mathbf{k}\pm\rangle$ , e quindi mappa  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{S}$ .

Vediamo quali:

$\Omega_{\pm}$  è definito in  $\mathcal{H}$  e mappa  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{S}$ .

Definiamo  $\Omega_{\pm}^{\dagger}$  in base alla  $\Omega_{\pm}^{\dagger}|\mathbf{k}\pm\rangle = |\mathbf{k}\rangle$ .

$\Omega_{\pm}^{\dagger}$  è definito in  $\mathcal{S}$  e mappa  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{H}$ . E' evidente che su  $\mathcal{S}$ ,  $\Omega_{\pm}^{\dagger} = \Omega_{\pm}^{-1}$ .

Ma  $\langle n|\Omega_{\pm}|\mathbf{k}\rangle = \langle n|\mathbf{k}\pm\rangle = 0$  perchè  $\mathcal{B} \perp \mathcal{S}$ .

Quindi  $\langle \mathbf{k}|\Omega_{\pm}^{\dagger}|n\rangle = 0$  per tutti i  $\mathbf{k}$  in  $\mathcal{H}$  e per tutti gli  $n$  in  $\mathcal{B}$ . Quindi  $\Omega_{\pm}^{\dagger} = 0$  in  $\mathcal{B}$ .

In definitiva

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm}^{\dagger} &= \Omega_{\pm}^{-1} \text{ in } \mathcal{S} \\ &= 0 \text{ in } \mathcal{B} \\ &= \text{indefinito in } \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (1.157)$$

Ne consegue che

$$\Omega_{\pm}^{\dagger}\Omega_{\pm} = \mathbf{1} \text{ in } \mathcal{H} \quad (1.158)$$

perchè  $\Omega$  è definito in  $\mathcal{H}$ , mappa  $\mathcal{H}$  in  $\mathcal{S}$ , e successivamente  $\Omega^{\dagger}$  è definito in  $\mathcal{S}$ .

Invece  $\Omega\Omega^{\dagger}$  non è definito in  $\mathcal{H}$ , perchè non lo è  $\Omega_{\pm}^{\dagger}$ .

Quindi  $\Omega$  è solo isometrico e non unitario. Adesso definiamo la matrice di scattering  $S$ , tramite la relazione seguente:

$$\langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k} + \rangle = \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle \quad (1.159)$$

dove si intende che  $\mathbf{k}'$  è il momento finale ( $k' = k$ ). La matrice  $S$ , in rappresentazione momento fra stato finale e iniziale, dà l'overlap fra lo stato di scattering finale ingoing, e lo stato di scattering iniziale outgoing.

Adesso ricordiamo che

$$|\Omega_+\mathbf{k}\rangle = |\mathbf{k}+\rangle; |\Omega_-\mathbf{k}'\rangle = |\mathbf{k}'-\rangle; \langle \mathbf{k}'\Omega_-^{\dagger}| = \langle \mathbf{k}'-|. \quad (1.160)$$

Sostituendo nella 1.159:

$$\langle \mathbf{k}' | \Omega_-^\dagger \Omega_+ | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle, \quad (1.161)$$

e quindi:

$$S = \Omega_-^\dagger \Omega_+. \quad (1.162)$$

Partiamo dalla definizione 1.159, e calcoliamo l'overlap  $\langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k}_+ \rangle$ , con tecniche molto simili a quelle usate per il calcolo di  $\langle \mathbf{k}' + | \mathbf{k}_+ \rangle$ . Si tratta sempre di fare un uso combinato dell'equazione di L.S. e della sua soluzione formale:

$$\langle \mathbf{k}' - | = \langle \mathbf{k}' | + \langle \mathbf{k}' V \frac{1}{E'^+ - H} |, \quad (1.163)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k}_+ \rangle &= \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k}_+ \rangle + \langle \mathbf{k}' V \frac{1}{E'^+ - H} | \mathbf{k}_+ \rangle = \\ &= \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{k}' | \frac{1}{E^+ - H_0} V | \mathbf{k}_+ \rangle + \langle \mathbf{k}' V \frac{1}{E'^+ - H} | \mathbf{k}_+ \rangle = \\ &= \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle + \left( \frac{1}{E^+ - E'} + \frac{1}{E'^+ - E} \right) \langle \mathbf{k}' V | \mathbf{k}_+ \rangle. \end{aligned} \quad (1.164)$$

A questo punto la dimostrazione si scosta dalla precedente in quanto il termine fra parentesi tonde non è nullo (almeno sull'energy shell come vedremo), e quindi resta un overlap che dipende dall'interazione.

In generale vale la seguente identità:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = \pi \delta(x). \quad (1.165)$$

Consideriamo (con riferimento alla figura 1.4) la funzione

$$y = \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2}, \quad (1.166)$$

che gode delle seguenti proprietà:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} = 0 \text{ se } x \neq 0; \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} = \infty \text{ se } x = 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} y dx = \pi. \quad (1.167)$$

Si tratta di un altro modo per generare la delta di Dirac.

Allora:

$$\frac{1}{E - E' + i\epsilon} - \frac{1}{E - E' - i\epsilon} = -\frac{2i\epsilon}{(E - E')^2 + \epsilon^2} \rightarrow -2\pi i \delta(E - E'). \quad (1.168)$$

Quindi

$$\langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k}_+ \rangle = \langle \mathbf{k}' | 1 - 2\pi i \delta(E - E') T | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle, \quad (1.169)$$

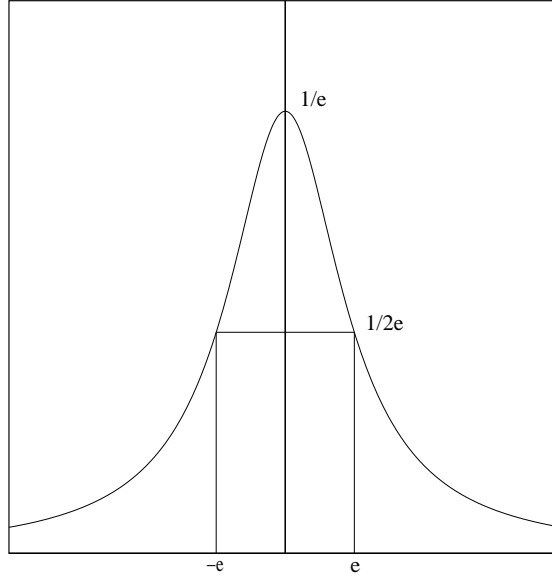


Figura 1.4: Grafico di  $\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2}$

avendo ricordato la definizione 1.126 della matrice transizione.

A proposito del secondo membro dell'equazione precedente, si osservi che anche da  $\langle \mathbf{k}' | \mathbf{1} | \mathbf{k} \rangle$  si può estrarre una  $\delta(E - E')$ . Quindi da  $\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle$  si può estrarre una  $\delta(E - E')$ , ovvero  $S$  è definito solo sull'energy shell.

Per confronto con la 1.159 si ricava la seguente fondamentale relazione fra matrice  $S$  e  $T$ :

$$S = 1 - 2\pi i \delta(E - E') T, \quad (1.170)$$

dove si intende che gli operatori vanno braketati fra  $\langle \mathbf{k}' |$  = momento finale, e  $| \mathbf{k} \rangle$  = momento iniziale. Con la seguente definizione di  $\delta$  di un operatore:

$$\delta(E - H_0) | \mathbf{k}' \rangle = \delta(E - E') | \mathbf{k}' \rangle, \quad (1.171)$$

possiamo riscrivere la 1.170 nei modi seguenti:

$$S = 1 - 2\pi i \delta(E - H_0) T \quad (1.172)$$

essendo  $E$  l'energia dello stato iniziale. Infatti:

$$\langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle - 2\pi i \delta(E - E') \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle. \quad (1.173)$$

Oppure possiamo scrivere

$$S = 1 - 2\pi i T \delta(E' - H_0), \quad (1.174)$$

essendo  $E'$  l'energia dello stato finale. In conclusione  $T$  può esser definito anche fuori dell'energy-shell, ma  $S$  contiene la  $\delta(E - E')$ , ovvero l'interazione avviene sull'energy-shell:  $\langle \mathbf{k} | S | \mathbf{k}' \rangle = 1$  se  $E \neq E'$ .

$S$  è unitaria. Verifica:

$$\begin{aligned}
& \langle \mathbf{k}' | S S^\dagger | \mathbf{k} \rangle = \\
& = \int \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k}'' \rangle d\mathbf{k}'' \langle \mathbf{k}'' | S^\dagger | \mathbf{k} \rangle = \int \langle \mathbf{k}' | S | \mathbf{k}'' \rangle d\mathbf{k}'' \langle \mathbf{k} | S | \mathbf{k}'' \rangle^* = \\
& = \int \langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k}'' + \rangle d\mathbf{k}'' \langle \mathbf{k} - | \mathbf{k}'' + \rangle^* = \int \langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k}'' + \rangle d\mathbf{k}'' \langle \mathbf{k}'' + | \mathbf{k} - \rangle = \\
& = \langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k} - \rangle - \sum_n \langle \mathbf{k}' - | n \rangle \langle n | \mathbf{k} - \rangle = \langle \mathbf{k}' - | \mathbf{k} - \rangle = \\
& = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle,
\end{aligned} \tag{1.175}$$

avendo fatto uso delle equazioni 1.134, 1.159, 1.155, 1.150, e del fatto che  $\mathcal{B}$  è ortogonale a  $\mathcal{S}$ . Finalmente dal confronto fra il primo e l'ultimo membro, e ripetendo la dimostrazione per  $S^\dagger S$ , si ottiene:

$$S S^\dagger = S^\dagger S = 1 \tag{1.176}$$

che è l'unitarietà.

Dall'unitarietà della matrice  $S$  discende il teorema ottico, che è l'unitarietà trasferita da  $S$  a  $T$  e calcolata in avanti (quindi il teorema ottico coinvolge l'ampiezza di scattering in avanti e la sezione d'urto integrale).

Dalla proprietà

$$\delta[f(x)] = \frac{\delta(x)}{df/dx}, \tag{1.177}$$

si ricava l'utile identità

$$\delta(E) = \frac{\mu}{2k} \delta(k), \tag{1.178}$$

[vedi le equazioni 1 e 1.7]. Adesso applichiamo l'unitarietà 1.176 alla forma 1.172:

$$[1 + 2\pi i \delta(E - H_0) T^\dagger][1 - 2\pi i \delta(E - H_0) T] = 1. \tag{1.179}$$

Abbiamo:

$$T^\dagger - T = 2\pi i T^\dagger \delta(E - H_0) T. \tag{1.180}$$

Questa è l'unitarietà in termini di matrice  $T$ . Adesso braketiamo la 1.180 fra  $\langle \mathbf{k} |$  e  $| \mathbf{k} \rangle$ . Ciò che troveremo (teorema ottico) sarà fisicamente rilevante, ma meno generale della 1.180. Brakettare fra  $\langle \mathbf{k} |$  e  $| \mathbf{k} \rangle$  significa considerare lo scattering in avanti [ $\theta = \widehat{k\mathbf{k}} = 0$ ].

$$\langle \mathbf{k} | T^\dagger - T | \mathbf{k} \rangle = 2\pi i \langle \mathbf{k} | T^\dagger \delta(E - H_0) T | \mathbf{k} \rangle. \tag{1.181}$$



Sviluppiamo i due membri separatamente:

$$\langle \mathbf{k}|T^\dagger - T|\mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k} \rangle^* - \langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k} \rangle = -2i \text{Im} \langle \mathbf{k}|T|\mathbf{k} \rangle = \frac{i}{\pi^2 \mu} \text{Im}[f(0^0)], \quad (1.182)$$

avendo ricordato la 1.127. Quindi:

$$\begin{aligned} & 2\pi i \langle \mathbf{k}|T^\dagger \delta(E - H_0)T|\mathbf{k} \rangle = \\ &= 2\pi i \int \langle \mathbf{k}|T^\dagger|\mathbf{k}' \rangle d\mathbf{k}' \langle \mathbf{k}'|\delta(E - H_0)|\mathbf{k}'' \rangle d\mathbf{k}'' \langle \mathbf{k}''|T|\mathbf{k} \rangle = \\ &= 2\pi i \int \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k} \rangle^* d\mathbf{k}' \frac{\mu}{2k} \delta(k - k'') \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}'') d\mathbf{k}'' \langle \mathbf{k}''|T|\mathbf{k} \rangle = \\ &= \frac{\mu\pi i}{k} \int |\langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k} \rangle|^2 \delta(k - k') k'^2 dk' d\hat{k}' = \\ &= \mu\pi i k \int |\langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k} \rangle|^2 d\hat{k}' = \frac{ik}{4\pi^3 \mu} \int |f(\widehat{kk'})|^2 d\hat{k}', \end{aligned} \quad (1.183)$$

essendo ricorsi ancora alla 1.127.

Adesso dalla 1.79 abbiamo:

$$\int |f(\widehat{kk'})|^2 d\hat{k}' = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \sigma(E) = \text{sezione d'urto integrale}. \quad (1.184)$$

E finalmente, mettendo a confronto i due membri:

$$4\pi \text{Im} f(0^0) = k\sigma. \quad (1.185)$$

Questo è il teorema ottico. E' importante perchè mette in relazione due osservabili: la sezione d'urto integrale, e l'ampiezza di scattering in avanti. Si applica allo scattering di neutroni perchè se c'è anche la coulombiana, i 2 membri divergono.

## 1.4 Serie perturbativa, approssimazione di Born e formula a due potenziali

La rappresentazione integrale è il punto di partenza per qualsiasi tipo di approssimazione alla teoria dello scattering.

Per ottenere la serie perturbativa si itera sulla 1.108:

$$|\mathbf{k}\pm \rangle = |\mathbf{k} \rangle + G_0^{(\pm)} V |\mathbf{k} \rangle + G_0^{(\pm)} V G_0^{(\pm)} V |\mathbf{k} \rangle + \dots \quad (1.186)$$

Il 1° termine dà l'approssimazione zero in assenza di interazione:

$$|\mathbf{k}\pm\rangle \approx |\mathbf{k}\rangle. \quad (1.187)$$

Il passo successivo è l'approssimazione di Born

$$|\mathbf{k}\pm\rangle \approx |\mathbf{k}\rangle + G_0^\pm V |\mathbf{k}\rangle. \quad (1.188)$$

Esplicitando per le outgoing, abbiamo:

$$\Psi^{(+)}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} - \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{e^{i\mathbf{k}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} V(r') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} d\mathbf{r}', \quad (1.189)$$

La regola è quella di sostituire  $\Psi \rightarrow \Phi$  (ovvero  $\Omega \rightarrow 1$ ,  $T \rightarrow V$ ) all'interno dell'integrale. Così per esempio l'ampiezza di scattering 1.127 diventa in approssimazione di  $B$ :

$$f(\widehat{k}\widehat{k}') = -2\pi^2 \mu \langle \mathbf{k}' | V | \mathbf{k} \rangle = -\frac{\mu}{4\pi} \int e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}'} V(r') d\mathbf{r}'. \quad (1.190)$$

L'ampiezza di scattering in approssimazione di  $B$  è data dall'elemento di matrice di  $V$  (anzichè di  $T$ ) in rappresentazione momento, e quindi è la trasformata di Fourier del potenziale.

L'integrale sugli angoli si esegue facilmente. Per eseguire l'integrale assumiamo  $\mathbf{k}-\mathbf{k}'=\mathbf{q}$  (momento trasferito)= asse  $z$ ;  $\widehat{k}\widehat{k}'=\theta$  = angolo di scattering. Si ottiene:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= -\frac{\mu}{4\pi} 2\pi \int_0^\infty r'^2 dr' V(r') \int_{-1}^1 d(\cos \widehat{q}\widehat{r}') e^{iqr' \cos \widehat{q}\widehat{r}'} = \\ &= -\frac{\mu}{q} \int_0^\infty V(r') \sin \widehat{q}\widehat{r}' r' dr'. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Finalmente, siccome  $q=2k \sin(\theta/2)$ , abbiamo:

$$f(\theta) = -\frac{\mu}{2k \sin \theta/2} \int_0^\infty V(r) \sin(2kr \sin(\theta/2)) r dr, \quad (1.192)$$

ampiezza di scattering in approssimazione di Born. L'approssimazione di  $B$  è buona solo se l'interazione è debole rispetto all'energia in gioco, e quindi è scarsamente utile in fisica nucleare. Di grande utilità è invece la formula a due potenziali (o formula di Gellmann-Goldberger), che vedremo adesso, e l'approssimazione che se ne ricava.

Supponiamo di poter scomporre l'interazione:

$$V = V_0 + V_1, \quad (1.193)$$

in modo che sia nota la soluzione del problema imperturbato ( $V_0$ ). Supponiamo nota la funzione d'onda imperturbata

$$|\mathbf{k} \pm 0 \rangle = |\mathbf{k} \rangle + \frac{1}{E^\pm - H_0 - V_0} V_0 |\mathbf{k} \rangle . \quad (1.194)$$

Il problema si può allora sviluppare a due stadi, esprimendo la soluzione completa  $|\mathbf{k} \pm \rangle$ , in funzione della soluzione imperturbata  $|\mathbf{k} \pm 0 \rangle$ :

$$|\mathbf{k} \pm \rangle = |\mathbf{k} \pm 0 \rangle + \frac{1}{E^\pm - H_0 - V_0 - V_1} V_1 |\mathbf{k} \pm 0 \rangle . \quad (1.195)$$

La 1.195 è intuitiva, e si ottiene alla stessa stregua della 1.117, suddividendo l'hamiltoniano completo nella forma  $H = (H_0 + V_0) + V_1$ , anzichè  $H = H_0 + (V_0 + V_1)$ . Bisogna quindi operare le sostituzioni formali (rispetto alla 1.117):

$$|\mathbf{k} \rangle \text{ (onda piana)} \rightarrow |\mathbf{k} \pm 0 \rangle \text{ (onda distorta imperturbata)},$$

$$H_0 \text{ (ham. cinetico)} \rightarrow H_0 + V_0 \text{ (ham. imperturbato)},$$

$$V (= H - H_0) \rightarrow V_1 (= H - H_0 - V_0) = \text{perturbazione},$$

mentre ovviamente

$$H \rightarrow H \text{ (ham. completo)},$$

$$|\mathbf{k} \pm \rangle \rightarrow |\mathbf{k} \pm \rangle \text{ (soluzione completa)}.$$

Scriviamo la matrice  $T$ :

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | V_0 + V_1 | \mathbf{k} + \rangle = \langle \mathbf{k}' | V_0 | \underline{\mathbf{k} \pm} \rangle + \langle \underline{\mathbf{k}'} | V_1 | \mathbf{k} + \rangle, \quad (1.196)$$

e dimostriamo il notevole teorema (formula a due potenziali):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle &= \langle \mathbf{k}' | V_0 | \underline{\mathbf{k} + 0} \rangle + \langle \underline{\mathbf{k}' - 0} | V_1 | \mathbf{k} + \rangle = \\ &= \langle \mathbf{k}' | T_0 | \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{k}' - 0 | V_1 | \mathbf{k} + \rangle . \end{aligned} \quad (1.197)$$

La formula a 2 potenziali (2<sup>o</sup> membro della 1.197, mentre il 3<sup>o</sup> membro dà solo la definizione di matrice  $T$  imperturbata), rappresenta solo un riarrangiamento di termini rispetto alla 1.196, ed è esatta. Da una parte  $|\mathbf{k} + \rangle$  si semplifica in  $|\mathbf{k} + 0 \rangle$ ; dall'altra  $\langle \mathbf{k}' |$  si complica in  $\langle \mathbf{k}' - 0 |$ . Ma siccome la soluzione del problema imperturbato è nota per ipotesi, complessivamente ci si guadagna.

Come si è già detto il risultato 1.197 è esatto (una semplificazione è compensata da una complicazione: non ci sono miracoli). Ma se  $V_1 \ll V_0$ ,

cioè se  $V_1$  è effettivamente una perturbazione, allora l'approssimazione (di tipo Born), da introdurre nella 1.197 è ovvia:

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \approx \langle \mathbf{k}' | T_0 | \mathbf{k} \rangle + \langle \mathbf{k}' - 0 | V_1 | \mathbf{k} + 0 \rangle. \quad (1.198)$$

Questa formula è nota come DWBA (Distorted Wave Born Approximation), anche se con DWBA si intende più comunemente un'approssimazione più complessa, che si usa in teoria delle reazioni nucleari con riarrangiamento. La locuzione "onde distorte", si riferisce al fatto che il potenziale perturbativo  $V_1$  va proiettato non fra stati di onda piana, ma fra stati di onda distorta (in modo noto) dal potenziale imperturbato  $V_0$ .

I vantaggi della DWBA rispetto alla BA sono evidenti: per la validità della BA è necessario che il potenziale sia perturbativo rispetto al termine cinetico (questa è una condizione oggettiva; se non è verificata non c'è nulla da fare). Nella DWBA bisogna che sia  $V_1 \ll V_0$ , e questo si può ottenere con un'opportuna separazione di  $V$ .

Per verificare la 1.197, bisogna sostituire gli stati sottolineati nelle 1.196 e 1.197.

Definiamo

$$H = H_0 + V = H'_0 + V_1; \quad V = V_0 + V_1; \quad H'_0 = H_0 + V_0, \quad (1.199)$$

e scriviamo per chiarezza tutte le L.S., relative ai diversi modi di separazione del problema:

$$|\mathbf{k} \pm \rangle = |\mathbf{k} \rangle + \frac{1}{E^\pm - H_0} V |\mathbf{k} \pm \rangle, \quad (1.200)$$

$$|\mathbf{k} \pm \rangle = |\mathbf{k} \rangle + \frac{1}{E^\pm - H} V |\mathbf{k} \rangle, \quad (1.201)$$

$$|\mathbf{k} \pm \rangle = |\mathbf{k} \pm 0 \rangle + \frac{1}{E^\pm - H'_0} V_1 |\mathbf{k} \pm \rangle, \quad (1.202)$$

$$|\mathbf{k} \pm \rangle = |\mathbf{k} \pm 0 \rangle + \frac{1}{E^\pm - H} V_1 |\mathbf{k} \pm 0 \rangle, \quad (1.203)$$

$$|\mathbf{k} \pm 0 \rangle = |\mathbf{k} \rangle + \frac{1}{E^\pm - H_0} V_0 |\mathbf{k} \pm 0 \rangle, \quad (1.204)$$

$$|\mathbf{k} \pm 0 \rangle = |\mathbf{k} \rangle + \frac{1}{E^\pm - H'_0} V_0 |\mathbf{k} \rangle, \quad (1.205)$$

Dalla 1.205:

$$|\mathbf{k}' \rangle = |\mathbf{k}' - 0 \rangle - \frac{1}{E' - H_0 - V_0} V_0 |\mathbf{k}' \rangle \quad (1.206)$$

( $E = E'$  perchè siamo sull'energy shell).

Passiamo al bra:

$$\langle \mathbf{k}' | = \langle \mathbf{k}' - 0 | - \langle \mathbf{k}' | V_0 \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} |. \quad (1.207)$$

Sostituiamo la 1.203 nel primo termine e la 1.207 nel secondo termine del terzo membro della 1.196.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle = & \langle \mathbf{k}' | V_0 | \mathbf{k} + 0 \rangle + \langle \mathbf{k}' | V_0 \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0 - V_1} V_1 | \mathbf{k} + 0 \rangle + \\ & + \langle \mathbf{k}' - 0 | V_1 | \mathbf{k} + \rangle - \langle \mathbf{k}' | V_0 \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} V_1 | \mathbf{k} + \rangle. \end{aligned} \quad (1.208)$$

Adesso dimostrare la 1.197 equivale a dimostrare che

$$\frac{1}{E^+ - H_0 - V_0 - V_1} V_1 | \mathbf{k} + 0 \rangle = \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} V_1 | \mathbf{k} + \rangle. \quad (1.209)$$

Dall'identità 1.118, 1<sup>o</sup> e 3<sup>o</sup> membro, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0 - V_1} - \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} = \\ = \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} V_1 \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0 - V_1}, \end{aligned} \quad (1.210)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0 - V_1} V_1 | \mathbf{k} + 0 \rangle & = \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} V_1 | \mathbf{k} + 0 \rangle + \\ + \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} V_1 (| \mathbf{k} + \rangle - | \mathbf{k} + 0 \rangle) & = \frac{1}{E^+ - H_0 - V_0} V_1 | \mathbf{k} + \rangle, \end{aligned} \quad (1.211)$$

che dimostra la 1.209, e quindi la 1.197 (l'uguaglianza fra primo e secondo membro si dimostra in base alla 1.203).

## Capitolo 2

# La decomposizione su stati di momento angolare

### 2.1 Generalità

La teoria formale dello scattering fornisce relazioni operatoriali compatte.

Se il potenziale è centrale, il momento angolare è una costante del moto.

La teoria formale è efficace perchè esiste la ricetta per attuare lo sviluppo multipolare (in autostati di momento angolare) a qualsiasi stadio intermedio della teoria.

La chiave per la ricetta, è essenzialmente lo sviluppo multipolare dell'onda piana, come vedremo più avanti.

Il laplaciano 1.17 si può scrivere nella forma

$$\nabla^2 = \nabla_r^2 - \frac{1}{r^2}L^2, \quad (2.1)$$

dove

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{k} = -i\mathbf{r} \times \nabla \quad (2.2)$$

(vedi 1.10), è l'operatore momento angolare. È un operatore hermitiano, che soddisfa alle regole di commutazione  $[L_x, L_y] = iL_z$  e cicliche. Come è noto, per un operatore siffatto esiste una rappresentazione standard in cui sono contemporaneamente diagonali  $\mathbf{L}^2$  ed  $L_z$ . Le corrispondenti equazioni agli autovalori assumono la forma seguente:

$$\begin{aligned} L^2 Y_l^m(\hat{r}) &= l(l+1)Y_l^m(\hat{r}), \\ L_z Y_l^m(\hat{r}) &= mY_l^m(\hat{r}), \end{aligned} \quad (2.3)$$

dove  $l = 0, 1, 2, \dots$ , e, per ogni  $l$ ,  $m = l, l-1, \dots, -l+1, -l$ . Gli autostati contemporanei di  $\mathbf{L}^2$  ed  $L_z$ , sono le armoniche sferiche  $Y_l^m$ , che (secondo le convenzioni di Condon e Shortly), si definiscono nel modo seguente.

Per  $m \geq 0$  si scrive

$$Y_l^m(\hat{r}) = (-)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\theta) e^{im\varphi}, \quad (2.4)$$

mentre per  $m < 0$  si usa la formula

$$Y_l^{-m}(\hat{r}) = (-)^m Y_l^{m*}(\hat{r}). \quad (2.5)$$

I polinomi associati di Legendre  $P_l^m(\theta)$  si calcolano in base alla

$$P_l^m(\theta) = \sin^{\frac{m}{2}} \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l^m(\theta), \quad (2.6)$$

e i polinomi di Legendre:

$$P_l(\theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{d(\cos \theta)^l} (-\sin^2 \theta)^l. \quad (2.7)$$

Le  $Y$  così definite formano un set ortonormale completo:

$$\begin{aligned} \int Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) d\hat{r} &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \sum_{lm} Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_l^m(\hat{r}') &= \delta(\hat{r} - \hat{r}'), \end{aligned} \quad (2.8)$$

dove si intende che  $l = 0, 1, \dots$  e  $m = l, l-1, \dots, -l$ . Possiamo introdurre anche per gli autostati di momento angolare una scrittura formale, definendo il ket  $|lm\rangle$  in modo che la sua rappresentazione  $\langle \hat{r} |$  sia l'armonica sferica:

$$\langle \hat{r} | lm \rangle = Y_l^m(\hat{r}). \quad (2.9)$$

E' immediato verificare che le condizioni 2.8 implicano le seguenti relazioni di ortonormalità e completezza nello spazio  $lm$  :

$$\begin{aligned} \langle lm | l'm' \rangle &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \\ \sum_{lm} |lm\rangle \langle lm| &= \mathbf{1}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

e nello spazio  $\hat{r}$ :

$$\begin{aligned} \langle \hat{r} | \hat{r}' \rangle &= \delta(\hat{r} - \hat{r}'), \\ \int |\hat{r}\rangle d\hat{r} \langle \hat{r}| &= \mathbf{1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Le equazioni 2.10, 2.11 mettono in maggior evidenza una proprietà già insita nelle 2.8: la dissimmetria degli spazi duali  $lm$  ed  $\hat{r}$ , l'uno discreto, l'altro continuo.

Per concludere queste definizioni introduttive, riassumiamo alcune ben note proprietà delle  $Y$ :

–il subset  $Y_l^0$  è proporzionale ai polinomi di  $L$ :

$$Y_l^0(\theta) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\theta). \quad (2.12)$$

–Le condizioni 2.8 determinano la normalizzazione dei  $P_l$ :

$$\int_{-1}^1 P_l(\theta) P_{l'}(\theta) d(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}. \quad (2.13)$$

–In onda  $S$  deve essere ovviamente  $m = 0$ , e la  $Y$  è una costante determinata dalla normalizzazione (caso di simmetria sferica)

$$Y_0^m = \frac{\delta_{m0}}{\sqrt{4\pi}}. \quad (2.14)$$

–Teorema di addizione delle armoniche sferiche:

$$\begin{aligned} \sum_m Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}) &= \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_l^0(\widehat{kr}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\widehat{kr}), \end{aligned} \quad (2.15)$$

dove  $\hat{k}$  ed  $\hat{r}$  sono due versori, ovvero due punti sulla sfera unitaria, e  $\widehat{kr}$  è l'angolo fra i due versori. Questa è l'operazione di contrazione di due tensori sferici irriducibili, che dà uno scalare invariante per rotazioni del riferimento. Infatti ruotando il riferimento, cambiano separatamente  $\hat{k}$  ed  $\hat{r}$ , ma resta invariato l'angolo fra essi compreso  $\widehat{kr}$ .

–Regola di accoppiamento delle armoniche sferiche:

$$\begin{aligned} Y_l^m(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) &= \sum_L \sqrt{\frac{(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2L+1)}} \\ &< lm l' m' | ll' L, m+m' \rangle \langle l 0 l' 0 | ll' L 0 \rangle Y_L^{m+m'}(\hat{r}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

dove si sono introdotti i coefficienti di Clebsch-Gordan, e dove si intende che  $L = l+l', l+l'-1 \dots |l-l'|$ . Questo è un prodotto tensore fra due armoniche sferiche di stesso argomento.

Consideriamo l'equazione libera 1.15 di  $S$ .



Come al solito partiamo dal problema imperturbato per costruire gli elementi fondamentali con cui rappresenteremo tutto il resto.

Usando la 2.1 possiamo scrivere

$$(\nabla_r^2 - \frac{L^2}{r^2} + k^2)\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0. \quad (2.17)$$

Sviluppiamo  $\Phi$  in armoniche sferiche. Anzi, siccome  $\mathbf{k} \equiv$  asse  $z$ , e c'è simmetria cilindrica, bastano le  $Y^0$ :

$$\Phi(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_l \frac{\varphi_l(k, r)}{kr} Y_l^0(\theta). \quad (2.18)$$

Sostituiamo nella 2.17, e ricordiamo la prima delle 2.3 e la 1.17. Isoliamo un termine generico della sommatoria tramite integrazione sugli angoli e uso dell'ortonormalità 2.8. Usiamo la proprietà

$$\nabla_r^2 \frac{\varphi_l}{r} = \frac{1}{r} \frac{d^2 \varphi_l}{dr^2}, \quad (2.19)$$

ed otteniamo finalmente l'equazione radiale libera di  $S$ :

$$\frac{d^2 \varphi_l}{dr^2} + \left( k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \varphi_l = 0. \quad (2.20)$$

Il termine  $-\frac{l(l+1)}{r^2}$  accanto a  $k^2$  è un potenziale aggiuntivo dipendente da  $l$ , che discrimina fra loro le componenti di momento angolare. Esso prende il nome di potenziale centrifugo.

La 2.20 è un'equazione differenziale, lineare, del 2° ordine. Per rappresentare le soluzioni della 2.20, noi faremo riferimento alle funzioni di Bessel-Riccati  $F$ , e Riccati-Newmann  $G$ :

$$\begin{aligned} F_l(kr) &= \sqrt{\frac{kr\pi}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(kr) = kr j_l(kr), \\ G_l(kr) &= \sqrt{\frac{kr\pi}{2}} (-)^l J_{-l-\frac{1}{2}}(kr) = kr n_l(kr). \end{aligned} \quad (2.21)$$

dove le  $J_l$  sono le ordinarie funzioni di Bessel, e  $j_l$  sono le funzioni di Bessel sferiche.

Le  $F$  e  $G$  si possono calcolare tramite le seguenti formule ricorrenti:

$$\begin{aligned} F_0 &= \sin kr & ; & & G_0 &= \cos kr \\ F_1 &= \frac{\sin kr}{kr} - \cos kr & ; & & G_1 &= \frac{\cos kr}{kr} + \sin kr \\ F_l &= \frac{2l-1}{kr} F_{l-1} - F_{l-2} & ; & & G_l &= \frac{2l-1}{kr} G_{l-1} - G_{l-2} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Le  $F$  sono regolari e le  $G$  irregolari all'origine:

$$F_l \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(kr)^{l+1}}{(2l+1)!!} ; G_l \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(2l-1)!!}{(kr)^l}. \quad (2.23)$$

Il comportamento asintottico delle  $F$  e  $G$  è quello di sin e cos, con uno sfasamento dipendente da  $l$ :

$$F_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sin(kr - l\pi/2) ; G_l \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \cos(kr - l\pi/2). \quad (2.24)$$

In onda  $S(l=0)$  la 2.20 è l'equazione dell'oscillatore armonico, ed  $F$  e  $G$  sono sin e cos (vedi la prima delle 2.22). E' utile avere anche le soluzioni che si comportano come  $e^{\pm ikr}$  in onda  $S$ : sono le soluzioni che noi chiameremo outgoing ( $O^+$ ) e ingoing ( $O^-$ ) rispettivamente:

$$\begin{aligned} O_l^+ &= G_l + iF_l = krh_l^- = i\sqrt{\frac{kr\pi}{2}} H_{l+1/2}^{(1)} \\ O_l^- \equiv O_l^{+*} &= G_l - iF_l = krh_l^+ = -i\sqrt{\frac{kr\pi}{2}} H_{l+1/2}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Queste sono anche dette di Riccati-Hankel.

Per queste nuove funzioni è immediato derivare le formule ricorrenti:

$$\begin{aligned} O_0^\pm &= e^{\pm ikr}, \\ O_1^\pm &= \left( \frac{1}{kr} \mp i \right) e^{\pm ikr}, \\ O_l^\pm &= \frac{2l-1}{kr} O_{l-1}^\pm - O_{l-2}^\pm, \end{aligned} \quad (2.26)$$

e gli andamenti asintottici:

$$O_l^\pm \xrightarrow{r \rightarrow 0} \frac{(2l-1)!!}{(kr)^l} \xrightarrow{r \rightarrow 0} G_l ; O_l^\pm \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{\pm i(kr - l\pi/2)} \quad (2.27)$$

Per comodità diamo le relazioni inverse delle 2.25:

$$G_l = \frac{O_l^+ + O_l^-}{2} ; F_l = \frac{O_l^+ - O_l^-}{2i} \quad (2.28)$$

che sono formalmente identiche alle formule di Eulero.

Per finire sarà utile scrivere il Wronskiano (indipendente da  $r$ ):

$$W_l = G_l \frac{dF_l}{dr} - F_l \frac{dG_l}{dr} = k. \quad (2.29)$$

Quindi l'equazione 2.17 è soddisfatta se nella 2.18 si pone una generica espressione del tipo

$$\varphi_l = A_l F_l + B_l G_l. \quad (2.30)$$

Ma il nostro scopo è più ambizioso: noi abbiamo definito in  $R^3$  lo stato  $|\mathbf{k}\rangle$  che è l'onda piana normalizzata, e vogliamo connettere questo con gli stati  $|\hat{k}\rangle, |lm\rangle$  che definiscono lo sviluppo multipolare. Introduciamo in  $R^3$  lo stato  $|\rho lm\rangle$  così definito dalla sua proiezione sulla coordinata:

$$\langle \mathbf{r} | \rho lm \rangle = \frac{\delta(r - \rho)}{r} \langle \hat{r} | lm \rangle = \frac{\delta(r - \rho)}{r} Y_l^m(\hat{r}). \quad (2.31)$$

Analogamente introduciamo  $|plm\rangle$  nello spazio dei momenti:

$$\langle \mathbf{k} | plm \rangle = \frac{\delta(p - k)}{k} \langle \hat{k} | lm \rangle = \frac{\delta(p - k)}{k} Y_l^m(\hat{k}). \quad (2.32)$$

Le condizioni di ortonormalità e completezza su  $|\mathbf{r}\rangle$  e  $|\mathbf{k}\rangle$  si traducono nelle seguenti relazioni per gli stati testè definiti:

$$\langle \rho lm | \rho' l' m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\rho - \rho'); \quad \langle plm | p' l' m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(p - p'), \quad (2.33)$$

$$\sum_{lm} \int |\rho lm\rangle d\rho \langle \rho lm| = \sum_{lm} \int |plm\rangle dp \langle plm| = \mathbf{1}. \quad (2.34)$$

Inserendo la 2.34 nella  $\langle \mathbf{r} | \mathbf{r}' \rangle$ , e sviluppando, si ottiene la ben nota identità

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\hat{r} - \hat{r}') \frac{\delta(r - r')}{rr'}. \quad (2.35)$$

Adesso scriviamo l'espressione dell'onda piana, introducendo due completezze di tipo 2.34:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle &= \sum_{lml'm'} \int \langle \mathbf{r} | \rho lm \rangle d\rho \langle \rho lm | pl' m' \rangle dp \langle pl' m' | \mathbf{k} \rangle = \\ &= \sum_{lml'm'} Y_l^m(\hat{r}) \frac{\langle rlm | kl' m' \rangle}{kr} Y_{l'}^{m'*}(\hat{k}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Calcoliamo il braket  $\langle rlm | kl' m' \rangle$ . Osserviamo anzitutto che per l'invarianza rotazionale deve essere:

$$\langle rlm | kl' m' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \Phi_l(kr). \quad (2.37)$$

Infatti, se e solo se quella è la forma, l'onda piana si scrive (grazie alla 2.15):

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \sum_l \frac{\Phi_l(kr)}{kr} \sum_m Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}) = \sum_l \frac{\Phi_l(kr)}{kr} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} Y_l^0(\widehat{kr}), \quad (2.38)$$

che è invariante per rotazione. Se imponiamo a  $\Phi_l(kr)$ , soluzione dell'equazione radiale di  $S$ , di essere regolare all'origine, deve essere:

$$\Phi_l(kr) = A_l F_l(kr), \quad (2.39)$$

dove  $A$  è una costante complessa.

Calcoliamo adesso  $A_l$  tramite la normalizzazione dell'onda piana 1.26, ovvero:

$$\int \langle \mathbf{k}' | \mathbf{r} \rangle d\mathbf{r} \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}' | \mathbf{k} \rangle. \quad (2.40)$$

Sostituendo abbiamo:

$$\sum_{lm\lambda\mu} A_l^* A_\lambda \int dr d\hat{r} \frac{F_l(k'r) F_l(kr)}{k'k} Y_l^{m*}(\hat{r}) Y_l^m(\hat{k}') Y_\lambda^\mu(\hat{r}) Y_\lambda^{\mu*}(\hat{k}) = \frac{\delta(k' - k)}{k^2} \delta(\hat{k}' - \hat{k}). \quad (2.41)$$

Tenendo conto della prima delle 2.8 e della normalizzazione

$$\int F_l(kr) F_l(k'r) dr = \frac{\pi}{2} \delta(k - k'), \quad (2.42)$$

otteniamo:

$$\frac{\pi}{2} \sum_{lm} |A_l|^2 Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{k}') = \delta(\hat{k}' - \hat{k}), \quad (2.43)$$

che, data la seconda delle 2.8, impone  $A_l = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$  a meno di una fase. Affinchè sia soddisfatta la time reversal questa fase non può essere 1, ma deve essere presa uguale a  $i^l = e^{il\frac{\pi}{2}}$ . Abbiamo quindi:

$$\langle rlm | k'l'm' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l F_l(kr), \quad (2.44)$$

ovvero:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{lm} i^l Y_l^m(\hat{r}) \frac{F_l(kr)}{kr} Y_l^{m*}(\hat{k}). \quad (2.45)$$

Questo corrisponde ai noti sviluppi dell'onda piana:

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= \frac{4\pi}{kr} \sum_{lm} i^l F_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}), \\ e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{1}{kr} \sum_l i^l F_l(kr) Y_l^0(\hat{k}\hat{r}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Se introduciamo nell'onda piana una sola completezza in  $\rho lm$  otteniamo:

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = \sum_{lm} \int \langle \mathbf{r} | \rho lm \rangle d\rho \langle \rho lm | \mathbf{k} \rangle = \sum_{lm} Y_l^m(\hat{r}) \frac{\langle rlm | \mathbf{k} \rangle}{r}. \quad (2.47)$$

Confrontando con la 2.36 si ottiene

$$\langle rlm|\mathbf{k}\rangle = \sum_{l'm'} \frac{\langle rlm|k'l'm'\rangle}{k} \langle l'm'|\hat{k}\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l \frac{F_l(kr)}{k} Y_l^{m*}(\hat{k}). \quad (2.48)$$

È interessante scrivere l'analogia della 2.48:

$$\langle klm|\mathbf{r}\rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{-l} \frac{F_l(kr)}{r} Y_l^{m*}(\hat{r}). \quad (2.49)$$

Ma la cosa più interessante è ricavare dai primi due membri della 2.48 lo sviluppo multipolare formale del ket  $|\mathbf{k}\rangle$ :

$$|\mathbf{k}\rangle = \sum_{lm} |klm\rangle \frac{1}{k} \langle lm|\hat{k}\rangle. \quad (2.50)$$

Vale ovviamente l'analogia per  $|\mathbf{r}\rangle$ :

$$|\mathbf{r}\rangle = \sum_{lm} |rlm\rangle \frac{1}{r} \langle lm|\hat{r}\rangle. \quad (2.51)$$

Ricordando la 2.18 possiamo concludere che se con  $\Phi$  indichiamo non una generica soluzione dell'equazione libera di  $S$ , ma l'onda piana  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ , allora  $\phi_l$  non è una generica soluzione dell'equazione radiale 2.17, ma è legata alla soluzione regolare  $F_l$  nel modo seguente:

$$\phi_l(kr) = \sqrt{4\pi(2l+1)} F_l(kr) i^l. \quad (2.52)$$

Le definizioni 2.18, 2.52 sono del tutto equivalenti alle 2.36, 2.44.

Per finire vediamo meglio le relazioni formali, a livello dell'equazione di Schrödinger.

Riscriviamo l'equazione formale 1.39:

$$H_0|\mathbf{r}\rangle = -\frac{\nabla^2(\mathbf{r})}{\mu}|\mathbf{r}\rangle. \quad (2.53)$$

Sviluppiamo  $|\mathbf{r}\rangle$  tramite la 2.51 ed otteniamo:

$$H_0|\mathbf{r}\rangle = \sum_{lm} H_0|rlm\rangle \frac{1}{r} \langle lm|\hat{r}\rangle = \sum_{lm} \frac{1}{r} H_{0l}|rlm\rangle \langle lm|\hat{r}\rangle, \quad (2.54)$$

avendo posto:

$$H_{0l}(r) = \left[ -D_r^2 + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \frac{1}{\mu}. \quad (2.55)$$

Adesso il formalismo è pronto. Avendo a disposizione da un lato la soluzione generale globale di  $(E - H)\psi = 0$ , e dall'altro le tecniche di sviluppo multipolare, tutto diventa algebra, e l'unica libertà ancora aperta è il modo di definire le proiezioni  $l$ -esime delle varie grandezze.

## 2.2 Equazione di Schroedinger completa e funzione d'onda

Sviluppiamo la soluzione fisica come la soluzione imperturbata (2.48):

$$|\mathbf{k}+\rangle = \sum_{lm} |k+lm\rangle \langle lm|\hat{k}\rangle \frac{1}{k}. \quad (2.56)$$

Proiettiamo sulle coordinate:

$$\langle \mathbf{r}|\mathbf{k}+\rangle = \sum_{lm,l'm'} \langle \hat{r}|lm\rangle \frac{1}{r} \langle rlm|k+l'm'\rangle \frac{1}{k} \langle l'm'|\hat{k}\rangle, \quad (2.57)$$

e definiamo l'autostato radiale per analogia con la 2.44, in modo da avere una soluzione radiale  $u_l^+(kr)$  che tende a  $F_l$  quando  $V \rightarrow 0$ :

$$\langle rlm|k+l'm'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l u_l^{(+)}(kr). \quad (2.58)$$

E' facile estendere alle soluzioni radiali compatte, le proprietà di ortonormalità già dimostrate per le corrispondenti soluzioni radiali libere (2.33, 2.42) e precisamente:

$$\langle k+lm|k'+l'm'\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta(k-k'), \quad (2.59)$$

$$\int u_l^*(kr)u_l(k'r)dr = (\pi/2)\delta(k-k'), \quad (2.60)$$

ricordando la convenzione generale che, ove non venga specificato il  $(\pm)$ , si intende che vale il  $(+)$ .

Osserviamo che nella 2.42  $F_l$  non ha l'asterisco perchè è reale, mentre  $u$  è in generale complesso.

L'autofunzione  $u_l(kr)$  è soluzione dell'equazione radiale completa di Schroedinger

$$[D_r^2 - \frac{l(l+1)}{r} - \mu V(r) + k^2]u_l(k,r) = 0. \quad (2.61)$$

## 2.3 Sviluppo delle matrici T ed S

Consideriamo la fondamentale relazione 1.170 fra l'operatore  $S$  e l'operatore  $T$ , e la riscriviamo tenendo conto della 1.178:

$$S = 1 - \frac{i\pi\mu}{k}\delta(k - k')T. \quad (2.62)$$

Consideriamo i relativi elementi di matrice fra gli stati di momento uscenti ed entranti:

$$\langle \mathbf{k}'|S|\mathbf{k} \rangle = \langle \mathbf{k}'|\mathbf{k} \rangle - \frac{i\pi\mu}{k}\delta(k - k') \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k} \rangle. \quad (2.63)$$

Se sviluppiamo il primo braket a secondo membro, tenendo conto della 2.35, possiamo mettere in evidenza la delta radiale:

$$\langle \mathbf{k}'|S|\mathbf{k} \rangle = \delta(k - k') \left[ \frac{\delta(\hat{k} - \hat{k}')}{k'k} - \frac{i\pi\mu}{k} \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k} \rangle \right]. \quad (2.64)$$

Adesso applichiamo ai vari termini gli sviluppi multipolari nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'|S|\mathbf{k} \rangle &= \sum_{l'm',lm} \langle \hat{k}'|l'm' \rangle \frac{1}{k'} \langle k'l'm'|S|klm \rangle \frac{1}{k} \langle lm|\hat{k} \rangle, \\ \langle \mathbf{k}'|T|\mathbf{k} \rangle &= \sum_{l'm',lm} \langle \hat{k}'|l'm' \rangle \frac{1}{k'} \langle k'l'm'|T|klm \rangle \frac{1}{k} \langle lm|\hat{k} \rangle, \\ \delta(\hat{k} - \hat{k}') &= \sum_{l'm',lm} \langle \hat{k}'|l'm' \rangle \frac{1}{k'} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \frac{1}{k} \langle lm|\hat{k} \rangle. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sostituendo nella precedente, e fatte le posizioni:

$$\langle k'l'm'|S|klm \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(k - k') S_l(k), \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{k'} \langle k'l'm'|T|klm \rangle \frac{1}{k} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} T_l(k', k), \quad (2.67)$$

abbiamo finalmente le seguenti importanti relazioni fra le componenti multipolari di  $S$  e di  $T$ :

$$S_l(k) = 1 - i\pi k\mu T_l(k), \quad (2.68)$$

$$T_l(k, k) \equiv T_l(k) = \frac{1 - S_l(k)}{i\pi k\mu}. \quad (2.69)$$

La matrice  $S$  è definita solo sull'energy shell. La matrice  $T$  ha significato fisico sull'energy shell, ma è definita anche fuori.

Come si riflette l'unitarietà su  $S_l$ ? Partiamo da

$$\int \langle \mathbf{k} | S | \mathbf{k}'' \rangle \langle \mathbf{k}' | S \mathbf{k}'' \rangle^* d\mathbf{k}'' = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (2.70)$$

e sviluppiamo ambo i membri

$$\begin{aligned} & \sum_{lm'l'm'} \int Y_l^m(\hat{k}) \frac{\delta(k - k'')}{k^2} S_l(k) Y_l^{m*}(\hat{k}'') Y_{l'}^{m'*}(\hat{k}') \cdot \\ & \cdot \frac{\delta(k' - k'')}{k'^2} S_{l'}^*(k') Y_{l'}^{m'}(\hat{k}'') dk'' d\hat{k}'' = \\ & = \frac{\delta(k - k')}{k^2} \sum_{lm} Y_l^m(\hat{k}) Y_l^{m*}(\hat{k}'). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Adesso tenuto conto che:

$$\int Y_l^m(\hat{k}'') Y_{l'}^{m'*}(\hat{k}'') d\hat{k}'' = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (2.72)$$

$$\int \delta(k - k'') \delta(k' - k'') k''^2 dk'' = k'^2 \delta(k - k') \quad (2.73)$$

si ha dal confronto:

$$|S_l(E)|^2 = 1. \quad (2.74)$$

Quest'equazione (valida per lo scattering elastico) consente di scrivere

$$S_l(E) = e^{2i\delta_l(E)}, \quad (2.75)$$

avendo definito la fase o sfasamento asintottico  $\delta_l(E)$ .

## 2.4 Ampiezza di scattering e sezione d'urto

Sviluppiamo l'equazione 1.124, tenendo conto delle 2.36, 2.57, 2.15, 2.8 e 1.98 (potenziale locale), ed otteniamo:

$$f(\theta) = \sum_l (2l + 1) f_l P_l(\theta) \quad (2.76)$$

$$f_l = -\frac{\mu}{k^2} \int_0^\infty F_l(kr) u_l(kr) V(r) dr. \quad (2.77)$$

Partendo invece dalla 1.127, e tenendo conto della seguente identità:

$$\frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} = \sin \delta_l e^{i\delta_l}, \quad (2.78)$$



si ottengono varie espressioni equivalenti di  $f_l$ :

$$f_l = -\mu \frac{\pi}{2} T_l = \frac{S_l - 1}{2ik} = \frac{1}{k} \sin \delta_l e^{i\delta_l}. \quad (2.79)$$

Confrontando le 2.77 e 2.79 si ricava

$$S_l \equiv e^{2i\delta_l} = 1 - \frac{2i\mu}{k} \int_0^\infty F_l(kr) u_l(kr) V(r) dr, \quad (2.80)$$

che è l'equazione di Lippmann-Schwinger per la matrice  $S$ , risolta in stati di momento angolare, e dà la fase tramite un'integrazione sulla funzione d'onda e sul potenziale.

C'è una relazione molto interessante fra fasi e andamenti asintottici delle funzioni d'onda, che si può ottenere partendo dalla 1.70.

Dalla prima delle 2.46 si ottiene:

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} &= \frac{4\pi}{kr} \sum_{lm} i^l F_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}) = \\ &= \frac{1}{kr} \sum_l i^l (2l+1) F_l(kr) P_l(\hat{k}\hat{r}) = \\ &= \frac{1}{kr} \sum_l i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} F_l(kr) Y_l^0(\hat{k}\hat{r}), \end{aligned} \quad (2.81)$$

e dalla (20):

$$(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}})_\infty = \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l \sin(kr - l\pi/2) P_l(\theta) \quad (2.82)$$

e, analogamente

$$\psi_\infty^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{1}{kr} \sum_l (2l+1) i^l u_{l\infty} P_l(\theta). \quad (2.83)$$

Quindi lo sviluppo della 1.70 fornisce:

$$\frac{i^l (2l+1)}{kr} u_{l\infty}(r) P_l(\theta) = \frac{i^l (2l+1)}{kr} \sin(kr - \frac{l\pi}{2}) P_l(\theta) + \frac{2l+1}{2ik} (S_l - 1) \frac{e^{ikr}}{r} P_l(\theta). \quad (2.84)$$

Conviene esprimere tutto in funzione di  $e^{\pm i(kr - l\pi/2)}$ , che è rispettivamente  $O_{l\infty}$  e  $O_{l\infty}^*$ . Tenuto conto che

$$i^{-l} e^{ikr} = e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}, \quad (2.85)$$

$$u_{l\infty}(r) = \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2i} + \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2i} (S_l - 1), \quad (2.86)$$

è finalmente

$$u_{l\infty} = \frac{i}{2} \left[ e^{-i(kr-l\pi/2)} - S_l e^{i(kr-l\pi/2)} \right] = e^{i\delta_l} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \quad (2.87)$$

Questa relazione induce la definizione di una nuova funzione d'onda radiale:

$$u_l = e^{i\delta_l} v_l. \quad (2.88)$$

La nuova funzione ha il più semplice comportamento asintottico

$$v_{l\infty} = \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l). \quad (2.89)$$

Quando  $V \rightarrow 0$ ,  $S_l \rightarrow 1$ ,  $\delta_l \rightarrow 0$ ,  $e^{i\delta_l} \rightarrow 1$ , e quindi sia  $u_{l\infty}$  che  $v_{l\infty} \rightarrow F_{l\infty} \equiv \sin(kr - l\pi/2)$ . Ma  $v_l$  è reale all' $\infty$  e quindi anche al finito, ed è quindi più proprio considerare  $v$  come l'estensione di  $F$ , quando si passa da  $H_0$  ad  $H$ .

Sostituendo la 2.88 nella 2.80 si ottiene

$$\sin \delta_l = -\frac{\mu}{k} \int_0^\infty F_l(kr) v_l(kr) V(r) dr. \quad (2.90)$$

Questa equazione è più interessante della 2.80 dove, essendo  $u$  complesso, parte reale e immaginaria non sono separate.

Queste considerazioni conferiscono anche un interessante significato alla fase  $\delta_l$ .

In zona asintottica gli andamenti radiali sono sinusoidali perchè non c'è interazione nè potenziale centrifugo, e quindi l'equazione radiale è l'equazione da oscillatore armonico.

Il potenziale centrifugo sfasa  $F_{l\infty}$  di  $l\pi/2$  all'indietro rispetto ad  $F_{l=0}$ .

$V$  sfasa  $v_{l\infty}$  di  $\delta_l$  in avanti rispetto a  $F_{l\infty}$  (vedi la 2.89).

In ogni modo la morale è questa: il ricordo di quanto è avvenuto sulle distanze microscopiche dell'interazione sta tutto in  $\delta$ , sfasamento fra le onde entranti e uscenti. Infatti l'osservabile  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  dipende solo da  $\delta$ , ovvero da  $S$ . La conoscenza della funzione d'onda anche al finito dà un'informazione di maggior dettaglio, ma per calcolare l'osservabile basta conoscere  $\delta$  (o  $S$  o  $T$ ), ma non tutti i dettagli della  $\psi$ .

Scriviamo esplicitamente la sezione d'urto dalle 1.79 e 2.79:

$$k^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \left| \sum_l (2l+1) (e^{2i\delta_l} - 1) P_l(\theta) \right|^2 = \pi \left| \sum_l \sqrt{2l+1} (e^{2i\delta_l} - 1) Y_l^0(\theta) \right|^2. \quad (2.91)$$

Ricordiamo che  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  rappresenta l'area efficace che deve essere colpita affinché la particella sia deviata di  $\theta$ , entro  $d\Omega$ . La sezione d'urto integrale

$$k^2\sigma = k^2 \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (2.92)$$

è l'area efficace che deve essere colpita affinché la particella venga deviata comunque.

Per trovare la sezione d'urto integrale, sviluppiamo il terzo membro della 2.91:

$$k^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi \sum_{l'l''} \sqrt{(2l+1)(2l'+1)} (e^{2i\delta_l} - 1)(e^{-2i\delta_{l'}} - 1) Y_l^0(\theta) Y_{l''}^0(\theta), \quad (2.93)$$

ed integriamo:

$$k^2\sigma = k \sum_l \sigma_l = \pi \sum_l (2l+1) |S_l - 1|^2 = 4\pi \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (2.94)$$

L'interesse dello sviluppo multipolare sta nel fatto che, almeno per forze a corto raggio e bassa energia, la convergenza è molto forte. Ciò si può capire con un ragionamento semiclassico: la quantizzazione del momento della quantità di moto si scrive:  $|\mathbf{r} \times \mathbf{p}| = \hbar l$ . Indicando con  $b$  il parametro d'urto si ha:  $bp = b\hbar k \sim \hbar l$ , ovvero  $bk \sim l$ . Ciò vuol dire che se  $b$  è  $>$  del raggio di interazione non c'è contatto, ovvero che per  $l \geq kR$  è  $S_l \sim 1$ ,  $\delta_l \sim 0$ . Per esempio per  $n^{-12}C$  a 1 MeV (nel CM), dall'equazione dei raggi nucleari  $R \sim 1.3A^{\frac{1}{3}}$  fm, ed essendo  $m_{\text{nucleone}}c^2 = 938$  MeV,  $\hbar c = 197$  MeV.fm, si ottiene  $l_{\text{max}} \equiv kR \sim 0.66$ . L'interazione è spiegata dalle sole onde  $S$  e  $P$ .

## 2.5 Equazione di Lippmann-Schwinger, approssimazione di Born e distorted wave Born approximation

Partiamo dalla 1.108, proiettiamo su  $\langle \mathbf{r} |$ , eseguiamo gli sviluppi multipolari, e inseriamo al punto giusto una completezza 2.34. Nell'espressione seguente si assume che  $V$  sia locale e si tiene già conto delle ortogonalità banali:

$$\sum_{lm} \langle \hat{r} | lm \rangle \langle rlm | klm+ \rangle \langle lm | \hat{k} \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{lm} \langle \hat{r}|lm \rangle \langle rlm|klm \rangle \langle lm|\hat{k} \rangle + \sum_{lm} \int \langle \hat{r}|lm \rangle \\
&\langle rlm|G_0(E)|r'lm \rangle dr'V(r') \langle r'lm|klm \rangle \langle lm|\hat{k} \rangle. \quad (2.95)
\end{aligned}$$

Ovviamente sia  $V$  che  $G_0$  sono invarianti per rotazione. La componente multipolare (in rappresentazione coordinata) del propagatore libero, si scrive nel modo seguente:

$$\langle rlm|G_0^+(E)|r'l'm' \rangle = -\delta_{ll'}\delta_{mm'}\frac{\mu}{k}F_l(kr_<)O_l(kr_>) \quad (2.96)$$

dove  $r_<(r_>)$  significa il minore (il maggiore), fra  $r$  ed  $r'$ . La dimostrazione di questa importante relazione è più avanti, all'equazione ???. Sostituendo la 2.96 nella 2.95 semplificata, e tenuto conto delle 2.44, 2.58, si trova:

$$u_l(k, r) = F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \int F_l(kr_<)O_l(kr_>)V(r')dr'u_l(k, r'). \quad (2.97)$$

L'effetto di  $r_>$  ed  $r_<$ , è quello di spezzare l'integrale radiale in  $r'$  in due parti: da 0 ad  $r$ , e da  $r$  a  $\infty$  (in questo comportamento c'è la memoria della genesi 1.51 della funzione di Green). Si ottiene:

$$\begin{aligned}
u_l(k, r) &= F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \{O_l(kr) \int_0^r F_l(kr')V(r')u_l(k, r')dr' + \\
&+ F_l(kr) \int_r^\infty O_l(kr')V(r')u_l(k, r')dr'\}. \quad (2.98)
\end{aligned}$$

Sostituendo la 2.88 nella 2.98 si ottiene:

$$\begin{aligned}
v_l(k, r) &= e^{-i\delta_l}F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \{G_l(kr) \int_0^r F_l(kr')V(r')v_l(k, r')dr' + \\
&+ F_l(kr) \int_r^\infty G_l(kr')V(r')v_l(k, r')dr' + \\
&+ iF_l(kr) \int_0^\infty F_l(kr')V(r')v_l(k, r')dr'\}. \quad (2.99)
\end{aligned}$$

La parte immaginaria di quell'equazione è nulla per la 2.90, e resta quindi l'equazione di Lippmann Schwinger *reale* per la funzione  $v$ :

$$\begin{aligned}
v_l(k, r) &= \cos \delta_l F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \{G_l(kr) \int_0^r F_l(kr')V(r')v_l(k, r')dr' + \\
&+ F_l(kr) \int_r^\infty G_l(kr')V(r')v_l(k, r')dr'\}. \quad (2.100)
\end{aligned}$$

Queste sono le equazioni integrali radiali dello scattering. *Convenzione:* quando nelle funzioni out- in-going (p.es.  $O_l^\pm$ ) si omette il segno, si intende  $+ (O_l \equiv O_l^+)$ .

Per avere la funzione d'onda in approssimazione di Born la ricetta è immediata. Bisogna sostituire  $u \rightarrow F$  e si ottiene:

$$u_l(k, r) \sim F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \left\{ O_l(kr) \int_0^r F_l^2(kr') V(r') dr' + F_l(kr) \int_r^\infty O_l(kr') V(r') F_l(kr') dr' \right\}. \quad (2.101)$$

Questa può anche essere scritta diversamente tenendo conto delle 2.25:

$$u_l(k, r) \sim F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \left[ G_l(kr) \int_0^r F_l^2(kr') V(r') dr' + F_l(kr) \int_r^\infty G_l(kr') F_l(kr') V(r') dr' + i F_l(kr) \int_0^\infty F_l^2(kr') V(r') dr' \right]. \quad (2.102)$$

Adesso se vogliamo le fasi (e quindi la sezione d'urto) in approssimazione di Born, possiamo per esempio prendere il limite asintotico della 2.101, e sostituire la 2.87 (in questo limite il secondo integrale diventa  $\int_\infty^\infty \rightarrow 0$ ):

$$2iu_l \simeq S_l e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} \simeq e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})} - \frac{2i\mu}{k} e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} \int F_l^2(kr') V(r') dr'. \quad (2.103)$$

Semplificando abbiamo

$$S_l \equiv e^{2i\delta_l} \sim 1 - \frac{2i\mu}{k} \int_0^\infty F_l^2(kr') V(r') dr', \quad (2.104)$$

che si può ottenere anche direttamente dalla 2.90. Separando parte reale e immaginaria:

$$\cos 2\delta_l \sim 1 ; \sin 2\delta_l \sim -\frac{2\mu}{k} \int_0^\infty F_l^2(kr') V(r') dr'. \quad (2.105)$$

Si vede immediatamente che nella 2.104 l'unitarietà è violata, e che le 2.105 sono incoerenti.

Infatti noi siamo all'interno di un'approssimazione valida per  $V \sim 0$ ,  $\delta \sim 0$ , e il modo corretto di interpretare le equazioni 2.105 è il seguente:

$$\cos 2\delta_l \sim 1 - 2\delta_l^2 \sim 1 ; \sin 2\delta_l \sim 2\delta_l \sim -\frac{2\mu}{k} \int_0^\infty F_l^2(kr) V(r) dr, \quad (2.106)$$

ovvero:

$$\delta_l \sim -\frac{\mu}{k} \int_0^\infty F_l^2(kr) V(r) dr, ; \delta_l^2 \sim 0. \quad (2.107)$$

Si ritrova la coerenza delle formule, ma solo al primo ordine in  $\delta$ .

Può essere un utile esercizio ritrovare lo stesso risultato partendo dalla 1.190. Sviluppando  $f$  secondo la 1.190, e le onde piane secondo le 2.81, si ottiene:

$$\sum_l (2l+1) f_l P_l(\theta) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{l'm'm'} \frac{i^{l-l'}}{k^2} \int \frac{1}{r^2} F_l^2(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{r}) Y_{l'}^{m'}(\hat{k}') Y_{l'}^{m'*}(\hat{r}) V(r) r^2 dr d\hat{r}. \quad (2.108)$$

Ma  $\int Y_l^m(\hat{r}) Y_{l'}^{m'*}(\hat{r}) d\hat{r} = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ , quindi:

$$(2l+1) P_l(\theta) f_l(\theta) = -\frac{4\pi\mu}{k^2} \int F_l^2(kr) \sum_m Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{k}') V(r) dr. \quad (2.109)$$

Ancora,  $\sum_m Y_l^{m*}(\hat{k}) Y_l^m(\hat{k}') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\theta)$ , e la  $F_l$  può essere espressa tramite la 2.80. Si trova così

$$-\frac{\mu}{k^2} \int F_l^2(kr) (2l+1) P_l(\theta) V(r) dr = \frac{2l+1}{2ik} (S_l - 1) P_l, \quad (2.110)$$

che è esattamente la 2.104.

Occupiamoci adesso della formula a due potenziali, ed esplicitiamo la 1.198:

$$\langle \mathbf{k}' | T | \mathbf{k} \rangle \simeq \langle \mathbf{k}' | T_0 | \mathbf{k} \rangle + \int \langle \mathbf{k}' - 0 | \mathbf{r} \rangle d\mathbf{r} V_1(r) \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} + 0 \rangle. \quad (2.111)$$

Il termine più delicato da trattare è  $\langle \mathbf{k}' - 0 | \mathbf{r} \rangle$ . Usiamo la relazione

$$\langle \mathbf{k} - | \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} - \rangle^* = \langle \mathbf{r} | (-\mathbf{k}) + \rangle. \quad (2.112)$$

Asteriscare la funzione d'onda equivale a sostituire ingoing  $\rightarrow$  outgoing,  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ . Per quanto riguarda gli sviluppi multipolari abbiamo (vedi le 2.57 e 2.58):

$$\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} + \rangle = \sum_{lm} Y_l^m(\hat{r}) \frac{u_l(kr)}{kr} Y_l^{m*}(\hat{k}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l, \quad (2.113)$$

$$\langle \mathbf{r} | (-\mathbf{k}) + \rangle = \sum_{lm} Y_l^m(\hat{r}) \frac{u_l(kr)}{kr} (-)^l Y_l^{m*}(\hat{k}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l, \quad (2.114)$$

in quanto

$$Y_l^m(-\hat{k}) = (-)^l Y_l^m(\hat{k}), \quad (2.115)$$

mentre altrove  $k$  significa  $|k|$  e non va cambiato il segno. Si consideri anche che  $|k| = |k'|$  poichè siamo sull'energy shell.

Sviluppiamo la 2.111 in modo molto simile a quanto fatto per la 2.95, tenendo conto delle 2.112, ??, 2.69. Con un po' di algebra si ottiene:

$$e^{2i\delta_l} \simeq e^{2i\delta_{l0}} - \frac{2i\mu}{k} \int_0^\infty u_{0l}^2(k, r) V_1(r) dr, \quad (2.116)$$

dove ovviamente l'indice  $o$  contrassegna le grandezze (fase e funzione d'onda) relative al problema imperturbato.

Adesso conviene ricordare le 2.88, ed introdurre la funzione d'onda  $v_{0l}$ . La 2.116 diventa allora

$$e^{2i\delta_l} \simeq e^{2i\delta_{l0}} \left( 1 - \frac{2i\mu}{k} \int_0^\infty v_{0l}^2(k, r) V_1(r) dr \right). \quad (2.117)$$

Questa può essere utilmente confrontata con le 2.104, 2.105, nella forma 2.117 o nella forma seguente:

$$\cos 2(\delta_l - \delta_{0l}) \sim 1 ; \quad \sin 2(\delta_l - \delta_{0l}) \sim -\frac{2\mu}{k} \int_0^\infty v_{0l}^2(k, r) V_1(r) dr. \quad (2.118)$$

Il confronto è molto significativo: qui viene trattata perturbativamente la differenza  $\delta_l - \delta_{0l}$ . Inoltre è interessante che compaia la funzione d'onda imperturbata  $v$ , che è il vero analogo della  $F$  quando si spegne l'interazione.

## 2.6 La matrice $K$

Riprendiamo l'equazione 1.172, che riscriviamo:

$$S(E) = 1 - 2\pi i \delta(E - H_0) T(E), \quad (2.119)$$

dove  $E$  è l'energia dello stato iniziale. Infatti:

$$\langle \mathbf{k}_f | S | \mathbf{k} \rangle = \delta(\mathbf{k}_f - \mathbf{k}) - 2\pi i \delta(E - E_f) T(E). \quad (2.120)$$

E ricordiamo che vale l'analogia

$$S(E) = 1 - 2\pi i T(E) \delta(E - H_0), \quad (2.121)$$

se  $E$  è l'energia dello stato finale.

Definiamo un nuovo operatore  $K$  tramite la

$$S(E) = [1 - \pi i \delta(E - H_0) K(E)] [1 + \pi i \delta(E - H_0) K(E)]^{-1}. \quad (2.122)$$

La 2.122 è più interessante della 2.119 perchè nella 2.122 l'unitarietà di  $S$  si riflette nell'hermiticità di  $K$ . Il fattore  $1/2$  nel coefficiente numerico fra le 2.119, 2.121 e la 2.122 è convenzionale, e la convenienza si vedrà più avanti.

Uguagliando le 2.119 e 2.122 si ottiene:

$$T(E) = K(E) - i\pi T(E)\delta(E - H_0)K(E) \quad (2.123)$$

detta equazione di HEITLER.

Scriviamo  $K = T + i\pi T\delta K$ , e sostituiamo a destra  $T = V + VG_0^+T$ :

$$K(E) = V + VG_0^+(E)T(E) + i\pi V\delta(E - H_0)K(E) + VG_0^+(E)[K(E) - T(E)], \quad (2.124)$$

avendo riapplicato la 2.123.

Otteniamo:

$$K(E) = V + V \left[ G_0^+(E) + i\pi\delta(E - H_0) \right] K(E). \quad (2.125)$$

Adesso ricordiamo la 1.75, che si può scrivere nelle forme seguenti:

$$G_0^{\mathcal{P}}(E) = G_0^{\pm}(E) \pm i\pi\delta(E - H_0); \quad G_0^{\mathcal{P}} = \frac{G_0^+ + G_0^-}{2}, \quad (2.126)$$

$$G_0^{\pm}(E) = \frac{1}{E \pm i\epsilon - H_0}; \quad G_0^{\mathcal{P}}(E) = \frac{\mathcal{P}}{E - H_0}, \quad (2.127)$$

dove  $\mathcal{P}$  significa ovviamente parte principale. Dalla 2.125 otteniamo allora

$$K(E) = V + VG_0^{\mathcal{P}}K(E). \quad (2.128)$$

Questa va confrontata con la prima delle 1.130, e qualifica  $K$  come analoga della  $T$ , quando si operi con  $\mathcal{P}$  anzichè con  $\pm$ , nell'integrazione.

Possiamo spingere avanti l'analogia, definendo la funzione d'onda

$$\psi^{\mathcal{P}} = \varphi + G_0^{\mathcal{P}}V\psi^{\mathcal{P}}, \quad (2.129)$$

analoga della 1.108, e quindi si dimostra facilmente che vale la

$$K\varphi = V\psi^{\mathcal{P}}, \quad (2.130)$$

analoga della 1.126.

La rappresentazione coordinata di  $G_0^{\mathcal{P}}$  è nella 1.78. Facciamo lo sviluppo multipolare, usando le ??:

$$\langle \mathbf{r} | G_0^{\mathcal{P}}(E) | \mathbf{r}' \rangle = \sum_{lm} \langle \hat{r} | lm \rangle \frac{1}{r} \langle rlm | G_0^{\mathcal{P}}(E) | r'lm \rangle \frac{1}{r'} \langle lm | \hat{r}' \rangle. \quad (2.131)$$



Adesso usiamo la completezza

$$\sum_{lm} \int |plm\rangle dp \langle plm| = \mathbf{1}, \quad (2.132)$$

per sviluppare l'operatore  $\delta(E - H_0)$ :

$$\delta(E - H_0) = \sum_{lm} \int \delta(E - E_p) |plm\rangle dp \langle plm|, \quad (2.133)$$

avendo ricordato la ???. Adesso si tien conto che

$$\delta(E - E_p) = \frac{\mu}{2k} \delta(p - k), \quad (2.134)$$

si integra in  $dp$ , e si trova finalmente:

$$\delta(E - H_0) = \frac{\mu}{2k} \sum_{lm} |klm\rangle \langle klm|. \quad (2.135)$$

Possiamo usare adesso la 2.126 per calcolare:

$$\langle rlm|G_0^P(E)|r'lm\rangle = \langle rlm|G_0^+(E)|r'lm\rangle + \frac{i\pi\mu}{2k} \sum_{l'm'} \langle rlm|kl'm'\rangle \langle kl'm'|r'lm\rangle, \quad (2.136)$$

e finalmente, tenendo conto della 2.96, otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle rlm|G_0^P(E)|r'lm\rangle &= \frac{\mu}{k} [-F_l(kr_<)O_l(kr_>) + iF_l(kr)F_l(kr')] = \\ &= \langle rlm|G_0^+(E)|r'lm\rangle + i\frac{\mu}{k} F_l(kr)F_l(kr'). \end{aligned} \quad (2.137)$$

Allora, se sviluppo  $\psi^P$  come  $\psi^+$ , e sviluppo la 2.129, ottengo:

$$\begin{aligned} u_l^P(k, r) &= F_l(kr) + \frac{\mu}{k} [-O_l(kr) \int_0^r F_l(kr')V(r')u_l^P(k, r')dr' - \\ &- F_l(kr) \int_r^\infty O_l(kr')V(r')u_l^P(k, r')dr' + \\ &+ iF_l(kr) \int_0^\infty F_l(kr')V(r')u_l^P(k, r')dr'], \end{aligned} \quad (2.138)$$

e semplificando:

$$\begin{aligned} u_l^P(k, r) &= F_l(kr) - \frac{\mu}{k} \left\{ G_l(kr) \int_0^r F_l(kr')V(r')u_l^P(k, r')dr' + \right. \\ &\left. + F_l(kr) \int_r^\infty G_l(kr')V(r')u_l^P(k, r')dr' \right\}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Sviluppando la 2.98 si ottiene:

$$\begin{aligned}
u_l(k, r) = & F_l(kr) - \frac{\mu}{k} [G_l(kr) \int_0^r F_l(kr') V(r') u_l(k, r') dr' + \\
& + F_l(kr) \int_r^\infty G_l(kr') V(r') u_l(k, r') dr' + \\
& + i F_l(kr) \int_0^\infty F_l(kr') V(r') u_l(k, r') dr']. \quad (2.140)
\end{aligned}$$

Il confronto fra le 2.139 e 2.140 è molto interessante. In base alla ?? si può scrivere

$$G_0^P = Re(G_0^+). \quad (2.141)$$

La validità di una formula analoga per ogni componente multipolare:

$$Re [G_{0l}^+(k; r, r')] = G_{0l}^P(k; r, r'). \quad (2.142)$$

si può dimostrare direttamente. Dalla 2.96 si ottiene:

$$Re \langle rlm | G_0^+(E) | r'lm \rangle = -\frac{\mu}{k} F_l(kr_<) G_l(kr_>), \quad (2.143)$$

e dalla 2.137:

$$\langle rlm | G_0^P(E) | r'lm \rangle = \frac{\mu}{k} \{ -F_l(kr_<) G_l(kr_>) + i [F_l(kr) F_l(kr') - F_l(kr_<) F_l(kr_>)] \}. \quad (2.144)$$

Ma

$$F_l(kr) F_l(kr') = F_l(kr_<) F_l(kr_>), \quad (2.145)$$

data la simmetria dell'espressione, mentre è per esempio

$$F_l(kr_<) O_l(kr_>) \neq F_l(kr) O_l(kr'). \quad (2.146)$$

Resta quindi dimostrata la validità generale della seguente espressione:

$$G_{0l}^P(k, r, r') = Re [G_{0l}^+(k, r, r')] = -\frac{\mu}{k} F_l(kr_<) G_l(kr_>). \quad (2.147)$$

Proseguiamo con gli sviluppi multipolari: sviluppiamo  $K$ , in analogia con  $T$  ??, 2.67, ma completamente fuori dall'energy shell, per maggiore generalità:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{p} | K(E) | \mathbf{q} \rangle &= \sum_{lm'l'm'} \langle \hat{p} | l'm' \rangle \frac{1}{p} \langle pl'm' | K(E) | qlm \rangle \frac{1}{q} \langle lm | \hat{q} \rangle = \\
&= \sum_{lm} \langle \hat{p} | lm \rangle K_l(E; p, q) \langle lm | \hat{q} \rangle, \quad (2.148)
\end{aligned}$$

avendo posto:

$$\frac{1}{p} \langle pl'm' | K(E) | qlm \rangle = \frac{1}{q} = \delta_{ll'} \delta_{mm'} K_l(E; p, q), \quad (2.149)$$

ed avendo tenuto conto dell'invarianza per rotazione.

Adesso scriviamo l'equazione di Heitler 2.123 fuori dall'energy-shell:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p} | T(E) | \mathbf{q} \rangle &= \langle \mathbf{p} | K(E) | \mathbf{q} \rangle - \\ &- i\pi \int \langle \mathbf{p} | T(E) | \mathbf{p}' \rangle \delta(E - E_{p'}) d\mathbf{p}' \langle \mathbf{p}' | K(E) | \mathbf{q} \rangle. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Eseguiamo gli sviluppi multipolari sostituendo  $K$  tramite le 2.149, e  $T$  tramite banali generalizzazioni delle 2.65, 2.67 fuori dall'energy-shell; quindi integriamo tenendo conto della 2.134 e dell'ortogonalità dell' $Y$ . Si ottiene l'equazione di Heitler proiettata su  $l$ :

$$T_l(E; pq) = K_l(E; pq) - ik \frac{\pi}{2} \mu T_l(E; pk) K_l(E; kq). \quad (2.151)$$

Si osservi che, a causa della delta di Dirac presente nell'equazione di Heitler, non ci sono integrazioni nell'esplicitazione dell'equazione operatoriale. Per risolvere la 2.151 rispetto a  $T$  o rispetto a  $K$ , basta proiettarla sull'energy shell a destra o a sinistra (ovvero scriverla come si dice a mezzo energy shell):

$$T_l(E; pk) = \frac{K_l(E; pk)}{1 + ik \frac{\pi}{2} \mu K_l(E; kk)}, \quad (2.152)$$

$$K_l(E; kq) = \frac{T_l(E; kq)}{1 - ik \frac{\pi}{2} \mu T_l(E; kk)}. \quad (2.153)$$

Sostituendo l'una o l'altra nella 2.151, si ottengono le due soluzioni:

$$T_l(E; pq) = K_l(E; pq) - ik \frac{\pi}{2} \mu \frac{K_l(E; pk) K_l(E; kq)}{1 + ik \frac{\pi}{2} \mu K_l(E; kk)}, \quad (2.154)$$

$$K_l(E; pq) = T_l(E; pq) + ik \frac{\pi}{2} \mu \frac{T_l(E; pk) T_l(E; kq)}{1 - ik \frac{\pi}{2} \mu T_l(E; kk)}. \quad (2.155)$$

Dalla 2.154 si ricava immediatamente l'espressione della  $T_l$  sull'energy shell:

$$T_l(k) = \frac{K_l(k)}{1 + i \frac{\pi}{2} \mu k K_l(k)}, \quad (2.156)$$

che sostituita nella 2.68 dà:

$$S_l(k) = \frac{1 - i(\pi/2)k\mu K_l(k)}{1 + i(\pi/2)k\mu K_l(k)} \equiv e^{2i\delta_l}, \quad (2.157)$$

Da questa si può ricavare l'espressione della fase:

$$-k\mu\frac{\pi}{2}K_l(k) = tg\delta_l, \quad (2.158)$$

che va confrontata con la 2.79 che riscriviamo:

$$-k\mu\frac{\pi}{2}T_l(k) = \sin \delta_l e^{i\delta_l}. \quad (2.159)$$

# Capitolo 3

## La matrice $R$ e le risonanze

### 3.1 Comportamenti asintottici dell'equazione radiale

Riscriviamo l'equazione radiale 2.61

$$\left[ D_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \mu V + k^2 \right] u_l = 0, \quad (3.1)$$

e supponiamo che  $V$  soddisfi alle seguenti condizioni:

- $V$  è locale,
- $V$  è a corto raggio ( $V = 0$  se  $r > R$ ),
- All'origine  $V$  non è più irregolare di  $1/r$ ,
- $V$  è continuo in  $r$ , salvo un numero finito di punti di discontinuità (così includiamo anche la buca quadrata).

Consideriamo il limite per  $k \rightarrow \infty$ .

In questo caso vale l'approssimazione di Born 2.107, ovvero:

$$\delta_l \sim -\frac{\mu}{k} \int_0^\infty F_l^2(kr) V(r) dr. \quad (3.2)$$

Essendo  $V$  a corto raggio l' $\int_0^\infty$  può essere sostituito da un  $\int_0^R$ . Quindi non ci sono noie per  $r \rightarrow \infty$ .

Quando  $r \rightarrow 0$ ,  $F_l^2(r)$  è regolare almeno come  $r^2$  (in onda  $S$  che è il caso peggiore), e quindi sana l'eventuale divergenza in  $V$ . Per  $k$  sufficientemente

grande,  $F_l$  può essere sostituito dal suo andamento asintotico all'interno dell'integrale, che resta limitato. Quindi quando  $k \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  come  $1/k$ .

Consideriamo adesso il limite per  $k \rightarrow 0$ . Per  $r, r'$  fissi, e  $k \rightarrow 0$ , possiamo sostituire  $F_l$  ed  $O_l$  con gli sviluppi all'origine 2.23, che introdotti nella 2.96 danno:

$$\langle rlm|G_0(E)|r'lm \rangle = -\frac{\mu(r_<)^{l+1}}{(2l+1)(r_>)^l}, \quad (3.3)$$

indipendente da  $k$ . La 2.98 diventa allora:

$$u_l(kr) = F_l(kr) - \frac{\mu}{2l+1} \left[ \frac{1}{r^l} \int_0^r V(r') u_l(kr') (r')^{l+1} dr' + r^{l+1} \int_r^R V(r') u_l(kr') (r')^{-l} dr' \right], \quad (3.4)$$

quando  $r < R$ , e

$$u_l(kr) = F_l(kr) - \frac{\mu}{(2l+1)r^l} \int_0^R V(r') u_l(kr') (r')^{l+1} dr', \quad (3.5)$$

quando  $r > R$ .

Comunque gli integrali sono limitati, e quindi quando  $k \rightarrow 0$ ,  $u_l \rightarrow 0$  come  $F_l$ , cioè come  $k^{l+1}$ .

Poniamo nella 2.80

$$a_l = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\mu}{k^{2l+2}} \int_0^\infty F_l(kr) u_l(kr) V(r) dr. \quad (3.6)$$

$a_l$  si chiama "scattering length", ed è per quanto detto una costante. Sostituendo nella (5.53a) otteniamo:

$$\lim_{k \rightarrow 0} e^{2i\delta_l} \sim 1 + 2i\delta_l \sim 1 - 2ia_l k^{2l+1}, \quad (3.7)$$

ovvero:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \delta_l = -a_l k^{2l+1} \quad (3.8)$$

La fase va a zero come  $k^{2l+1}$ . Inoltre dalla 3.8 si vede che  $a_l$  è reale, cosa che non era evidente nella 3.6, dato che  $u_l$  è complesso. L'apparente contraddizione si risolve osservando la 2.88, di cui siamo in grado adesso di calcolare il limite:

$$\lim_{k \rightarrow 0} u_l \sim \lim_{k \rightarrow 0} v_l(1 + i\delta_l) \sim \lim_{k \rightarrow 0} v_l(1 - ia_l k^{2l+1}). \quad (3.9)$$

Quindi  $u_l$  (e  $v_l$ ) va a zero come  $k^{l+1}$ , ma la sua parte immaginaria, va a zero molto più rapidamente (come  $k^{3l+2}$ ).

Abbiamo visto quindi che  $\delta_l$  va a zero (modulo  $\pi$ ) quando  $k \rightarrow 0$ , e torna a zero (modulo  $\pi$ ) quando  $k \rightarrow \infty$ . Il teorema di Levinson (che enunciamo senza dimostrazione), dice che

$$\delta_l(0) - \delta_l(\infty) = n_l \pi, \quad (3.10)$$

dove  $n_l$  è il numero di stati legati sostenuti da quel potenziale, nello stato  $l$ . Così si riesce a definire univocamente  $\delta_l$ , imponendo la continuità rispetto a  $k$  e, per esempio, il valore  $\delta_l(\infty) = 0$ .

Torniamo alla 3.1 ed osserviamo che quando  $r > R$ , è  $V = 0$  e resta solo il potenziale centrifugo. L'altezza della barriera centrifuga in  $R$  è  $\frac{l(l+1)}{R^2}$ .

Questa è anche l'altezza massima di  $\frac{l(l+1)}{r^2} + \mu V$ , se  $V$  è attrattivo.

Se

$$\frac{l(l+1)}{R^2} \sim \frac{l^2}{R^2} \gg k^2, \quad (3.11)$$

la funzione d'onda non supera la barriera, e non c'è interazione. Quindi tutte le  $\delta_l$  con

$$l \gg kR \quad (3.12)$$

sono piccole.

Se sostituiamo la 3.6 nella 2.77, otteniamo:

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_l = -a_l k^{2l}. \quad (3.13)$$

Ma tenendo conto delle (2.22) e (5.51a), e del ragionamento fatto sopra, per  $k$  sufficientemente piccolo solo l'onda  $S$  conta, e si ha:

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \lim_{k \rightarrow 0} |f_0|^2 = a_0^2. \quad (3.14)$$

Il parametro  $a_0$  ha le dimensioni di una lunghezza, e rappresenta la dimensione lineare della sezione d'urto, al limite di energia nulla.

## 3.2 La teoria della matrice $\mathcal{R}$

Continuiamo nell'analisi di un potenziale a corto raggio, e separiamo la soluzione radiale  $u_l$  in una parte interna ( $u_l^{(i)}; r < R$ ), ed una parte esterna ( $u_l^{(e)}; r > R$ ).

La  $u_l^{(i)}$  è ignota finchè non si specifica  $V$ , mentre la  $u_l^{(e)}$  risente del solo potenziale centrifugo, ovvero è data dalla 2.87 non asintottica:

$$u_l^{(e)}(k, r) = \frac{i}{2}[O_l^*(kr) - S_l O_l(kr)]. \quad (3.15)$$

Qui solo  $S_l$  è incognita, e porta il ricordo dell'interazione.

Dovendo le due soluzioni raccordarsi in  $R$ , assieme alla derivata prima, definiamo la funzione  $\mathcal{R}$ , inversa alla derivata logaritmica  $\mathcal{D}$ , ai bordi:

$$\mathcal{D}_l = \frac{1}{\mathcal{R}_l} = \frac{R \left[ \frac{du_l^{(i)}}{dr} \right]_{r=R}}{u_l^{(i)}(R)}. \quad (3.16)$$

Nel caso elastico di cui ci stiamo occupando,  $\mathcal{R}$  ed  $S$  non sono matrici. Si parla in generale di matrice  $S$  e matrice  $\mathcal{R}$ , pensando al caso multicanale, che offre la naturale generalizzazione del formalismo.

La condizione di raccordo si scrive:

$$\mathcal{D}_l = \frac{1}{\mathcal{R}_l} = \frac{R \left[ \frac{du_l^{(e)}}{dr} \right]_{r=R}}{u_l^{(e)}(R)} = \rho \frac{O_l'^*(\rho) - S_l O_l'(\rho)}{O_l^*(\rho) - S_l O_l(\rho)} \quad (3.17)$$

$$\rho = kR \quad (3.18)$$

$$O_l'(\rho) \equiv \left[ \frac{dO_l(kr)}{d(kr)} \right]_{kr=\rho} \quad (3.19)$$

Si noti che qui (e in tutto questo capitolo), indichiamo con apice la derivata delle funzioni di Bessel rispetto all'argomento  $kr$ , e non rispetto ad  $r$ . La 3.17 correla  $\delta_l$  con  $\mathcal{R}_l$  (o  $\mathcal{D}_l$ ). Quindi se è specificato  $V$  si può calcolare  $\mathcal{R}_l$ , e quindi  $\delta_l$ .

Conviene dividere numeratore e denominatore nel 3° membro della 3.17 per  $O_l(\rho)$ , e fare le seguenti posizioni:

$$\frac{O_l^*(\rho)}{O_l(\rho)} = e^{-2i\phi_l}; \quad tg\phi_l = \frac{F_l(\rho)}{G_l(\rho)}, \quad (3.20)$$

$$\rho \frac{O_l'(\rho)}{O_l(\rho)} = \rho \frac{G_l'(\rho) + iF_l'(\rho)}{G_l(\rho) + iF_l(\rho)} \equiv \mathcal{L}_l = \mathcal{S}_l + i\mathcal{P}_l. \quad (3.21)$$

Moltiplicando per  $G_l(\rho) - iF_l(\rho)$  numeratore e denominatore nel 2° membro della 3.21, e tenendo conto della ??, si ottiene:

$$\mathcal{S}_l = \rho \frac{G_l(\rho)G_l'(\rho) + F_l(\rho)F_l'(\rho)}{G_l^2(\rho) + F_l^2(\rho)}, \quad (3.22)$$



$$\mathcal{P}_l = \frac{\rho}{G_l^2(\rho) + F_l^2(\rho)}. \quad (3.23)$$

Si ottiene allora:

$$\mathcal{R}_l = \frac{e^{-2i\phi_l} - S_l}{e^{-2i\phi_l} \mathcal{L}_l^* - S_l \mathcal{L}_l}, \quad (3.24)$$

e risolvendo rispetto ad  $S_l$ :

$$S_l = e^{-2i\phi_l} \frac{1 - \mathcal{R}_l \mathcal{L}_l^*}{1 - \mathcal{R}_l \mathcal{L}_l} = e^{-2i\phi_l} \frac{\mathcal{D}_l - \mathcal{L}_l^*}{\mathcal{D}_l - \mathcal{L}_l}. \quad (3.25)$$

Nel caso elastico (di cui qui si occupiamo),  $\mathcal{R}_l$  e  $\mathcal{D}_l$  sono reali (ciò si evince dalla 3.16 e dalla 2.88:  $e^{i\delta}$  si semplifica fra numeratore e denominatore, e  $v$  è reale), quindi l'unitarietà di  $S_l$  nella equazione 3.25 risulta evidente. Anzi, mettendo  $S_l$  nella forma 2.75, si trova la seguente espressione per la fase:

$$\delta_l = \arctan \frac{\mathcal{R}_l \mathcal{P}_l}{1 - \mathcal{R}_l \mathcal{S}_l} - \phi_l = \arctan \frac{\mathcal{P}_l}{\mathcal{D}_l - \mathcal{S}_l} - \phi_l. \quad (3.26)$$

Nel caso di scattering elastico su sfera rigida la funzione d'onda deve avere un nodo in  $R$ , quindi  $\mathcal{R}_l = 0$  e  $\delta_l = -\phi_l$ . Per questo  $-\phi_l$  è detta "fase di sfera rigida".

Un'interessante espressione, alternativa alle 3.26, è la seguente:

$$\mathcal{D}_l = \mathcal{P}_l \cos(\delta_l + \phi_l) + \mathcal{S}_l. \quad (3.27)$$

Qui la derivata logaritmica è data in funzione della fase, e di grandezze puramente cinematiche ( $\mathcal{P}_l, \mathcal{S}_l, \phi_l$ ).

Queste funzioni cinematiche si calcolano dalle 2.22, e dalle relazioni seguenti, che coinvolgono le derivate prima delle  $F_l, G_l$ :

$$F_l'(kr) \equiv \frac{dF_l(kr)}{d(kr)} = F_{l-1} - \frac{l}{kr} F_l, \quad (3.28)$$

$$G_l'(kr) = \frac{dG_l(kr)}{d(kr)} = G_{l-1} - \frac{l}{kr} G_l, \quad (3.29)$$

Per il calcolo delle ( $\mathcal{P}_l, \mathcal{S}_l, \phi_l$ ), sono convenienti le seguenti espressioni:

$$\mathcal{P}_l(\rho) = \frac{\rho}{p_l(\rho)}, \quad (3.30)$$

$$\mathcal{S}_l(\rho) = \rho \frac{q_l(\rho)}{p_l(\rho)} - l, \quad (3.31)$$

$$\phi_0(\rho) = \rho \quad (3.32)$$

$$\phi_0(\rho) = \phi_{l-1}(\rho) - \arctan \frac{1}{q_l(\rho)}, \quad (l > 0). \quad (3.33)$$

$$p_l = F_l^2 + G_l^2 = |O_l|^2; \quad q_l = F_l F_{l-1} + G_l G_{l-1} \quad (3.34)$$

Per  $p, q$  si possono usare le seguenti formule ricorrenti:

$$p_0 = 1; \quad p_1 = \frac{1}{\rho^2} + 1; \quad p_l = \left( \frac{2l-1}{\rho} \right)^2 p_{l-1} + p_{l-2} - \frac{2(2l-1)}{\rho} q_{l-1} \quad (3.35)$$

$$q_0 = 0; \quad q_l = \frac{2l-1}{\rho} p_{l-1} - q_{l-1} \quad (3.36)$$

La teoria della matrice  $\mathcal{R}$  collega  $\delta_l$  con  $\mathcal{R}_l$ . Le formule sono interessanti perchè si possono fare alcune ipotesi su  $\mathcal{R}_l$  senza specificare  $V$  (o almeno per certe classi di  $V$ ).

Un tipico e fondamentale effetto che può essere studiato in termini di matrice  $\mathcal{R}$ , è la risonanza.

### 3.3 La risonanza

Consideriamo l'equazione 3.25, 3° membro.  $\phi$  ed  $\mathcal{L}$  sono funzioni cinematiche, lentamente variabili in  $k$ .  $\mathcal{D}_l$  porta le informazioni sull'interno del potenziale, e può dare effetti che portano a brusche variazioni di  $\delta_0$ , ovvero di  $S_l$ , ovvero di  $d\sigma/d\Omega$ .

Se a una certa energia  $E_{0l}$  è

$$\mathcal{D}_l(E_{0l}) = 0; \quad \left( \frac{d\mathcal{D}_l}{dE} \right)_{E_{0l}} < 0, \quad (3.37)$$

si dice che ivi c'è una risonanza.  $E_{0l}$  è l'energia di risonanza imperturbata.

Le ipotesi 3.37 consentono di sviluppare in serie la funzione  $\mathcal{D}_l$  nell'intorno della risonanza:

$$\mathcal{D}_l(E) \sim \left( \frac{d\mathcal{D}_l}{dE} \right)_{E_{0l}} (E - E_{0l}). \quad (3.38)$$

Tramite la 3.38 e opportune manipolazioni, la 3.25 può essere messa in una delle seguenti forme (fra loro equivalenti)

$$S_l = e^{-2i\phi_l} \frac{E - \varepsilon_l - i\Gamma_l/2}{E - \varepsilon_l + i\Gamma_l/2}, \quad \cot(\delta_l + \phi_l) = -\frac{2(E - \varepsilon_l)}{\Gamma_l}, \quad (3.39)$$

dove si è posto

$$\varepsilon_l = E_{0l} + \Delta_l, \quad ; \quad \Delta_l = \mathcal{S}_l / \left( \frac{d\mathcal{D}_l}{dE} \right)_{E_{0l}}, \quad ; \quad \Gamma_l = -2\mathcal{P}_l / \left( \frac{d\mathcal{D}_l}{dE} \right)_{E_{0l}}. \quad (3.40)$$

Le equazioni 3.39 descrivono la risonanza in una forma standard, dovuta a Breit e Wigner.

$\varepsilon_l$  è l'energia di risonanza, che risulta shiftata di un'energia  $\Delta_l$  rispetto alla posizione "imperturbata"  $E_{0l}$ . La funzione  $\mathcal{S}_l$  è detta funzione di shift.

La fase di sfera rigida  $\phi_l$  rappresenta un background, e introduce un'ulteriore perturbazione sulla posizione e forma della risonanza, oltre a quella introdotta da  $\Delta_l$ . Se  $\phi_l = 0$  si ha la risonanza pura. In questo caso ( $\phi_l = 0$ )  $\delta_l$  passa da 0 a  $\pi$ , assumendo il valore  $\pi/2$  in risonanza ( $E = \varepsilon_l$ ). E' facile verificare che

$$\left( \frac{d\delta_l}{dE} \right)_{\varepsilon_l} = \frac{2}{\Gamma_l}, \quad (3.41)$$

cioè  $\frac{1}{\Gamma_l}$  misura la rapidità di salita della fase in risonanza.

La prima delle 3.39, assieme alla 2.94, ci consente di scrivere (sempre nell'ipotesi  $\phi_l = 0$ ) la sezione d'urto in forma di Breit e Wigner, attorno alla risonanza:

$$\frac{k^2\sigma_l}{(2l+1)\pi} = \frac{\Gamma_l^2}{(E - \varepsilon_l)^2 + (\frac{\Gamma_l}{2})^2}. \quad (3.42)$$

La sezione d'urto ha un massimo in risonanza. Più precisamente, la componente  $l$ -esima della sezione d'urto integrale è una lorenziana, centrata in  $\varepsilon_l$ , e di larghezza  $\Gamma_l$ .

$\Gamma_l$  è proporzionale a  $\mathcal{P}_l$ , detta penetrazione (perchè è connessa con la "trasparenza" della barriera centrifuga), ed è sempre  $> 0$ , quindi dalla seconda delle 3.37 si ricava  $\Gamma_l > 0$ .

Se  $\phi_l \neq 0$ , la 3.42 assume la forma:

$$\frac{k^2\sigma_l}{(2l+1)\pi} = 4 \frac{[(E - \varepsilon_l)\sin\phi_l + \frac{\Gamma_l}{2}\cos\phi_l]^2}{(E - \varepsilon_l)^2 + (\frac{\Gamma_l}{2})^2}. \quad (3.43)$$

Questa sezione d'urto ha un massimo per

$$E = \varepsilon_l + \frac{\Gamma_l}{2} \operatorname{tg}\phi_l \quad (3.44)$$

e un minimo per

$$E = \varepsilon_l - \frac{\Gamma_l}{2} \operatorname{cot}\phi_l, \quad (3.45)$$

mentre la larghezza della riga diventa

$$\Gamma_l \sqrt{1 + tg 2\phi_l}. \quad (3.46)$$

La presenza del background modifica sensibilmente la forma della risonanza.

La filosofia della B. e W., è di considerare, attorno alla risonanza, costanti i parametri cinematici ( $\phi_l \mathcal{S}_l \mathcal{P}_l$ ) che sono lentamente variabili, e linearmente variabile la derivata logaritmica  $\mathcal{D}_l$ .

La condizione  $\mathcal{D}_l(E_{0l}) = 0$  significa che in risonanza (nella “vera” risonanza) la funzione d’onda ha derivata orizzontale, e quindi c’è un massimo di penetrazione nel nucleo.

Le correzioni ( $\Delta_l$  e  $\phi_l$ ) che intervengono sulla forma “pura” della risonanza dipendono dalla nostra descrizione cinematica del processo (p. es. in tutta la teoria, il raggio di interazione  $R$  non è sempre rigorosamente determinato). Le risonanze sperimentali esistono, ma non sono mai “pure”. Svestire una risonanza sperimentale per ridurla alla B.W., e ricavarne i parametri  $E_{0l}$ ,  $\Gamma_l$ , è un’operazione che presenta margini di arbitrarietà (è model-dependent).

Per dare un esempio, consideriamo il caso in cui il potenziale nucleare viene schematizzato da una buca quadrata.

E’ un modo molto naïve di trattare il potenziale nucleare a corto raggio, ma consente una soluzione analitica dell’equazione di  $S$ . In questo caso la scelta di  $R$  è obbligata.

L’equazione 3.1 diventa in questo caso:

$$\left( D_r^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + K^2 \right) u_l = 0 ; K(E) = \sqrt{\mu(V_0 + E)}, \quad (3.47)$$

e la soluzione (che deve essere regolare all’origine) è

$$u_l(r) = C_l F_l(Kr). \quad (3.48)$$

Nella derivata logaritmica si elimina la costante di normalizzazione  $C_l$ , e si ottiene:

$$\mathcal{D}_l = \frac{\sigma F_l'(\sigma)}{F_l(\sigma)} = \sigma \frac{F_{l-1}(\sigma)}{F_l(\sigma)} - l, \quad (3.49)$$

dove si è posto

$$\sigma = KR, ; F_l'(\sigma) = \left[ \frac{dF_l}{d(Kr)} \right]_{r=R}, \quad (3.50)$$

e dove si è tenuto conto delle ??.

Indichiamo con

$$\sigma_{0l} = R \sqrt{\mu(V_0 + E_{0l})}, \quad (3.51)$$

una radice dell'equazione

$$F_l'(\sigma_{0l}) = 0, \quad (3.52)$$

ovvero:

$$F_{l-1}(\sigma_{0l}) = \frac{l}{\sigma_{0l}} F_l(\sigma_{0l}). \quad (3.53)$$

Calcoliamo

$$\frac{d\mathcal{D}_l}{dE} = \frac{[\sigma F_l''(\sigma) + F_l'(\sigma)] F_l(\sigma) - \sigma [F_l'(\sigma)]^2}{F_l^2(\sigma)} \frac{d\sigma}{dE}. \quad (3.54)$$

In risonanza

$$\left( \frac{d\sigma}{dE} \right)_{E_{0l}} = \frac{R^2 \mu}{2\sigma_{0l}}, \quad (3.55)$$

ovvero, grazie alle 3.52:

$$\left( \frac{d\mathcal{D}_l}{dE} \right)_{E_{0l}} = \frac{F_l''(\sigma_{0l})}{F_l(\sigma_{0l})} \frac{R^2 \mu}{2}. \quad (3.56)$$

Usando le ??, ??, 3.52, 3.53, si trova:

$$F_l''(\sigma_{0l}) = \left[ \frac{l(l+1)}{\sigma_0^2} - 1 \right] F_l(\sigma_{0l}), \quad (3.57)$$

e quindi, sostituendo nella 3.56:

$$\left( \frac{d\mathcal{D}_l}{dE} \right)_{E_{0l}} = \left[ \frac{l(l+1)}{\sigma_0^2} - 1 \right] \frac{R^2 \mu}{2}. \quad (3.58)$$

Nelle figure è riportato un esempio di risonanze calcolate. Con una buca quadrata di raggio  $R = 1.3 A^{\frac{1}{3}}$  fm ( $A=40$ ), e profondità  $V_0 = 50$  MeV, si calcola  $\frac{k^2 \sigma_l}{(2l+1)\pi}$  in funzione di  $E$ . Si è scelta una risonanza con  $l = 1$  che appare come un minimo, poichè il background  $\phi$  è grande. La prima sezione d'urto è calcolata tramite la soluzione esatta 3.48. La seconda sezione d'urto tramite la Breit e Wigner 3.43, valutando i parametri in risonanza. La forma è un po' diversa perchè la risonanza è larga; a rigore le BW funzionano bene al limite di  $\Gamma \rightarrow 0$ . Nella terza sezione d'urto, si usa ancora la B. e W., ponendo  $\Delta = \phi = 0$ . Senza background, la risonanza acquista l'aspetto usuale della Lorenziana. Il significato fisico di questo tipo di risonanza (detta di particella singola) è che la funzione d'onda viene intrappolata dentro il potenziale.

E' quindi un effetto di risonanza in senso classico. L'effetto si nota osservando la sezione d'urto in funzione di  $E$ . Se non c'è background in risonanza c'è un massimo di  $\sigma$ , ma con il background le cose possono cambiare.

Il segnale della risonanza è una rapida variazione di  $\sigma$  con  $E$ , le cui modalità possono essere complicate. La barriera centrifuga facilita l'intrappolamento e quindi esalta il fenomeno. Per questo abbiamo scelto per l'esercizio un caso  $l = 1$ , essendo in generale il caso  $l = 0$  meno significativo.

In generale si ha una risonanza in  $\varepsilon_l$  quando, messa  $S$  in una forma di tipo (7.29):

$$S_l = \frac{\mathcal{F}_l^{(-)}}{\mathcal{F}_l^{(+)}} ; \mathcal{F}_l^{(-)} = \mathcal{F}_l^{(+)*} ; k \text{ reale}, \quad (3.59)$$

è

$$\text{Re}[\mathcal{F}_l(\varepsilon_l)] = 0, \quad \frac{\text{Im}\mathcal{F}_l^{(+)}}{\left[\frac{d}{dE}\mathcal{R}_l\mathcal{F}_l\right]_{E=\varepsilon_l}} > 0. \quad (3.60)$$

Nell'esempio dato precedentemente, l'estrazione della fase sfera rigida e la distinzione fra  $E_{0l}$  e  $\varepsilon_l$ , era suggerita da motivazioni fisiche (far coincidere la risonanza con l'annullarsi della derivata logaritmica). Ciò getta un po' di ambiguità nella definizione dei parametri della B.W.

Per dare un altro esempio, consideriamo un potenziale di rango 1 con  $l = 0$ . Una famosa scelta del fattore di forma è

$$v(r) = e^{-\beta r}/r. \quad (3.61)$$

Riprendiamo le formule relative ai potenziali di rango finito, omettendo gli indici  $n$  (perchè  $n = 1$ ), ed  $l$  (perchè  $l = 0$ ).

Dalla ?? si ha:

$$\mathcal{G}_0^+ = -\frac{2\mu}{k} \left[ \overline{GvFv} + i (\overline{Fv})^2 \right]. \quad (3.62)$$

Per la parte reale:

$$\overline{GvFv} = \int_0^\infty \cos kx e^{-\beta x} dx \int_0^x \sin ky e^{-\beta y} dy = \frac{k(\beta^2 - k^2)}{4\beta(\beta^2 + k^2)^2}. \quad (3.63)$$

Il fattore di forma in rappresentazione momento è

$$\overline{Fv} = \int_0^\infty \sin kx e^{-\beta x} dx = \frac{k}{\beta^2 + k^2}. \quad (3.64)$$

Dalle ??, ??:

$$S = M^*/M, M = \lambda^{-1} - \mathcal{G}_0 = \lambda^{-1} + \frac{2\mu}{k} \left[ \overline{GvFv} + i (\overline{Fv})^2 \right] = \frac{1}{\lambda} + \mu \frac{\beta^2 - k^2 + 2i\beta k}{2\beta(\beta^2 + k^2)^2}. \quad (3.65)$$

Conviene porre

$$\Lambda = \frac{\lambda\mu}{2\beta}, \quad (3.66)$$

e si ottiene

$$S = \frac{(\beta^2 + k^2)^2 + \Lambda(\beta^2 - k^2) + 2i\beta k\Lambda}{(\beta^2 + k^2)^2 + \Lambda(\beta^2 - k^2) - 2i\beta k\Lambda}. \quad (3.67)$$

L'energia di risonanza si ottiene risolvendo l'equazione

$$Re[M(k_0)] = (\beta^2 + k_0^2)^2 + \Lambda(\beta^2 - k_0^2) = 0. \quad (3.68)$$

Si ottiene:

$$k_0^2 = \frac{1}{2} \left[ \Lambda - 2\beta^2 + \Omega \sqrt{\Lambda(\Lambda - 8\beta^2)} \right] = \mu E_0 \quad (3.69)$$

$$\Gamma = \frac{2ImM(k_0)}{\left[ \frac{d}{dE} Re(M) \right]_{k_0}} = \frac{\Omega 2\beta k_0 \Lambda}{\sqrt{\Lambda(\Lambda - 8\beta^2)}}; \quad \Omega = \pm 1. \quad (3.70)$$

Adesso ci vuole un po' di discussione.

- Se  $\Lambda > 0$ , deve essere  $\Lambda > 8\beta^2$  affinché sia  $k_0^2$  reale. Ambedue le scelte  $\Omega = \pm 1$  danno  $k_0^2 > 0$ , ma solo  $\Omega = +1$  dà  $\Gamma > 0$ .
- Se  $\Lambda < 0$  deve essere  $\Omega = +1$  affinché sia  $k_0 > 0$ . Viceversa deve essere  $\Omega = -1$  per  $\Gamma > 0$ .
- Quindi l'unica possibilità per avere la risonanza è  $\Lambda > 0$ ,  $\Omega = +1$ .

## Parte II

# Scattering elastico e inelastico fra due particelle dotate di struttura



# Capitolo 4

## Scattering elastico fra particelle dotate di spin

### 4.1 L'ampiezza di scattering

In questo paragrafo l'unica struttura interna che si assume nelle particelle, è il momento di spin intrinseco. Formalmente questo fatto interviene nel formalismo come una complicazione che si sovrappone al momento angolare orbitale. Cominceremo a parlare di canali, ma solo in quanto caratterizzati da diversi numeri quantici di tipo spin-angolare, non da diversa energia. L'elemento caratterizzante, da un punto di vista fenomenologico è la scomparsa della simmetria cilindrica, l'intervento della coordinata  $\varphi$  nella sezione d'urto, e il fenomeno della polarizzazione.

Data una particella di spin  $s$  e proiezione  $\nu$ , definiamo lo stato di polarizzazione  $|s\nu\rangle$ , autostato contemporaneo degli operatori  $\mathbf{S}^2$  e  $\mathbf{S}_z$  rispetto a un prefissato riferimento:

$$\mathbf{S}^2|s\nu\rangle = s(s+1)|s\nu\rangle ; \mathbf{S}_z|s\nu\rangle = \nu|s\nu\rangle, \quad (4.1)$$

soddisfacente le seguenti condizioni di ortonormalità e completezza:

$$\langle s\nu|s'\nu'\rangle = \delta_{ss'}\delta_{\nu\nu'} ; \sum_{\nu} |s\nu\rangle\langle s\nu| = 1. \quad (4.2)$$

Per dare un senso a queste notazioni formali, definiamo la coordinata di struttura interna  $\xi$ , con le condizioni

$$\langle \xi|\xi'\rangle = \delta(\xi - \xi'), ; \int |\xi\rangle d\xi \langle \xi| = 1, \quad (4.3)$$

in modo da definire l'autofunzione di spin

$$\langle \xi | s\nu \rangle = \chi_s^\nu(\xi), \quad (4.4)$$

e le sue proprietà

$$\int \chi_s^{\nu*}(\xi) d\xi \chi_{s'}^{\nu'}(\xi) = \delta_{ss'} \delta_{\nu\nu'}, \quad ; \quad \sum_{\nu} \chi_s^{\nu*}(\xi) \chi_s^{\nu}(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \quad (4.5)$$

Queste condizioni discendono dall'uso combinato delle relazioni 4.2 e ???. La variabile  $\xi$  è formale, e verrà spesso omessa ove non ci sia pericolo di confusione.

Consideriamo adesso l'interazione fra due particelle di spin  $s_1$ ,  $s_2$ , e definiamo l'operatore spin di canale

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2. \quad (4.6)$$

L'autofunzione di spin di canale, autostato contemporaneo di  $\mathbf{S}^2$  e  $\mathbf{S}_z$ , si scrive tramite i coefficienti di CLEBSH-GORDAN:

$$\chi_s^\nu(\xi) = \sum_{\nu_1 \nu_2} \langle s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 | s_1 s_2 s \nu \rangle \chi_{s_1}^{\nu_1}(\xi_1) \chi_{s_2}^{\nu_2}(\xi_2), \quad (4.7)$$

dove si intende che  $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$ , e dove

$$|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2; \quad -s \leq \nu \leq s. \quad (4.8)$$

Le equazioni agli autovalori restano formalmente le 4.1, con diverso significato per gli indici  $s$  e  $\nu$ , e le relazioni di completezza 4.2, 4.5 diventano adesso:

$$\sum_{s\nu} |s\nu\rangle \langle s\nu| = 1; \quad \sum_{s\nu} \chi_s^{\nu*}(\xi) \chi_s^{\nu}(\xi') = \delta(\xi - \xi'). \quad (4.9)$$

Adesso possiamo estendere la definizione 2.48 come segue:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k} s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 \rangle &= \sum_{lm} |klm\rangle \frac{1}{k} \langle lm | \hat{k} \rangle |s_1 \nu_1 \rangle |s_2 \nu_2 \rangle, \\ \langle \mathbf{r} \xi_1 \xi_2 | \mathbf{k} s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 \rangle &= \sum_{lm} \langle \hat{r} | lm \rangle \frac{\langle rlm | klm \rangle}{kr} = \\ &= \langle lm | \hat{k} \rangle \langle \xi_1 | s_1 \nu_1 \rangle \langle \xi_2 | s_2 \nu_2 \rangle. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Introduciamo il momento angolare totale

$$\mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{J}, \quad (4.11)$$

e i suoi autostati

$$\mathbf{J}^2|lsJM\rangle = J(J+1)|lsJM\rangle; \mathbf{J}_z|lsJM\rangle = M|lsJM\rangle, \quad (4.12)$$

che si costruiscono dagli stati disaccoppiati tramite la trasformazione di Clebsh–Gordan:

$$|lsJM\rangle = \sum_{m\nu} |lms\nu\rangle \langle lms\nu|lsJM\rangle. \quad (4.13)$$

Quindi operiamo sulla prima delle 4.10, introducendo lo schema di accoppiamento

$$\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \mathbf{S}, \quad \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{J}. \quad (4.14)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}s_1\nu_1s_2\nu_2\rangle &= \sum_{lms\nu JM} \frac{1}{k} \\ &\langle lm|\hat{k}\rangle \langle s_1\nu_1s_2\nu_2|s_1s_2s\nu\rangle \langle lms\nu|lsJM\rangle |klsJM\rangle. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Questo è lo sviluppo del ket in rappresentazione  $lsJ$ . Operiamo allo stesso modo sulla seconda delle 4.10, introducendo le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} \langle \xi_1|s_1\nu_1\rangle \langle \xi_2|s_2\nu_2\rangle &= \sum_{s\nu} \langle s_1\nu_1s_2\nu_2|s_1s_2s\nu\rangle \langle \xi_1\xi_2|s_1s_2s\nu\rangle, \\ \langle \hat{r}|lm\rangle \langle \xi_1\xi_2|s_1s_2s\nu\rangle &= \sum_{JM} \langle lms\nu|lsJM\rangle \langle \hat{r}\xi_1\xi_2|lsJM\rangle, \\ \langle rlm|klm\rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^l \frac{F_l(kr)}{kr}, \\ i^l \langle \hat{r}\xi_1\xi_2|lsJM\rangle &= \mathcal{Y}_{lsJ}^M(\hat{r}\xi). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Si ottiene finalmente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\xi|\mathbf{k}s_1\nu_1s_2\nu_2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{lms\nu JM} \frac{F_l(kr)}{kr} \\ &\langle s_1\nu_1s_2\nu_2|s_1s_2s\nu\rangle \langle lms\nu|lsJM\rangle Y_l^{m*}(\hat{k}) \mathcal{Y}_{lsJ}^M(\hat{r}\xi). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Questa è la funzione d'onda di una coppia di particelle non interagenti di spin–proiezione  $s_1, \nu_1$  ed  $s_2, \nu_2$  rispettivamente. S'intende che  $\mathbf{k}$  è il momento relativo, ed  $l$  il momento angolare del moto relativo.

Adesso passiamo alla matrice  $S$  1.170, estendendone la definizione: consideriamo un processo di collisione in cui lo spazio iniziale è caratterizzato da momento relativo e proiezioni  $\mathbf{k}\nu_1\nu_2$ , e lo stato finale da valori  $\mathbf{k}'\nu_1'\nu_2'$  per le

analoghe coordinate (gli spin delle due particelle,  $s_1, s_2$ , non cambiano dato che le particelle sono le stesse prima e dopo l'urto, e quindi possono essere indicate per chiarezza oppure omesse).

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{k}' s_1 \nu_1' s_2 \nu_2' | S | \mathbf{k} s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 \rangle = \langle \mathbf{k}' s_1 \nu_1' s_2 \nu_2' | \mathbf{k} s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 \rangle - \\ & - i\pi\mu \frac{\delta(k' - k)}{k} \langle \mathbf{k}' s_1 \nu_1' s_2 \nu_2' | T | \mathbf{k} s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 \rangle . \end{aligned} \quad (4.18)$$

Introducendo gli sviluppi 4.15 e con opportune manipolazioni si ottiene

$$S_{l's',ls}^J(k) = \delta_{ll'} \delta_{ss'} - T_{l's',ls}^J(k), \quad (4.19)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} & \langle k' l' s' JM | S | k l s JM \rangle = \delta(k - k') S_{l's',ls}^J(k), \\ & i\pi\mu \frac{\langle k l' s' JM | T | k l s JM \rangle}{k} = T_{l's',ls}^J(k). \end{aligned} \quad (4.20)$$

In tutto il procedimento si è tenuto conto implicitamente della conservazione di  $J$ , e invarianza rotazionale, che comporta l'indipendenza di  $S$  e  $T$  da  $M$ .

Scrivendo l'unitarietà 1.176 in rappresentazione  $lSJ$  e sviluppando, è facile ottenere la forma seguente:

$$\sum_{l'' s''} S_{l's',l''s''}^J S_{l''s'',l's}^{J*} = \delta_{ll'} \delta_{ss'}. \quad (4.21)$$

Adesso ricordiamo la 1.127, e riscriviamo l'ampiezza di scattering per la transizione fra stati di canale e di definita proiezione dello spin delle due particelle:

$$f_{\nu_1' \nu_2', \nu_1 \nu_2} = -2\pi^2 \mu \langle \mathbf{k}' \nu_1' \nu_2' | T | \mathbf{k} \nu_1 \nu_2 \rangle \quad (4.22)$$

Introduciamo a destra la rappresentazione accoppiata (sull'energy-shell):

$$\begin{aligned} f_{\nu_1' \nu_2', \nu_1 \nu_2} &= \frac{2\pi i}{k} \sum_{l'mm's's'\nu\nu'JM} Y_{l's',l''s''}^{m'*}(\hat{k}') Y_l^m(\hat{k}) T_{l's',ls}^J(k) \langle s_1 \nu_1' s_2 \nu_2' | s_1 s_2 s' \nu' \rangle \\ & \langle s_1 \nu_1 s_2 \nu_2 | s_1 s_2 s \nu \rangle \langle l' m' s' \nu' | l' s' JM \rangle \langle l m s \nu | l s JM \rangle . \end{aligned} \quad (4.23)$$

Specifichiamo meglio il riferimento, assumendo l'asse  $z$  coincidente con il momento iniziale  $\mathbf{k}$ , e l'asse  $y$  individuato dal versore

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}. \quad (4.24)$$

L'asse  $x$  è ovviamente tale che la terna  $xyz$  sia ortogonale destrorsa. Con queste convenzioni abbiamo:  $\hat{k} \equiv 0, 0$      $\hat{k}' \equiv \vartheta, 0$ . Ricordando la proprietà:

$$Y_l^m(0, 0) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \delta_{m0}, \quad (4.25)$$

la 4.23 diventa:

$$f_{\nu'_1\nu'_2,\nu_1\nu_2} = \frac{i}{k} \sum_{l'm'ss'\nu\nu'J} \sqrt{\pi(2l+1)} Y_l^{m'}(\theta, 0) \langle s_1\nu'_1s_2\nu'_2 | s_1s_2s'\nu' \rangle \langle s_1\nu_1s_2\nu_2 | s_1s_2s\nu \rangle \langle l0s\nu | lsJ\nu \rangle \langle l'm's'\nu' | l's'J\nu \rangle T_{l's',ls}^J. \quad (4.26)$$

Dalle proprietà dei C.G. abbiamo:  $M = \nu, m' + \nu' = \nu \rightarrow m' = \nu - \nu'$ , e quindi finalmente:

$$f_{\nu'_1\nu'_2,\nu_1\nu_2} = \frac{i}{k} \sum_{l'ss'\nu\nu'J} \sqrt{\pi(2l+1)} Y_l^{\nu-\nu'}(\theta, 0) T_{l's',ls}^J \langle s_1\nu'_1s_2\nu'_2 | s_1s_2s'\nu' \rangle \langle s_1\nu_1s_2\nu_2 | s_1s_2s\nu \rangle \langle l0s\nu | lsJ\nu \rangle \langle l'\nu - \nu's'\nu' | l's'J\nu \rangle. \quad (4.27)$$

Nel caso limite di particelle senza spin  $s = s' = \nu = \nu' = 0$ , i C.G. danno  $l = l' = J$  e si ottiene

$$f = \frac{i}{k} \sum_l \sqrt{\pi(2l+1)} Y_l^0(\theta) T_l = \frac{i}{2k} \sum_l (2l+1) P_l(\theta) T_l. \quad (4.28)$$

La 4.12 non coincide con le 2.76 e 2.79, ma si riduce a queste se si sostituisce  $T_l \rightarrow i\pi k\mu T_l$ . Le convenzioni della letteratura sono responsabili di questa discrepanza.

Dopo il caso banale  $s_1 = s_2 = 0$ , il più semplice caso di interazione spin-dependent, è quello  $s_1 = 1/2, s_2 = 0$  (o viceversa). Questo è per esempio il caso neutrone-alfa. Noi ci limiteremo ad esemplificare il formalismo su questo caso. Dalla 4.8 abbiamo evidentemente  $s = s' = \frac{1}{2}$ .

C'è un solo possibile spin di canale e due possibili valori di  $J$  per ogni  $l$ :  $J = l + 1/2$  e  $J = l - 1/2$ .

Allora  $l'$  potrebbe essere al massimo  $l + 1$  e al minimo  $l - 1$ , ma se si assume la conservazione della parità, questi valori sono esclusi, ed  $l$  (in questo caso particolare) si conserva:  $l = l'$ .

I possibili valori delle proiezioni sono  $\nu_1 = \nu = \pm \frac{1}{2}; \nu_2 = 0$ , e quindi l'ampiezza di scattering è una matrice a 4 dimensioni:

$$\nu, \nu' = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Essa si scrive:

$$f_{\nu'\nu}(\theta) = \frac{i}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{J=|l-\frac{1}{2}|}^{l+\frac{1}{2}} \sqrt{\pi(2l+1)} Y_l^{\nu-\nu'}(\theta, 0) T_l^J \times \times \langle l0\frac{1}{2}\nu | l\frac{1}{2}J\nu \rangle \langle l, \nu - \nu', \frac{1}{2}, \nu' | l\frac{1}{2}J\nu \rangle. \quad (4.29)$$

Esplicitando i due valori possibili di  $J$  (per ogni  $l$ ), si ottiene:

$$f_{\nu'\nu}(\theta, 0) = \frac{i}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2l+1)} Y_l^{\nu-\nu'}(\theta, 0) [A_{l,l-\frac{1}{2}}(\nu', \nu) T_l^{|l-\frac{1}{2}|} + A_{l,l+\frac{1}{2}}(\nu', \nu) T_l^{l+\frac{1}{2}}], \quad (4.30)$$

avendo posto

$$A_{l,l\pm\frac{1}{2}}(\nu', \nu) = \langle l0\frac{1}{2}\nu | l\frac{1}{2}, l \pm \frac{1}{2}, \nu \rangle \langle l, \nu - \nu', \frac{1}{2}\nu' | l\frac{1}{2}, l \pm \frac{1}{2}, \nu \rangle. \quad (4.31)$$

Tramite i valori dei C.G., si ottiene la seguente tabella:

$\frac{\nu'}{2}$	$\frac{\nu}{2}$	$A_{l,l-1/2}$	$A_{l,l+1/2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{l}{2l+1}$	$\frac{l+1}{2l+1}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1}$	$\frac{\sqrt{l(l+1)}}{2l+1}$

Allora, tenendo conto che

$$\begin{aligned} Y_l^0 &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l \\ Y_l^{\pm 1} &= \mp e^{\pm i\varphi} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi l(l+1)}} \sin \theta P_l', \\ A_{lJ}(\nu' \nu) &= A_{lJ}(-\nu' - \nu) \end{aligned} \quad (4.32)$$

sostituendo la 4.21, e ponendo

$$S_l^J = e^{2i\delta_l^J}; \quad \delta_l^{l+1/2} \equiv \delta_l^+, \quad \delta_l^{l-1/2} \equiv \delta_l^-, \quad (4.33)$$

si ottiene finalmente:

$$f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = f_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = \frac{1}{2ik} \sum_l [(l+1)(e^{2i\delta_l^+} - 1) + l(e^{2i\delta_l^-} - 1)] P_l(\theta), \quad (4.34)$$

$$f_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = -f_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \frac{1}{2ik} \sum_l (e^{2i\delta_l^+} - e^{2i\delta_l^-}) P_l'(\theta) \sin \theta. \quad (4.35)$$

La 4.33 è lecita in quanto, in questo caso particolare ( $s_1 = 1/2$ ,  $s_2 = 0$ ), i canali  $lsJ$  sono tutti disaccoppiati fra loro, e quindi continua a valere l'unitarietà nella forma 2.74, ovvero

$$|S_l^J|^2 = 1. \quad (4.36)$$

Nel caso più generale l'unitarietà assume forme più complicate. Di questo ci occuperemo quando parleremo dell'equazione di Schrödinger.

La sezione d'urto per fasci impolarizzati si scrive mediando sugli stati iniziali e sommando sugli stati finali:

$$k^2 \frac{d\sigma}{s\Omega} = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{\nu_1' \nu_2' \nu_1 \nu_2} |f_{\nu_1' \nu_2' \nu_1 \nu_2}|^2, \quad (4.37)$$

ovvero, nel nostro caso:

$$k^2 \frac{d\sigma}{s\Omega} = \frac{1}{2} [2|f_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}|^2 + 2|f_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}|^2], \quad (4.38)$$

## 4.2 Matrice densità e vettore polarizzazione

La connessione fra ampiezza di scattering ed osservabili, diventa adesso più complessa. Entrano in gioco le misure di polarizzazione, e quindi nuovi tipi di osservabili (connessi con l'insorgere dell'angolo  $\varphi$  accanto a  $\theta$  nella sezione d'urto).

Sia  $|s\alpha\rangle$  lo stato di polarizzazione della particella  $\alpha$ , in un fascio di particelle a spin  $s$ . Assunto un riferimento  $xyz$ , e definito uno stato di spin  $|s\nu\rangle$  tramite le equazioni 4.1, rappresentiamo  $|s\alpha\rangle$  nella base  $|s\nu\rangle$ :

$$|s\alpha\rangle = \sum_{\nu} |s\nu\rangle \langle \nu|s\alpha\rangle \quad (4.39)$$

Il numero  $C_{\alpha\nu}^{(s)} = \langle s\alpha|s\nu\rangle$  è tale che  $|C_{\alpha\nu}^{(s)}|^2 =$  rappresenta la probabilità che una misura di spin in direzione  $z$ , fatta su  $\alpha$ , dia per risultato  $\nu$ .

Supponiamo che il fascio sia composto da un numero molto grande di particelle  $\alpha$  di spin  $s$ , ed eliminiamo per brevità l'indice  $s$ . assumiamo la normalizzazione dell'intensità del fascio, ovvero:

$$\sum_{\alpha} \langle \alpha|\alpha\rangle = \sum_{\alpha\nu\nu'} \langle \alpha|\nu\rangle \langle \nu|\nu'\rangle \langle \nu'|\alpha\rangle = \sum_{\alpha\nu} |C_{\alpha\nu}|^2 = 1. \quad (4.40)$$

Si osservi che, mentre gli stati di base  $|\nu\rangle$  sono ortnormali completi:

$$\langle \nu|s\nu'\rangle = \delta_{\nu\nu'} ; \sum_{\nu} |\nu\rangle \langle \nu| = 1, \quad (4.41)$$

per gli stati  $|\alpha\rangle$  valgono le proprietà seguenti:

$$\langle \alpha|\alpha'\rangle = \sum_{\nu} C_{\alpha\nu}^* C_{\alpha'\nu}, \quad (4.42)$$

$$\sum_{\alpha} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \rho. \quad (4.43)$$

L'operatore  $\rho$  è detto operatore densità, e i suoi elementi di matrice sono:

$$\rho_{\nu\nu'} = \sum_{\alpha} C_{\alpha\nu} C_{\alpha\nu'}^*. \quad (4.44)$$

Dato un operatore  $\Omega$ , il suo valor medio nello stato non puro che descrive il fascio, mediato sul gran numero di particelle che lo compongono, è:

$$\langle \Omega \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha|\Omega|\alpha\rangle = \sum_{\alpha\nu\nu'} \langle \alpha|\nu\rangle \langle \nu|\Omega|\nu'\rangle \langle \nu'|\alpha\rangle. \quad (4.45)$$

Ricordando la definizione 4.44 di matrice densità, e introducendo gli elementi di matrice dell'operatore  $\Omega_{\nu\nu'} = \langle \nu' | \Omega | \nu \rangle$  l'operazione di traccia:

$$\langle \Omega \rangle = Tr(\rho\Omega) = Tr(\Omega\rho). \quad (4.46)$$

La matrice  $\rho$  riassume le caratteristiche osservabili dello stato, mentre i coefficienti  $C$  ne danno la struttura microscopica.

Conoscere tutti i  $C$  significa sapere come un fascio è stato preparato (particella per particella). Conoscere  $\rho$  significa conoscere i dati di polarizzazione medi osservabili del fascio. La matrice  $\rho$  è hermitiana, come risulta evidente dalla 4.44:

$$\rho_{\nu\nu'}^* = \rho_{\nu'\nu}. \quad (4.47)$$

Se prendiamo in particolare l'operatore unità:  $\Omega = 1$ , abbiamo:

$$\langle 1 \rangle = Tr\rho = \sum_{\alpha\nu} |C_{\alpha\nu}|^2 = 1. \quad (4.48)$$

La traccia di  $\rho$  ha il significato di un'intensità e vale 1 se si ammette la normalizzazione 4.40.

Consideriamo adesso uno stato puro  $\nu \equiv \bar{\nu}$ , cioè un fascio totalmente polarizzato: tutte le particelle  $\alpha = 1, 2, \dots, N$  hanno  $\nu = \bar{\nu}$ :

$$\begin{aligned} C_{\alpha\nu} &= C\delta_{\nu\bar{\nu}}, \\ |\alpha \rangle &= \sum_{\nu} C\delta_{\nu\bar{\nu}}|\nu \rangle = C|\bar{\nu} \rangle, \\ \sum_{\alpha\nu} |C_{\alpha\nu}|^2 &= N|C|^2 = 1 \rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{N}}; \quad C_{\alpha\nu} = \frac{\delta_{\nu\bar{\nu}}}{\sqrt{N}}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

a meno di una eventuale fase inessenziale.

$$\rho_{\nu\nu'} = \sum_{\alpha} C_{\alpha\nu}C_{\alpha\nu'}^* = \sum_{\alpha} \frac{\delta_{\nu\nu'}}{\sqrt{N}} \frac{\delta_{\nu'\bar{\nu}}}{\sqrt{N}} = \delta_{\nu\bar{\nu}}\delta_{\nu'\bar{\nu}}. \quad (4.50)$$

Uno stato puro di proiezione  $\bar{\nu}$ , è descritto da una matrice  $\rho$  avente tutti gli elementi nulli, tranne  $\rho_{\bar{\nu}\bar{\nu}} = 1$ .

Se invece il fascio è totalmente impolarizzato, i coefficienti  $C_{\alpha\nu}$  hanno modulo a fase distribuiti a caso. Negli elementi diagonali si ottiene il valor medio quadratico del modulo, normalizzato:

$$\rho_{\nu\nu} = \sum_{\alpha} |C_{\alpha\nu}|^2 = \frac{1}{2s+1}. \quad (4.51)$$

Negli elementi non diagonali si ottiene zero a causa della distribuzione stocastica delle fasi dei numeri complessi:

$$\rho_{\nu\nu'} = \sum_{\alpha} C_{\alpha\nu}C_{\alpha\nu'}^* = 0, \quad \text{se } \nu \neq \nu'. \quad (4.52)$$



In definitiva, per un fascio totalmente impolarizzato (cioè con gli spin distribuiti in modo random), la matrice  $\rho$  è proporzionale all'unità:

$$\rho_{\nu\nu'} = \frac{\delta_{\nu\nu'}}{2s+1}. \quad (4.53)$$

Consideriamo da qui in avanti il caso più semplice  $s = \frac{1}{2}$ . In questo caso  $|\frac{1}{2}, \nu\rangle$  è un vettore in 2 dimensioni, e  $\rho$  è una matrice complessa  $2 \times 2$ .

I parametri liberi nella matrice  $\rho$  sono 4 numeri complessi (= 8 parametri reali) meno 4 condizioni di hermiticità ( $\text{Re } \rho_{11} = \text{Re } \rho_{22} = 0$ ;  $\text{Re } \rho_{12} = \text{Re } \rho_{21}$ ;  $\text{Im } \rho_{12} = -\text{Im } \rho_{21}$ ), meno una condizione di normalizzazione, cioè 3 parametri significativi.

Si definisce vettore polarizzazione  $\mathbf{P}$ , il valor medio dell'operatore  $\Sigma$  nello stato:

$$\mathbf{P} = \langle \Sigma \rangle = \text{Tr}(\Sigma\rho). \quad (4.54)$$

Le componenti del vettore  $\Sigma$  sono le matrici di Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.55)$$

La matrice  $\rho$  può essere rappresentata in una base costituita dall'unità, più le 3 matrici di Pauli:

$$\rho = \sum_{\lambda=0}^3 \omega_\lambda \rho_\lambda; \quad \omega_0 = \hat{1}, \quad \omega_\lambda = \sigma_\lambda (\lambda = 1, 2, 3). \quad (4.56)$$

Riassumiamo alcune note proprietà delle matrici di Pauli:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \sigma_2 &= i\sigma_3; \quad [\sigma_1, \sigma_2] = 2i\sigma_3 \quad \text{e cicliche,} \\ \sigma_\lambda^2 &= \hat{1}, \quad \text{Tr} \sigma_\lambda = 0, \quad \text{Tr} \sigma_\lambda^2 = \text{Tr} \hat{1} = 2, \quad \lambda = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Da queste si ricava la relazione

$$\text{Tr}(\sigma_\lambda \sigma_\mu) = 2\delta_{\lambda\mu}. \quad (4.58)$$

Includendo l'unità, la 4.58 può essere generalizzata come segue:

$$\text{Tr}(\omega_\lambda \omega_\mu) = 2\delta_{\lambda\mu}; \quad \lambda, \mu = 0, 1, 2, 3; \quad \sigma_0 = \hat{1}. \quad (4.59)$$

Il set  $\omega$  è ortonormale rispetto al tipo di prodotto scalare definito dalla 4.59. Ciò suggerisce un metodo per ricavare i coefficienti  $\rho_\lambda$  nella 4.56. Moltiplicando ambo i membri per  $\omega_\mu$  ed applicando l'operatore  $\text{Tr}$  si ottiene:  $\text{Tr}(\rho\omega_\mu) = 2\rho_\mu$ .

Sostituendo nella 4.56 si ha finalmente:

$$\rho = \frac{1}{2} \left[ \hat{1} + \sigma_1 Tr(\rho\sigma_1) + \sigma_2 Tr(\rho\sigma_2) + \sigma_3 Tr(\rho\sigma_3) \right], \quad (4.60)$$

ovvero, tenuto conto della 4.54:

$$\rho = \frac{1}{2} (\hat{1} + \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\Sigma}). \quad (4.61)$$

Questa relazione inverte la 4.54.

In particolare, se il fascio è impolarizzato, si ha:

$$\rho = \frac{1}{2} \hat{1}; \quad \mathbf{P} = 0. \quad (4.62)$$

Se il fascio è totalmente polarizzato  $\uparrow$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = (0, 0, 1). \quad (4.63)$$

Se il fascio è totalmente polarizzato  $\downarrow$ :

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = (0, 0, -1). \quad (4.64)$$

Dalle equazioni 4.54, 4.44 si ottiene:

$$P_3 = Tr(\rho\sigma_3) = \rho_{11} - \rho_{22} = \sum_{\alpha} |C_{\alpha 1}|^2 - \sum_{\alpha} |C_{\alpha 2}|^2. \quad (4.65)$$

La 3<sup>a</sup> componente del vettore polarizzazione ha un significato importante: dà la differenza fra la percentuale di particelle polarizzate  $\uparrow$  e polarizzate  $\downarrow$ .

In sostanza, in questo caso ( $s = 1/2$ ), ci sono 3 parametri liberi nella  $\rho$ , e questi 3 dati si possono organizzare in un vettore  $\mathbf{P}$ . Vedremo che questo corrisponde all'esistenza di 3 osservabili indipendenti. E' ovvio dalla 4.44 che invece la conoscenza dettagliata di tutti i  $C_{\alpha\nu}$  richiede la definizione non di 3, ma di moltissimi ( $\rightarrow \infty$ ) parametri, ma questo dato corrisponderebbe alla conoscenza della struttura microscopica del fascio. La matrice  $\rho$  estrae quindi da un problema microscopico molto complicato, gli elementi osservabili.

Passiamo adesso al problema di scattering con  $s_1 = 1/2$ ,  $s_2 = 0$ . Questo è un problema fortemente degenero, in cui tutto il formalismo assume un aspetto molto semplificato. Siccome lo spin del bersaglio è nullo, lo spin del proiettile si identifica con lo spin di canale, per cui, dal punto di vista dello spin, il bersaglio è uno spettatore. Inoltre, poichè  $s_1 = s = \frac{1}{2}$ ,  $j$  può assumere due soli valori ( $l \pm 1$ ).

Siano  $\rho$  e  $\rho'$  le matrici densità che descrivono il sistema nello stato iniziale e finale. A seguito della collisione  $\rho$  si trasforma come un operatore:

$$\rho' = f\rho f^\dagger. \quad (4.66)$$

La matrice che attua la trasformazione è la matrice 4.27 nel caso generale, e ?? nel caso particolare che stiamo trattando a titolo di esempio. Ovviamente  $f$  è una matrice  $2 \times 2$ , come  $\rho$  (anche qui va ricordata la particolarità di questo caso: la matrice  $\rho$  di canale si scrive  $\rho = \rho_1 \otimes \hat{1}_2 = \rho_1$ , poichè qui la matrice unità nello spazio 2, ha una sola dimensione).

Abbiamo visto che  $Tr\rho$  ha il significato di una intensità (in questo caso del fascio iniziale). Se supponiamo  $Tr\rho = 1$ , allora  $\rho' = f(\theta, \varphi)\rho f^\dagger(\theta, \varphi)$ , dà l'intensità del fascio scatterato in  $\theta, \varphi$ , entro  $d\Omega$ .

Quindi la sezione d'urto differenziale è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = Tr\rho' = Tr(ff^\dagger). \quad (4.67)$$

Si noti che se le particelle non hanno spin, si ha semplicemente  $d\sigma/d\Omega = |f|^2$ , e quindi ritroviamo la 1.79.

Sostituendo la 4.61 nella 4.67 si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} [Tr(ff^\dagger) + \mathbf{P} \cdot Tr(f\Sigma f^\dagger)], \quad (4.68)$$

dove

$$\mathbf{P} = Tr(\Sigma\rho), \quad (4.69)$$

è il vettore polarizzazione relativo allo stato iniziale. Per decifrare bene il formalismo bisogna ricordare che:

- $f$  e  $\rho$  sono matrici  $2 \times 2$ ,
- $\Sigma$  e  $\mathbf{P}$  sono vettori in  $R^3$ , le cui componenti sono matrici  $2 \times 2$ .

Il vettore polarizzazione relativo allo stato finale è:

$$P'_\lambda = \frac{Tr(\sigma_\lambda \rho')}{Tr\rho'} = \frac{Tr(\sigma_\lambda f f^\dagger) + Tr(\sigma_\lambda f \Sigma f^\dagger) \cdot \mathbf{P}}{Tr(ff^\dagger) + \mathbf{P} \cdot Tr(f\Sigma f^\dagger)}; \quad \lambda = 1, 2, 3. \quad (4.70)$$

La notazione è succinta ma chiara: dove c'è il prodotto scalare, si intende che esa va fatto in  $R^3$ , fra le grandezze vettoriali.

Nel caso particolare in cui il fascio incidente sia impolarizzato ( $\mathbf{P} = 0$ ), si ha:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 = \frac{1}{2} Tr(ff^\dagger); \quad (P'_0)_\lambda = \frac{Tr(\sigma_\lambda f f^\dagger)}{Tr(ff^\dagger)}. \quad (4.71)$$

Si noti che la prima delle 4.71 coincide con la 4.38.

Quindi con il suffisso 0, intendiamo che ci si riferisce alla situazione di stato iniziale impolarizzato (ovvero fascio incidente impolarizzato, perchè nel nostro esempio il proiettile ha  $s_1 = 1/2$ , mentre la targhetta ha  $s_2 = 0$ ).

Tenendo conto della proprietà

$$Tr(\Sigma f f^\dagger) = Tr(f \Sigma f^\dagger), \quad (4.72)$$

che è vera ma non banale, e che diamo senza dimostrazione, le equazioni 4.67...4.71 si possono ricompattare come segue:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 &= \frac{1}{2}Tr(ff^\dagger), \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \mathbf{P}'_0 &= \frac{1}{2}Tr(f\Sigma f^\dagger), \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}'_0), \\ \frac{d\sigma}{d\Omega} P'_\lambda &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (P'_{0\lambda} + K_{\lambda 1}P_1 + K_{\lambda 2}P_2 + K_{\lambda 3}P_3), \\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 K_{\lambda\mu} &= \frac{1}{2}Tr(\sigma_\lambda f \sigma_\mu f^\dagger). \end{aligned} \quad (4.73)$$

I coefficienti  $K$  si chiamano coefficienti di correlazione (fra le polarizzazioni entrante ed uscente).

Le prime due equazioni si riferiscono a ciò che succede se il fascio incidente è impolarizzato. Le altre trattano il caso generale, ma sono espresse però in funzione di  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$  e  $\mathbf{P}'_0$ .

Riprendiamo adesso le 4.34, 4.35. L'ampiezza di scattering si può mettere nella seguente forma matriciale:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y & X \end{pmatrix} \quad (4.74)$$

avendo posto

$$\begin{aligned} X(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_l \left\{ (l+1)(e^{2i\delta_l^+} - 1) + l(e^{2i\delta_l^-} - 1) \right\} P_l(\theta), \\ Y(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_l \left\{ e^{2i\delta_l^+} - e^{2i\delta_l^-} \right\} P'_l(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.75)$$

A questo punto bisogna parlare del riferimento. Parlando di polarizzazione non basta fissare l'asse  $z$  coincidente con  $\mathbf{k}$ , ma bisogna fissare anche gli altri

2 assi, poichè dobbiamo avere un riferimento ben definito per rappresentare i vettori polarizzazione. Si sceglie l'asse  $y$  coincidente con il versore

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}, \quad (4.76)$$

normale al piano di scattering. L'asse  $x$  giace nel piano di scattering, ed è definito in modo che la terna  $xyz$  sia ortogonale destrorsa (figura 4.1).

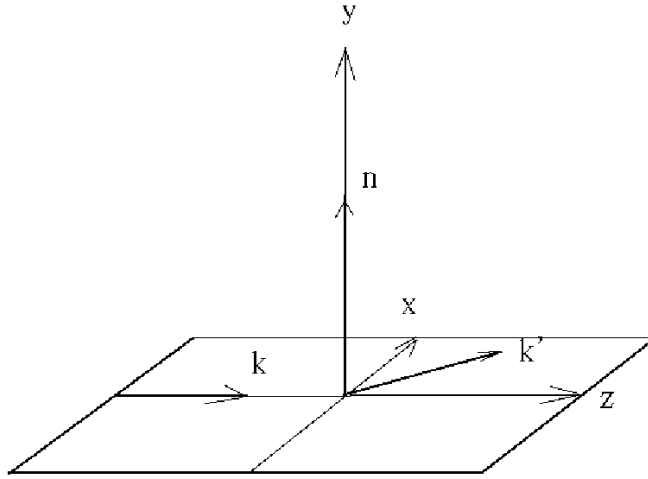


Figura 4.1: Terna di riferimento

Per il calcolo delle espressioni 4.73 conviene esprimere la matrice  $\mathbf{f}$  nella forma

$$\mathbf{f} = A\hat{1} + B\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = A\hat{1} + B\sigma_2, \quad (4.77)$$

avendo tenuto conto che nel nostro riferimento  $\mathbf{n} = \hat{y}$ , e quindi  $\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \sigma_2$ . Per risolvere il sistema 4.74 rispetto ad  $A$  e  $B$ , ricorriamo al solito metodo: calcoliamo prima la  $Tr(\mathbf{f})$  e poi la  $Tr(\mathbf{f}\sigma_2)$ , approfittando delle relazioni di ortonormalità già ricordate. Si ottiene  $X = A$ ,  $Y = iB$ . Conviene quindi far riferimento a una nuova parametrizzazione dell'ampiezza di scattering, ovvero:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{2ik} \sum_l \left\{ (l+1)(e^{2i\delta_l^+} - 1) + l(e^{2i\delta_l^-} - 1) \right\} P_l(\theta), \\ B(\theta) &= \frac{1}{2k} \sum_l \left\{ e^{2i\delta_l^+} - e^{2i\delta_l^-} \right\} P'_l(\theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Adesso il calcolo delle 4.73 richiede un'algebra delle matrici di Pauli, che è descritta in Appendice. Si ottiene la seguente esplicitazione:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 &= |A|^2 + |B|^2, \\
P'_{01} &= P'_{03} = 0, \\
P'_{02} &= \frac{2Re(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2}, \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}'_0) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 (1 + P'_{02}P_2), \\
\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 K_{\lambda\mu} &= \delta_{\lambda\mu} [|A|^2 - (\delta_{\mu 1} - \delta_{\mu 2} + \delta_{\mu 3})|B|^2] + \\
&+ 2Im(AB^*)(\delta_{\lambda 1}\delta_{\mu 3} - \delta_{\lambda 3}\delta_{\mu 1}). \tag{4.79}
\end{aligned}$$

Sostituendo queste espressioni nell'ultima delle 4.73, si ottengono le espressioni dettagliate del vettore polarizzazione in uscita:

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega} P'_1 &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[ \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A|^2 + |B|^2} P_1 + \frac{2Im(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} P_3 \right] \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} P'_2 &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 [P_2 + P'_{02}], \\
\frac{d\sigma}{d\Omega} P'_3 &= \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \left[ \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A|^2 + |B|^2} P_3 - \frac{2Im(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} P_1 \right]. \tag{4.80}
\end{aligned}$$

Queste equazioni, assieme alle 4.74, danno tutti gli osservabili in funzione delle fasi.

–  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$  è funzione solo di  $\theta$ . Se il fascio incidente è impolarizzato la sezione d'urto ha simmetria cilindrica. Infatti in questo caso non esiste un riferimento rispetto al quale valutare  $\varphi$ .

–  $\mathbf{P}'_0 || \mathbf{n}$ . Se il fascio incidente è impolarizzato, il fascio uscente è caratterizzato da un vettore polarizzazione  $\perp$  al piano di scattering. Infatti se  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , lo spazio è scandito da 2 vettori ( $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f$  nel piano di scattering), e 1 pseudovettore ( $\mathbf{n} \perp$  al piano di scattering): quindi  $\mathbf{P}'$ , che è pseudovettore, deve essere rappresentato in  $\mathbf{n}$ .

–  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$  non ha simmetria cilindrica. La dipendenza da  $\varphi$  è portata dal termine  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ . La polarizzazione del fascio incidente porta nella scansione dello spazio una seconda direzione privilegiata oltre a quella data da  $\mathbf{n}$ , e rompe la simmetria cilindrica.

Eseguiamo un doppio scattering, con fascio inizialmente impolarizzato. Supponiamo dapprima che i due scattering non sieno complanari, ma che i due piani di scattering formino un angolo  $\phi$  come in figura 4.2.

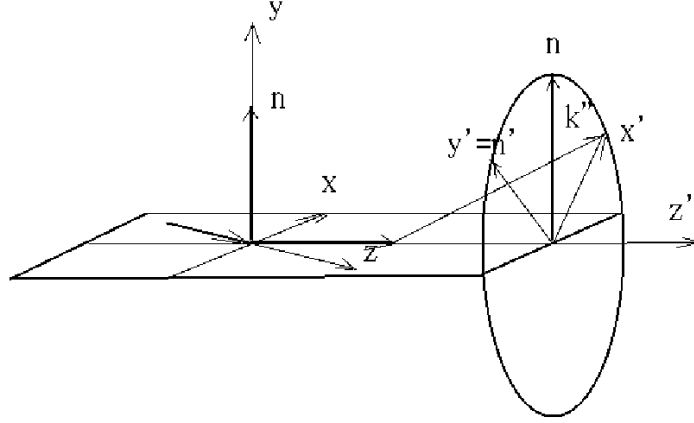


Figura 4.2: Piani di scattering

Il primo processo ha  $\mathbf{P} = 0$ , e quindi:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 = |A|^2 + |B|^2, \\ P'_1 = P'_3 &= 0; \quad P'_2 = \frac{2\text{Re}(AB^*)}{|A|^2 + |B|^2} = U. \end{aligned} \quad (4.81)$$

Il secondo processo ha come polarizzazione entrante la polarizzazione uscente del primo. Questo vettore deve essere però rappresentato nel sistema proprio del secondo scattering, ed è:

$$\mathbf{P} = U(\hat{x}' \sin\phi + \hat{y}' \cos\phi). \quad (4.82)$$

Allora la sezione d'urto è

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)' = \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)'_0 (1 + UU' \cos\phi); \quad \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)'_0 = (|A'|^2 + |B'|^2), \quad (4.83)$$

dove l'apice indica le grandezze relative al secondo scattering.

La polarizzazione in uscita è:

$$P'_1 = \frac{UW' \sin\phi}{1 + U'U \cos\phi}; \quad P'_2 = \frac{U' + U \cos\phi}{1 + U'U \cos\phi}; \quad P'_3 = -\frac{UV' \sin\phi}{1 + U'U \cos\phi}, \quad (4.84)$$

dove si è posto

$$U' = \frac{2\text{Re}(A'B'^*)}{|A'|^2 + |B'|^2}; \quad V' = \frac{2\text{Im}(A'B'^*)}{|A'|^2 + |B'|^2}; \quad W' = \frac{|A'|^2 - |B'|^2}{|A'|^2 + |B'|^2}. \quad (4.85)$$

Chiamiamo convenzionalmente *destra* la situazione in cui i due scattering sono complanari e le particelle vengono rivelate dalla stessa parte ( $\phi = 0$ ). In questo caso la sezione d'urto è:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_d = (|A'|^2 + |B'|^2)(1 + UU'), \quad (4.86)$$

e la polarizzazione uscente:

$$(P'_1)_d = (P'_3)_d = 0; \quad (P'_2)_d = \frac{U' + U}{1 + UU'}. \quad (4.87)$$

A *sinistra* ( $\phi = \pi$ ), si ha invece:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_s = (|A'|^2 + |B'|^2)(1 - UU'),$$

$$(P'_1)_s = (P'_2)_s = 0; \quad (P'_3)_s = \frac{U' - U}{1 - UU'}. \quad (4.88)$$

La polarizzazione in uscita è ovviamente sempre normale al piano di scattering, e nei due casi si somma o si sottrae. Dalle (48a) e (48c) si ricava invece un metodo per misurare il prodotto delle due polarizzazioni tramite una misura di asimmetria destra-sinistra:

$$UU' = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_d - \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_s}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_d + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_s}. \quad (4.89)$$

Con questa misura si determina la polarizzazione del secondo scattering se è nota quella del primo. Se i due processi hanno lo stesso angolo  $\theta$ , e se è ininfluente la differenza energetica (cioè se sono identiche le condizioni dinamiche), la misura consente di determinare  $U^2$ , ovvero la polarizzazione dello scattering a meno del segno.

Quanto detto finora riguarda le connessioni fra gli osservabili e la matrice  $S$  (o le fasi  $\delta$ ). Per concludere questo paragrafo, vogliamo dire qualcosa sull'equazione di Schrödinger, che consente invece la determinazione della funzione d'onda, e quindi delle fasi, dal potenziale.



### 4.3 Le equazioni accoppiate

Torniamo al caso generale (scattering di particelle con spin qualsiasi), ed estendiamo alcuni risultati già ottenuti, al caso di un processo elastico, ma multicanale nel senso dello spin.

Conviene scrivere lo stato delle due particelle libere in uno stato di definito spin di canale. La generalizzazione della 4.16 si scrive facilmente:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\xi | \mathbf{k}s\nu \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{kr} \sum_{lmJ} \langle lms\nu | lsJ, m + \nu \rangle \\ &\mathcal{Y}_{lsJ}^{m+\nu}(\hat{r}, \xi) F_l(kr) Y_l^{m*}(\hat{k}). \end{aligned} \quad (4.90)$$

Scrivere l'espressione dell'onda distorta (relativa all'onda incidente di caratteristiche  $\mathbf{k}s\nu$ ), ovvero generalizzare la 2.58. Bisogna tener conto del fatto che si conserva  $JM$ , e non si conserva in generale  $ls$ ; di conseguenza  $u$  diventa una matrice  $u_{l's',ls}^{(+)J}(k, r)$ , ed opera la connessione del canale di entrata  $ls$ , con stati  $\mathcal{Y}_{l's'J}^{m+\nu}(\hat{r}, \xi)$ :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}\xi | \mathbf{k} + s\nu \rangle &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{kr} \sum_{lmJl's'} \langle lms\nu | lsJ, m + \nu \rangle \\ &Y_l^{m*}(\hat{k}) u_{l's',ls}^{(+)J}(k, r) \mathcal{Y}_{l's'J}^{m+\nu}(\hat{r}, \xi). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Adesso sostituiamo la 4.91 nell'equazione di  $S$ , e teniamo conto di quanto detto a proposito della 2.20. Si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{lmJl's'} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{l'(l'+1)}{r^2} - \mu V \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \\ \langle lms\nu | lsj, m + \nu \rangle \mathcal{Y}_{l's'J}^{m+\nu}(\hat{r}\xi) u_{l's',ls}^{(+)J}(k, r) Y_l^{m*}(\hat{k}) = 0, \end{aligned} \quad (4.92)$$

avendo tenuto conto che  $L^2$  agisce su  $\mathcal{Y}(\hat{r})$ .

La sommatoria su  $lm$  si separa facilmente grazie all'ortogonalità delle  $Y_l^m(\hat{k})$ . Più complesso è il ruolo delle  $\mathcal{Y}_{l's'J}^{m+\nu}(\hat{r}\xi)$ , e quindi l'intervento sulle sommatorie in  $l's'$ . Moltiplichiamo a sinistra per  $\mathcal{Y}_{l''s''J}^{m+\nu*}(\hat{r}\xi)$ , e integriamo in  $d\hat{r} d\xi$ , tenendo conto che l'unico termine che può essere non diagonale in  $ls$  è eventualmente  $V$ , e tenendo conto che

$$\int \mathcal{Y}_{lsJ}^M(\hat{r}\xi) \mathcal{Y}_{l's'J'}^{M'}(\hat{r}\xi) d\xi d\hat{r} = \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{JJ'} \delta_{MM'}, \quad (4.93)$$

come si ricava immediatamente dalle 2.8, 4.5 e dall'ortogonalità dei coefficienti di C.G.

Si ottiene:

$$\sum_{l's'} \left[ \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 - \frac{l'(l'+1)}{r^2} \right) \delta_{l'l''} \delta_{s's''} - \mu < l'' s'' J | V | l' s' J > \right] \times u_{l's',ls}^{(+J)}(k, r) = 0, \quad (4.94)$$

avendo posto

$$< l'' s'' J | V | l' s' J > = \int \mathcal{Y}_{l''s''J}^{M*}(\hat{r}\xi) V(\mathbf{r}\xi) \mathcal{Y}_{l's'J}^M(\hat{r}\xi) d\hat{r}d\xi. \quad (4.95)$$

L'equazione di  $S$  si è trasformata in un set di equazioni differenziali accoppiate: un'equazione per ogni  $l'' s''$ , un set di equazioni per ogni  $J$ .

Per esempio nell'interazione nucleone-nucleone abbiamo  $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$  e quindi due stati di spin di canale  $s = 0, 1$ , cosiddetti di singoletto e tripletto (perchè ammettono una e rispettivamente tre proiezioni). Quindi per ogni  $J > 0$ , e tenendo conto della conservazione della parità, abbiamo 4 stati  $|Jsl >$ : un singoletto  $|J0J >$  ed un tripletto  $|J1J >$  disaccoppiati, e due tripletti  $|J1, J-1 >$ ,  $|J1, J+1 >$ , accoppiati fra loro.

La generalizzazione della 1.70 è:

$$\Psi_{s\nu\mathbf{k}\infty}^{(+)}(\mathbf{r}\xi) = e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \chi_s^\nu(\xi) + \sum_{s'\nu'} \chi_{s'}^{\nu'}(\xi) f_{s'\nu',s\nu}(\hat{r}) \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}. \quad (4.96)$$

La funzione d'onda totale (outgoing), caratterizzata dai numeri quantici  $s\nu$  nello stato iniziale, si scrive come sovrapposizione di un'onda piana nello stato  $s\nu$  di spin di canale, più onde sferiche in tutti gli stati  $s'\nu'$  che possono essere eccitati (e la possibilità di eccitazione dipende dalla 4.95). L'ampiezza di scattering  $f$  è una matrice i cui elementi danno gli accoppiamenti fra l'onda piana entrante  $s\nu$ , e le onde sferiche uscenti  $s'\nu'$  (fra gli  $s'\nu'$  c'è ovviamente anche  $s\nu$ ).

Adesso sostituiamo nella 4.96 la 4.91 e 4.90 (tenendo conto che  $\Psi_{\mathbf{k}}^+(\mathbf{r})\chi_s^\nu(\xi) = (2\pi)^{3/2} < \mathbf{r}\xi | \mathbf{k} + s\nu >$ ), la 4.25 e la 4.19. Sostituiamo quindi la 4.27, che ci serve però in rappresentazione spin di canale, cioè nella forma seguente:

$$f_{s'\nu',s\nu} = \frac{i}{k} \sum_{l'l'J} \sqrt{\pi(2l+1)} Y_{l'l'}^{\nu-\nu'}(\theta, 0) T_{l'l's',ls}^J < l0s\nu | l s J \nu > < l'\nu-\nu' s' \nu' | l' s' J \nu >. \quad (4.97)$$

Procediamo quindi come per la 2.87 (l'obiettivo è infatti quello di ottenere la generalizzazione della 2.87):

$$\frac{4\pi}{kr} \sum_{lmJl's'} < lms\nu | l s J, m + \nu > \mathcal{Y}_{l's'J}^{m+\nu} [u_{l's',ls}^{(+)}]_{\infty} \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\pi}{kr} \sum_{lmJ} \langle lms\nu | lsJ, m + \nu \rangle \mathcal{Y}_{lsJ}^{m+\nu} \frac{e^{i(kr - \frac{l\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l\pi}{2})}}{2i} \delta_{m0} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} + \\
&+ \sum_{s'\nu'} \frac{i}{k} \sum_{lJ'} \sqrt{\pi(2l+1)} Y_{l'}^{\nu-\nu'} \chi_{s'}^{\nu'} \langle l0s\nu | lsJ\nu \rangle \langle l', \nu - \nu', s'\nu' | l's'J\nu \rangle \times \\
&\times (\delta_{ll'} \delta_{ss'} - S_{l's',ls}^J) \frac{e^{ikr}}{r}. \tag{4.98}
\end{aligned}$$

Sviluppiamo ulteriormente aggiungendo nel 1° termine del 2° membro  $\sum_{l's'}$   $\delta_{ll'} \delta_{ss'}$ , e sostituendo  $ls \rightarrow l's'$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{lJ'l's'} \mathcal{Y}_{l's'J}^{\nu} [u_{l's',ls}^{(+)}]_{\infty} &= \sum_{lJ'l's'} \mathcal{Y}_{l's'J}^{\nu} \frac{e^{i(kr - \frac{l'\pi}{2})} - e^{-i(kr - \frac{l'\pi}{2})}}{2i} \delta_{ll'} \delta_{ss'} + \\
&+ \sum_{lJ'l's'} \frac{e^{i(kr - \frac{l'\pi}{2})}}{2i} (S_{l's',ls}^J - \delta_{ll'} \delta_{ss'}) \mathcal{Y}_{l's'J}^{\nu}, \tag{4.99}
\end{aligned}$$

e si trova finalmente

$$[u_{l's',ls}^{+}(kr)]_{\infty} = \frac{i}{2} \left\{ \delta_{ll'} \delta_{ss'} e^{-i(kr - l'\pi/2)} - S_{l's',ls}^J e^{i(kr - l'\pi/2)} \right\}. \tag{4.100}$$

Questa è la generalizzazione della 2.87 e il suo significato è evidente.

Commentiamo adesso brevemente il sistema accoppiato 4.94, e gli elementi di matrice 4.95, dando alcuni esempi. Supponiamo che  $V$  abbia, oltre ad un'eventuale parte centrale, le seguenti componenti vettoriali o tensoriali:

$$V = \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{S}^2). \tag{4.101}$$

Siccome  $\mathcal{Y}$  è autostato di  $\mathbf{J}^2$ ,  $\mathbf{L}^2$ ,  $\mathbf{S}^2$ , usando il membro di destra si ottiene:

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{S} |lsJ\rangle = \frac{1}{2} [J(J+1) - l(l+1) - s(s+1)] |lsJ\rangle, \tag{4.102}$$

e quindi:

$$\langle l's'J | \mathbf{L} \cdot \mathbf{S} |lsJ\rangle = \delta_{ll'} \delta_{ss'} \frac{J(J+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2}. \tag{4.103}$$

Non c'è accoppiamento fra canali, e quindi il set 4.94 si riduce a un'eq. di S. ordinaria. Come è noto, l'accoppiamento tra canali viene invece attuato dal potenziale tensore

$$S_{12} = \frac{3}{r^2} [\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}]_2 \cdot [\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_2]_2 = 8 \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \mathbf{Y}_2(\hat{r}) \cdot [\mathbf{S}_1 \otimes \mathbf{S}_2]_2, \tag{4.104}$$

dove le operazioni si intendono fra tensori sferici irriducibili. Gli elementi di matrice di questo operatore sono:

$$\begin{aligned}
\langle l' s' J | S_{12} | l s J \rangle &= 4\sqrt{(2l+1)(2l'+1)} \cdot \\
&\cdot \sqrt{30s_1s_2(s_1+1)(s_2+1)(2s_1+1)(2s_2+1)(2s+1)(2s'+1)} \\
&\left( \begin{array}{ccc} l' & 2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{ccc} l' & s' & J \\ s & l & 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s' \\ s_1 & s_2 & s \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \right\}. \tag{4.105}
\end{aligned}$$

Più che l'espressione di dettaglio, a noi interessano le regole di selezione contenute nei coefficienti a 3j, 6j e 9j. Devono essere soddisfatte le relazioni triangolare fra i vettori che si accoppiano, ovvero :

$$\begin{array}{ccc}
s_1 & s_2 & s \\
s_1 & s_2 & s' \\
l & s & J \\
l' & s' & J
\end{array} \cdot \tag{4.106}$$

Ciò vuol dire che deve essere  $|s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2$  etc. Ma devono essere anche soddisfatte le relazioni triangolari

$$\begin{array}{ccc}
s & s' & 2 \\
l & l' & 2
\end{array} , \tag{4.107}$$

perchè sia  $ss'$  che  $ll'$ , sono accoppiati fra loro da un tensore di rango 2.

L'ultima relazione, assieme alla conservazione della parità dà la regola di selezione ben nota:

$$l' = l, l \pm 2.$$

In un problema multicanale l'unitarietà della matrice  $S$  vale nella forma più generale 4.21, che riscriviamo:

$$SS^\dagger = 1; \quad \sum_{l's'} S_{ls,l's'}^J S_{l''s'',l's'}^{J*} = \delta_{ll''} \delta_{ss''}, \tag{4.108}$$

e quindi non si può definire una fase reale come nell'equazione 2.75.

Nel caso di due soli canali accoppiati, che è il più semplice, e interessa per esempio l'accoppiamento tensoriale  $S - D$  nell'interazione nucleone-nucleone, si può dimostrare che la più generale matrice  $2 \times 2$ , unitaria simmetrica, può essere messa nella forma seguente (indicando globalmente con un indice  $\alpha = 1, 2$  i due canali):

$$\begin{aligned} S_{11} &= \rho e^{2i\delta_1}, & (10.62a) \\ S_{12} &= S_{21} = i\sqrt{1 - \rho^2} e^{i(\delta_1 + \delta_2)} & (10.62b) \\ S_{22} &= \rho e^{2i\delta_2}, & (4.109) \end{aligned}$$

in funzione dei 3 parametri  $\rho$ ,  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Poichè  $\rho$  deve essere compreso fra 0 ed 1, si può porre:

$$\rho = \cos 2\epsilon, \quad (4.110)$$

ottenendo una parametrizzazione della matrice  $S$ , detta di Stapp.

Un'altra procedura usata in letteratura, è quella di diagonalizzare la matrice (unitaria simmetrica)  $S$ , tramite una trasformazione unitaria  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{S}_{\text{diag}}. \quad (4.111)$$

Per la matrice  $\mathbf{U}$  si può usare la forma

$$\mathbf{U} = \begin{vmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon \end{vmatrix}, \quad (4.112)$$

dove  $\epsilon$  rappresenta l'angolo della rotazione che diagonalizza  $\mathbf{S}$ , ed è detto parametro di mixing. La  $\mathbf{S}_{\text{diag}}$  si può porre nella forma

$$\mathbf{S}_{\text{diag}} = \begin{vmatrix} e^{2i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2i\beta} \end{vmatrix}, \quad (4.113)$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono dette autofasi.

I parametri  $\epsilon$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  si ricavano in base alle seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} tg\epsilon &= \frac{\rho \sin(\delta_2 - \delta_1) \pm \sqrt{\Delta}}{\sqrt{1 - \rho^2}}, \\ \alpha &= \delta_1 + \arctg \frac{\frac{\rho}{2} \sin^2(\delta_2 - \delta_1) \pm \cos(\delta_2 - \delta_1) \sqrt{\Delta}}{\rho \cos^2(\delta_2 - \delta_1) \mp \sin(\delta_2 - \delta_1) \sqrt{\Delta}} \\ \beta &= \delta_2 - \arctg \frac{\frac{\rho}{2} \sin^2(\delta_2 - \delta_1) \pm \cos(\delta_2 - \delta_1) \sqrt{\Delta}}{\rho \cos^2(\delta_2 - \delta_1) \mp \sin(\delta_2 - \delta_1) \sqrt{\Delta}} \\ \Delta &= 1 - [\rho \cos(\delta_2 - \delta_1)]^2. \end{aligned} \quad (4.114)$$

La doppia scelta di segno corrisponde ad un'ambiguità intrinseca nella soluzione del problema.

Questo metodo di diagonalizzazione la matrice è stato introdotto da Blatt e Biedenharn.

# Capitolo 5

## Scattering elastico e inelastico fra particelle dotate di struttura

### 5.1 Il problema tridimensionale

Consideriamo l'interazione di un proiettile "elementare" con un bersaglio dotato di struttura interna (questa è una semplificazione: la generalizzazione al caso in cui ambedue le particelle sono eccitabili implica complicazioni, ma non presenta difficoltà di principio).

Descriviamo il sistema con un hamiltoniano totale

$$H = \mathcal{H}_0 + V; \mathcal{H}_0 = H_0 + H_t, \quad (5.1)$$

dove  $H_0$  = è l'energia cinetica del moto relativo,  $H_t$  = è l'hamiltoniano di targhetta e  $V$  = il potenziale di interazione.

L'equazione di  $S$  di targhetta

$$H_t \chi_\alpha(\xi) = \mathcal{E}_\alpha \chi_\alpha(\xi), \quad (5.2)$$

definisce gli autostati  $\chi_\alpha$  e gli autovalori  $\mathcal{E}_\alpha$  di targhetta. Con  $\alpha$  indichiamo collettivamente tutti i numeri quantici che individuano lo stato di targhetta, mentre  $\xi$  indica genericamente le variabili interne.

Supponiamo che gli stati  $\chi$  formino un set ortonormale completo:

$$\sum_\alpha \chi_\alpha^*(\xi) \chi_\alpha(\xi') = \delta(\xi - \xi'); \int \chi_\alpha^*(\xi) \chi_\alpha(\xi) d\xi = \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (5.3)$$

Qui è implicita l'ipotesi che non ci sia uno spettro continuo di targhetta, ossia che la targhetta si possa eccitare ma non rompere.

Per affrontare concreti problemi fenomenologici si tronca opportunamente lo sviluppo in canali, assumendo però sempre valida la completezza 5.3. Questa è ovviamente un'approssimazione, la cui correttezza deve essere verificata caso per caso. Siamo in una fisica di modello.

La filosofia che sta sotto queste procedure è che se il troncamento non è troppo severo, provoca solo piccole perturbazioni che possono essere compensate con piccole variazioni nell'interazione, che è di solito un'interazione fenomenologica. In altre parole l'interazione è "efficace", e compensa i difetti delle approssimazioni introdotte.

I dettagli dell'equazione 5.2 sono la spettroscopia. La spettroscopia è una teoria che descrive il comportamento del nucleo bersaglio e dei suoi livelli fino al break-up. Questa teoria deve dare autofunzioni e autovalori per tutti i livelli. L'anello di congiunzione fra dinamica e spettroscopia è dato dall'equazione 5.2, e dalla definizione dell'interazione (vedi più avanti l'equazione 5.16) capace di connettere fra loro i diversi canali. Noi ci occupiamo della dinamica, e rimandiamo ad altri testi per la spettroscopia.

Per scrivere l'equazione di  $S$  libera del moto relativo, bisogna specificare in quale stato si trova il bersaglio. Per esempio:

$$H_0\varphi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) = E_\alpha\varphi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) ; \varphi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_\alpha\mathbf{r}}/(2\pi)^{3/2}, \quad (5.4)$$

rappresenta il moto relativo del proiettile, rispetto al bersaglio eccitato allo stato  $\alpha$ .  $E_\alpha$  e  $k_\alpha = \sqrt{\mu E_\alpha}$ , sono energia e momento del moto relativo, e lo stato  $\varphi_\alpha$  è uno stato di onda piana. La coordinata  $\mathbf{r}$  ha sempre il significato 1.2, essendo adesso  $\mathbf{r}_2$  la coordinata del baricentro della targhetta non puntiforme.

Lo stato completo è il prodotto diretto degli stati di moto relativo e di targhetta:

$$\phi_\alpha(\xi, \mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) = \chi_\alpha(\xi)\varphi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}), \quad (5.5)$$

e soddisfa l'equazione di  $S$  libera di canale

$$\mathcal{H}_0\phi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha\mathbf{r}\xi) = E\phi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha\mathbf{r}\xi); \quad (5.6)$$

dove

$$E = E_\alpha + \mathcal{E}_\alpha = E_\beta + \mathcal{E}_\beta = \dots, \quad (5.7)$$

è l'energia totale, che si conserva.

Essendo lo spettro  $\mathcal{E}_1\mathcal{E}_2\dots$  noto, il parametro  $E$  (energia totale), fissa tutte le energie di canale, tramite la legge di conservazione 5.7; quindi tutto dipende da  $k$ .

Più precisamente il significato della 5.6 è il seguente

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0\phi_\alpha(\xi, \mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) &= (H_t + H_0)\chi_\alpha(\xi)\varphi_\alpha(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) = \\ &= (H_t \otimes 1_0)\chi_\alpha\varphi_\alpha + (1_t \otimes H_0)\chi_\alpha\varphi_\alpha = (\mathcal{E}_\alpha + E_\alpha)\chi_\alpha\varphi_\alpha = E\phi_\alpha,\end{aligned}\quad (5.8)$$

dove  $1_0$  e  $1_t$  rappresentano l'unità nello spazio di moto relativo e di targhetta, rispettivamente.

Nel seguito sviluppi di questo genere verranno sottintesi.

Si osservi che più in generale, se indico con  $\mathbf{p}$  una variabile momento, si avrà:

$$\mathcal{H}_0\chi_\alpha(\xi)e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = (\mathcal{E}_\alpha + E_p)\chi_\alpha(\xi)e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}; \quad E_p = p^2/\mu. \quad (5.9)$$

Seguendo la consuetudine, contrassegniamo con  $\alpha = 1$  il canale elastico (in cui il bersaglio è nel suo stato fondamentale) e scriviamo:

$$\mathcal{E}_1 = 0, \quad E_1 \equiv E. \quad (5.10)$$

Questa definizione è un po' anomala, perchè implica  $\mathcal{E}_\alpha(\alpha > 1) > 0$  per tutti gli stati di targhetta. La convenzione più corretta sarebbe quella di porre  $\mathcal{E} = 0$  dove comincia il continuo di targhetta, ovvero all'energia di break-up, in modo che tutti gli stati legati abbiano energia negativa.

La convenzione adottata è non però contraddittoria, nell'ambito dell'ipotesi di targhetta non frantumabile.

Fino ad avviso contrario, supporremo tutti i canali aperti, ovvero  $E_\alpha > 0$  (e quindi  $E > \mathcal{E}_\alpha$ ) per tutti gli  $\alpha$ .

Adesso consideriamo il problema completo

$$H\Psi_1^+(\xi, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = E\Psi_1^+(\xi, \mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (5.11)$$

L'indice 1 vuol dire che le condizioni al contorno sono di onde entranti di argomento  $\mathbf{k}$  nel canale 1.

Sviluppiamo  $\Psi_1^+$  in autostati di targhetta:

$$\Psi_1^+(\xi, \mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sum_\alpha \chi_\alpha(\xi)\psi_{\alpha 1}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (5.12)$$

Attenzione!  $\psi_{\alpha 1}^+$  è la componente su  $\alpha$  della  $\psi$  totale, in un problema con onde entranti nel canale 1. Bisogna ricordare la definizione, perchè la matrice  $\psi$  è non simmetrica negli indici  $\alpha 1$ .

Tenendo conto della 5.3 si trova immediatamente:

$$\psi_{\alpha 1}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \int \psi_1^+(\xi, \mathbf{k}, \mathbf{r})\chi_\alpha^*(\xi)d\xi. \quad (5.13)$$



Sostituiamo lo sviluppo 5.12 nella 5.11:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha} (H_0 + H_t + V - E) \psi_{\alpha 1}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \chi_{\alpha}(\xi) = \\ & = \sum_{\alpha} (H_0 + V - E_{\alpha}) \psi_{\alpha 1}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) \chi_{\alpha}(\xi) = 0, \end{aligned} \quad (5.14)$$

avendo tenuto conto delle equazioni 5.2 e 5.7.

Moltiplicando a sinistra per  $\chi_{\beta}^*(\xi)$  e integrando in  $d\xi$ , si ottiene infine il set accoppiato

$$\sum_{\alpha} [(H_0 - E_{\alpha}) \delta_{\beta\alpha} + V_{\beta\alpha}(r)] \psi_{\alpha 1}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0, \quad (5.15)$$

avendo posto

$$V_{\beta\alpha}(r) = \int \chi_{\beta}^*(\xi) V(r\xi) \chi_{\alpha}(\xi) d\xi. \quad (5.16)$$

Adesso possiamo generalizzare, considerando un problema con onde entranti in un generico canale  $\gamma$ , anzichè nel canale 1. Si ottiene

$$\sum_{\alpha} [(H_0 - E_{\alpha}) \delta_{\beta\alpha} + V_{\beta\alpha}(r)] \psi_{\alpha\gamma}^+(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0, \quad (5.17)$$

una equazione per ogni  $\beta$ ; un set per ogni  $\gamma$ .

L'equazione può essere scritta in forma matriciale nello spazio di canale:

$$[(H_0 - E)\mathbf{1} + \mathbf{V}(r)] \mathbf{\Psi}^+ = 0. \quad (5.18)$$

Facciamo adesso un po' di formalizzazione. Scriviamo le relazioni di interesse che definiscono gli stati su cui operiamo nei diversi spazi.

Nel sottospazio di targhetta:

$$\begin{aligned} \langle \xi | \alpha \rangle &= \chi_{\alpha}(\xi), \\ \sum_{\alpha} |\alpha \rangle \langle \alpha| &= \mathbf{1}; \quad \langle \alpha | \beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}, \\ \int |\xi \rangle d\xi \langle \xi| &= \mathbf{1}; \quad \langle \xi | \xi' \rangle = \delta(\xi - \xi'), \\ H_t |\alpha \rangle &= \mathcal{E}_{\alpha} |\alpha \rangle. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Nello spazio completo, in rappresentazione momento o coordinate:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 |\alpha \mathbf{p} \rangle &= (\mathcal{E}_{\alpha} + E_p) |\alpha \mathbf{p} \rangle; \quad E_p = p^2/\mu, \\ \langle \xi \mathbf{r} | \alpha \mathbf{p} \rangle &= \chi_{\alpha}(\xi) e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} / (2\pi)^{\frac{3}{2}}, \\ \int \sum_{\alpha} |\alpha \mathbf{p} \rangle d\mathbf{p} \langle \alpha \mathbf{p}| &= \mathbf{1}; \quad \int |\mathbf{r}\xi \rangle d\mathbf{r} d\xi \langle \mathbf{r}\xi| = \mathbf{1}, \\ \langle \alpha \mathbf{p} | \beta \mathbf{q} \rangle &= \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}); \quad \langle \mathbf{r}\xi | \mathbf{r}'\xi' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(\xi - \xi'), \\ \langle \beta \mathbf{r} | \alpha \mathbf{p} \rangle &= \delta_{\alpha\beta} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} / (2\pi)^{\frac{3}{2}}, \\ \int \sum_{\alpha} |\alpha \mathbf{r} \rangle d\mathbf{r} \langle \alpha \mathbf{r}| &= \mathbf{1}; \quad \langle \alpha \mathbf{r} | \beta \mathbf{r}' \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Andiamo adesso allo spazio di  $H$ :

$$\langle \xi \mathbf{r} | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle = \Psi_\alpha^+(\xi \mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}) / (2\pi)^{\frac{3}{2}}, \quad (5.21)$$

è la funzione d'onda completa, con condizioni al contorno di onde entranti di momento  $\mathbf{k}_\alpha$  nel canale  $\alpha$ . L'equazione 5.11 (con la generalizzazione  $1 \rightarrow \alpha$ ), si scrive formalmente:

$$H | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle = E | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle; \quad E = \frac{k_\alpha^2}{\mu} + \mathcal{E}_\alpha. \quad (5.22)$$

Infine lo sviluppo 5.12 si ottiene inserendo una completezza di tipo 5.20:

$$| \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle = \int \sum_\beta | \beta \mathbf{r}' \rangle d\mathbf{r}' \langle \beta \mathbf{r}' | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle. \quad (5.23)$$

Proiettiamo sulle coordinate:

$$\begin{aligned} \langle \xi \mathbf{r} | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle &= \int \sum_\beta \langle \xi \mathbf{r} | \beta \mathbf{r}' \rangle d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r}' \beta | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle = \\ &= \sum_\beta \chi_\beta(\xi) \psi_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}) / (2\pi)^{3/2}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

avendo posto

$$\langle \beta \mathbf{r} | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle = \psi_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}) / (2\pi)^{3/2}. \quad (5.25)$$

Ciò premesso, l'equazione di L.S., relativa alla separazione  $H = \mathcal{H}_0 + V$ , con condizioni al contorno di onde entranti nel canale  $\alpha$ , si scrive:

$$| \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle = | \alpha \mathbf{k}_\alpha \rangle + \frac{1}{E^+ - \mathcal{H}_0} V | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle. \quad (5.26)$$

Dalla prima delle 5.20 si ricava immediatamente l'operatore inverso:

$$\frac{1}{E^+ - \mathcal{H}_0} | \alpha \mathbf{p} \rangle = \frac{1}{E_\alpha^+ - p^2/\mu} | \alpha \mathbf{p} \rangle. \quad (5.27)$$

Quindi partiamo dalla 5.26, proiettiamo su  $\langle \beta \mathbf{r} |$ , inseriamo tre completezze di tipo 5.20, sviluppiamo  $| \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle$  nel secondo membro come in 5.24, e troviamo:

$$\begin{aligned} \langle \beta \mathbf{r} | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle &= \langle \beta \mathbf{r} | \alpha \mathbf{k}_\alpha \rangle + \\ &+ \int \sum_{\beta\gamma} \langle \mathbf{r} \beta | \frac{1}{E^+ - \mathcal{H}_0} | \beta \mathbf{p} \rangle d\mathbf{p} \langle \beta \mathbf{p} | \xi'' \mathbf{r}'' \rangle d\xi'' d\mathbf{r}'' \\ &\langle \xi'' \mathbf{r}'' | V | \xi' \mathbf{r}' \rangle d\xi' d\mathbf{r}' \langle \xi' \mathbf{r}' | \gamma \mathbf{r}' \rangle \langle \gamma \mathbf{r}' | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Sviluppiamo separatamente alcuni pezzi:

$$\langle \mathbf{r}\beta | \frac{1}{E^+ - \mathcal{H}_0} | \eta \mathbf{p} \rangle = \frac{\delta_{\eta\beta}}{E_\beta^+ - \frac{p^2}{\mu}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}}. \quad (5.29)$$

Se si suppone  $V$  locale:

$$\langle \xi'' \mathbf{r}'' | V | \xi' \mathbf{r}' \rangle = \delta(\xi'' - \xi') \delta(\mathbf{r}'' - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}' \xi'). \quad (5.30)$$

Abbiamo poi

$$\langle \beta \mathbf{r} | \alpha \mathbf{k}_\alpha \rangle = \delta_{\beta\alpha} e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}} / (2\pi)^{3/2}. \quad (5.31)$$

Sostituendo e sviluppando si ottiene:

$$\begin{aligned} \Psi_{\beta\alpha}^+(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}) &= \delta_{\beta\alpha} e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}} + \int \sum_\gamma \frac{1}{E_\beta^+ - \frac{p^2}{\mu}} \chi_\beta^*(\xi') \\ &e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} d\mathbf{p} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}'} (2\pi)^{-\frac{3}{2}} V(\xi' \mathbf{r}') d\xi' d\mathbf{r}' \chi_\gamma(\xi') \Psi_{\gamma\alpha}^+(\mathbf{k}_\alpha, \mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (5.32)$$

Ricordiamo le 1.57, 1.63 che si estendono facilmente a questo caso, ovvero:

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{E_\beta^+ - p^2/\mu} d\mathbf{p} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{ik_\beta|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = G_{0\beta}^+(k_\beta, \mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (5.33)$$

Otteniamo finalmente, ricordando anche la 5.16:

$$\psi_{\beta\alpha}^+(\mathbf{r}, \mathbf{k}_\alpha) = \delta_{\beta\alpha} e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}} + \int \sum_\gamma G_{0\beta}^+(k_\beta \mathbf{r}\mathbf{r}') V_{\beta\gamma}(r') d\mathbf{r}' \psi_{\gamma\alpha}^+(\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}'), \quad (5.34)$$

che è la forma esplicita dell'equazione di L.S di canale.

Rifacendo gli sviluppi asintottici 1.69 e segg., si ricavano le espressioni asintotiche per  $r \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \psi_{\beta\alpha\infty}^+(\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}) &= \delta_{\beta\alpha} e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}} + \frac{e^{ik_\beta r}}{r} f_{\beta\alpha}(\theta), \\ f_{\beta\alpha}(\theta) &= -\frac{\mu}{4\pi} \int \sum_\gamma e^{-ik'_\beta \mathbf{r}'} V_{\beta\gamma}(r') \psi_{\gamma\alpha}^+(\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \end{aligned} \quad (5.35)$$

dove  $\mathbf{k}'_\beta$  è un momento di modulo  $k_\beta$  e direzione  $\mathbf{r}$ , ovvero è il momento uscente nel canale  $\beta$ .

In modo del tutto equivalente si può scrivere l'andamento asintottico della funzione d'onda completa come segue:

$$\Psi_{\alpha\infty}(\mathbf{k}, \mathbf{r}, \xi) = \chi_\alpha(\xi) e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}} + \sum_\beta f_{\beta\alpha}(\theta) \chi_\beta(\xi) \frac{e^{ik_\beta r}}{r}. \quad (5.36)$$

Tramite questa equazione è facile generalizzare le 1.79 e seguenti, per dedurre la sezione d'urto.

Per il calcolo del flusso incidente nel canale  $\alpha$ , abbiamo:

$$\Psi_{inc}^{(\alpha)} = \chi_\alpha(\xi) e^{i\mathbf{k}_\alpha \mathbf{r}}. \quad (5.37)$$

Nel prodotto scalare che compare in 1.82 si deve intendere anche un'integrazione nelle variabili interne di targhetta per cui, grazie all'ortonormalità 5.3 si ottiene un risultato molto simile a 1.86, ovvero:

$$\mathbf{J}_{inc}^{(\alpha)} = \frac{\hbar \mathbf{k}_\alpha}{m} = \mathbf{v}_\alpha. \quad (5.38)$$

Per quanto riguarda il flusso scatterato abbiamo:

$$d\Phi(\mathbf{J}_{scat}^{(\alpha)}) = Re \left[ \sum_{\beta\gamma} \int f_{\beta\alpha}^*(\theta) \chi_\beta^*(\xi) \frac{e^{-ik_\beta r}}{r} \frac{\hbar}{mi} f_{\gamma\alpha}(\theta) \chi_\gamma(\xi) D_r \frac{e^{ik_\gamma r}}{r} d\xi r^2 d\Omega \right]. \quad (5.39)$$

Grazie all'ortonormalità 5.3, abbiamo:

$$d\Phi(\mathbf{J}_{scat}^{(\alpha)}) = \sum_{\beta} \frac{\hbar k_\beta}{m} |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2 d\Omega. \quad (5.40)$$

Otteniamo così la sezione d'urto per onde entranti nel canale  $\alpha$ :

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right]_\alpha = \sum_{\beta} \frac{k_\beta}{k_\alpha} |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2. \quad (5.41)$$

Possiamo scrivere anche:

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right]_\alpha = \sum_{\beta} \left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right]_{(\beta\alpha)}, \quad (5.42)$$

avendo posto

$$\left[ \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \right]_{(\beta\alpha)} = \frac{k_\beta}{k_\alpha} |f_{\beta\alpha}(\theta)|^2. \quad (5.43)$$

Questa è la sezione d'urto per la transizione dal canale  $\alpha$  al canale  $\beta$ , ed è misurabile se si sa discriminare l'energia in uscita, ovvero discriminare i canali. Si osservi che in questo caso i momenti entrante ed uscente non si elidono perchè sono diversi.

Adesso formalizziamo la 5.35 come la 1.124:

$$f_{\beta\alpha} = -2\pi^2 \mu \int \sum_{\gamma} \langle \mathbf{k}'_{\beta} | V | \gamma \mathbf{r}' \rangle d\mathbf{r}' \langle \mathbf{r}' \gamma | \alpha \mathbf{k}_\alpha + \rangle, \quad (5.44)$$

e leviamo le completezze:

$$f_{\beta\alpha} = -2\pi^2\mu \langle \mathbf{k}'_{\beta} | V | \alpha \mathbf{k}_{\alpha} \rangle . \quad (5.45)$$

Definiamo le matrici  $\Omega$  e  $T$ :

$$|\alpha \mathbf{k}_{\alpha} \rangle = \Omega_+ |\alpha \mathbf{k}_{\alpha} \rangle ; V \Omega_+ = T. \quad (5.46)$$

Il significato della seconda delle 5.46 è il seguente:

$$\langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | T | \beta \mathbf{k}_{\beta} \rangle = \int \sum_{\gamma} \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | V | \gamma \mathbf{p} \rangle d\mathbf{p} \langle \gamma \mathbf{p} | \Omega_+ | \beta \mathbf{k}_{\beta} \rangle . \quad (5.47)$$

Riscriviamo la  $f$  in funzione della  $T$ :

$$f_{\beta\alpha} = -2\pi^2\mu \langle \mathbf{k}'_{\beta} | T | \alpha \mathbf{k}_{\alpha} \rangle . \quad (5.48)$$

Riprendiamo l'eq. di L.S. di canale 5.26, e scriviamone la soluzione formale:

$$|\alpha \mathbf{k}_{\alpha} \pm \rangle = |\alpha \mathbf{k}_{\alpha} \rangle + \frac{1}{E^{\pm} - H} V |\alpha \mathbf{k}_{\alpha} \rangle . \quad (5.49)$$

Confrontando questa con la prima delle 5.46, possiamo ricavare gli operatori  $\Omega$  e  $T$ :

$$\Omega_+ = 1 + \frac{1}{E^+ - H} V ; T = V + V \frac{1}{E^+ - H} V. \quad (5.50)$$

Possiamo adesso definire la matrice  $S$ , con procedura molto simile a quella usata per le 1.159 e segg.

Consideriamo la 5.49 outgoing bra, e proiettiamo su  $|\beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle$ :

$$\langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} - | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle = \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle + \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | V \frac{1}{E^+ - H} | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle . \quad (5.51)$$

Sostituiamo la 5.26 al 1° termine del 2° membro:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} - | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle &= \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle + \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | \frac{1}{E'^+ - \mathcal{H}_0} V | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle \\ &\langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | V \frac{1}{E^+ - H} | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle . \end{aligned} \quad (5.52)$$

Gli operatori vanno fatto agire ciascuno sul proprio autostato, e si trova:

$$\langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} - | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle = \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | \beta \mathbf{k}_{\beta} \rangle + \left( \frac{1}{E'^+ - E} + \frac{1}{E^+ - E'} \right) \langle \alpha \mathbf{k}_{\alpha} | V | \beta \mathbf{k}'_{\beta} \rangle . \quad (5.53)$$

Ricordiamo la 1.168, ed abbiamo:

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha - |\beta \mathbf{k}'_\beta \rangle = \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | \beta \mathbf{k}'_\beta \rangle - 2\pi i \delta(E - E') \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | V | \beta \mathbf{k}'_\beta \rangle = \\
& = \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | 1 - 2\pi i \delta(E - E') T | \beta \mathbf{k}'_\beta \rangle = \\
& = \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | S | \beta \mathbf{k}'_\beta \rangle, \tag{5.54}
\end{aligned}$$

avendo fatto uso anche delle 5.46. Ciò definisce la matrice  $S$ :

$$S = 1 - 2\pi i \delta(E - E') T. \tag{5.55}$$

Questa è identica alla 1.170; ma si intende che  $S$  è una matrice nello spazio di canale. Le proprietà fondamentali di ortonormalità degli stati, e unitarietà della matrice  $S$ , si scrivono come segue:

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | \beta \mathbf{k}'_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k}_\alpha - \mathbf{k}'_\alpha) = \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha \pm | \beta \mathbf{k}'_\beta \pm \rangle, \\
& \sum_\alpha |\alpha \mathbf{p} \pm \rangle d\mathbf{p} \langle \alpha \mathbf{p} \pm | + \sum_{n\alpha} |n\alpha \rangle \langle n\alpha| = 1, \\
& \sum_\gamma \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | S | \gamma \mathbf{p} \rangle d\mathbf{p} \langle \gamma \mathbf{p} | S^\dagger | \beta \mathbf{k}'_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(\mathbf{k}_\alpha - \mathbf{k}'_\alpha), \tag{5.56}
\end{aligned}$$

essendo sempre sottintesa una notazione del tipo:

$$\begin{aligned}
\mu k^2 &= \mu k_\alpha^2 + \mathcal{E}_\alpha = \mu k_\beta^2 + \mathcal{E}_\beta = \dots \\
\mu(k')^2 &= \mu(k'_\alpha)^2 + \mathcal{E}_\alpha = \mu(k'_\beta)^2 + \mathcal{E}_\beta = \dots
\end{aligned}$$

Nel caso più generale di riarrangiamento, si ha l'ulteriore complicazione che  $\mu$  dipende dall'indice di canale  $\alpha, \beta, \dots$

L'ultima formula specifica il significato dell'unitarietà di  $S$ , che si può scrivere in forma matriciale

$$\mathbf{S} \mathbf{S}^\dagger = \mathbf{1}. \tag{5.57}$$

Scriviamo adesso la generalizzazione del teorema ottico. La 5.55 può risciversi formalmente introducendo l'operatore  $\mathcal{H}_0$ :

$$S = 1 - 2\pi i \delta(E - \mathcal{H}_0) T. \tag{5.58}$$

È facile arrivare a una forma analoga alla 1.180, salvo la natura matriciale degli operatori, e il diverso significato dell'hamiltoniano imperturbato:

$$\mathbf{T}^\dagger - \mathbf{T} = 2\pi i \mathbf{T}^\dagger \delta(E - \mathcal{H}_0) \mathbf{T}. \tag{5.59}$$

Questo è il teorema ottico generalizzato, scritto in termini di matrice  $T$ . Scriviamo esplicitamente un termine diagonale della 5.59:

$$\begin{aligned}
& \langle \alpha \mathbf{k}_\alpha | T^\dagger - T | \alpha \mathbf{k}_\alpha \rangle = 2\pi i \\
& \int \sum_{\beta\gamma} \langle \beta \mathbf{p} | T | \alpha \mathbf{k}_\alpha \rangle^* d\mathbf{p} \langle \beta \mathbf{p} | \delta(E - \mathcal{H}_0) | \gamma \mathbf{q} \rangle d\mathbf{q} \langle \gamma \mathbf{q} | T | \alpha \mathbf{k}_\alpha \rangle \tag{5.60}
\end{aligned}$$

Adesso si sviluppa come la 1.180, tenendo conto che:

$$\begin{aligned} < \beta p | \delta(E - \mathcal{H}_0) | \gamma \mathbf{q} > = \delta_{\beta\gamma} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \delta(E - E_p - \mathcal{E}_\beta) = \\ &= \delta_{\beta\gamma} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{\mu}{2k_\beta} \delta(p - k_\beta). \end{aligned} \quad (5.61)$$

Si ottiene:

$$-2Im(< \alpha \mathbf{k}_\alpha | T | \alpha \mathbf{k}_\alpha >) = \mu\pi \sum_{\beta} k_\beta \int | < \beta \mathbf{k}_\beta | T | \alpha \mathbf{k}_\alpha > |^2 d\hat{k}_\beta, \quad (5.62)$$

dove con  $\mathbf{k}_\beta$  si intende un momento di modulo  $k_\beta$ , e sulle cui coordinate angolari si integra. Con riferimento alla 5.43 definiamo la sezione d'urto totale integrale (per il processo con particelle entranti nel canale  $\alpha$ )

$$\sigma_\alpha^{(t)} = \sum_{\beta} \frac{k_\beta}{k_\alpha} \int \left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\beta\alpha} d\Omega, \quad (5.63)$$

e usiamo la 5.48. Si ottiene finalmente:

$$4\pi Im(f_{\alpha\alpha}(0^\circ)) = k_\alpha \sigma_\alpha^{(t)}, \quad (5.64)$$

che è il teorema ottico nella sua forma più generale (generalizzazione della 1.185):

*La parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti per il processo elastico, è proporzionale alla sezione d'urto totale integrale.*

Finora abbiamo supposto tutti i canali aperti. Consideriamo adesso il caso più generale, indicato in figura 5.1.

Per  $\alpha = 1, 2, \dots, \beta - 1$  (canali aperti), è  $E_\alpha = E - \mathcal{E}_\alpha > 0$ , e quindi  $k_\alpha$  reale.

Per  $\alpha \geq \beta$  (canali chiusi) è invece  $E_\alpha < 0$ , e quindi:

$$k_\alpha = \sqrt{\mu(E - \mathcal{E}_\alpha)} = i\sqrt{\mu|E - \mathcal{E}_\alpha|} = i|k_\alpha|. \quad (5.65)$$

Il canale  $\alpha = 1$  (sempre aperto), è il canale "input" per eccellenza.

Ma qualsiasi canale aperto ( $\alpha \geq \beta$ ) può essere assunto come canale di input.

In questo caso  $S$  è una matrice nel solo sottospazio dei canali aperti. Infatti nella 5.35,  $\alpha$  deve essere aperto per definizione (perchè per definizione lì ci sono onde entranti dall' $\infty$ ), ma  $\beta$  può essere chiuso. In questo caso, essendo  $E_\beta < 0$ , possiamo scrivere  $E_\beta = -|E_\beta|$ , e  $k_\beta = i|k_\beta|$ . Allora la 5.33 diventa:

$$-\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{|E_\beta| + p^2/\mu} d\mathbf{p} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{e^{-|k_\beta||\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (5.66)$$

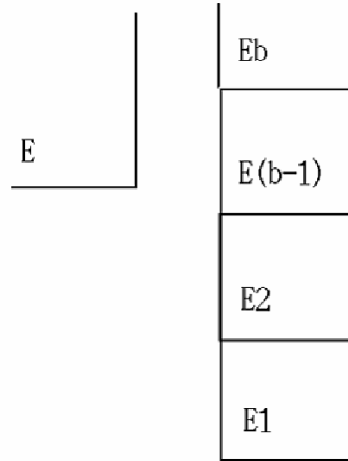


Figura 5.1: Canali di scattering

L'integrale si risolve facilmente poichè non ci sono più poli, e perde quindi significato la specificazione  $\pm$ . La 5.33 mantiene la sua validità formale con la sostituzione  $E_\beta = -|E_\beta|$ , e  $k_\beta = i|k_\beta|$ . Conseguentemente mantengono la loro validità anche le 5.35, con le stesse sostituzioni. Poichè la funzione circolare è sostituita da un esponenziale negativo, nel canale  $\beta$  l'onda uscente non arriva all' $\infty$ . Quindi nella 5.35  $f_{\beta\alpha}$  va calcolato solo per  $\beta, \alpha$  aperti. Però nel secondo membro la  $\sum_\gamma$  va su tutti i  $\gamma$ , aperti e chiusi (perchè quella  $\sum_\gamma$  deriva da una completezza che vale su tutto lo spazio di canale). Quindi  $f_{\beta\alpha}$  è una matrice nel solo sottospazio dei canali aperti, ma contiene tutte le  $\psi_{\gamma\alpha}$ , per  $\gamma$  che corre su tutti i canali (aperti e chiusi).

Anche i canali chiusi contribuiscono alla sezione d'urto.

## 5.2 Sviluppo in stati sIj

Abbiamo visto che la presenza dello spin è sufficiente a trasformare l'equazione di Schrödinger in un set di equazioni accoppiate, se ci sono interazioni spin-dependent. In quel caso però l'interazione resta elastica, e si conserva l'energia cinetica.



Il caso considerato in questo capitolo descrive un vero processo anelastico, in cui il bersaglio può essere eccitato e non si conserva l'energia cinetica, ma l'energia totale. In questo caso i canali sono energeticamente distinguibili. La descrizione fatta nel precedente paragrafo è però globale. Si tratta adesso di considerare gli sviluppi multipolari, e l'accoppiamento del momento angolare orbitale con gli eventuali spin di targhetta e proiettile. Si tratta cioè di vestire quella parte molto formale, in modo da arrivare a equazioni esecutive.

Il problema si complica notevolmente (si può dire che si va a un secondo ordine di complicazioni), anche perchè bisogna tener conto che ogni stato eccitato della targhetta ha il suo spin e parità.

*Per motivi di semplicità in tutto questo paragrafo torneremo all'ipotesi di canali tutti aperti.*

Per concludere questo discorso generale, ricordiamo che nei capitoli successivi, passeremo all'ulteriore generalizzazione di reazione nucleare con riarrangiamento, ovvero al caso in cui le due particelle nello stato finale sieno diverse da quelle nello stato iniziale. In questo caso stato iniziale e finale si differenziano non solo per l'energia (pur conservandosi l'energia totale), ma anche per le masse (pur conservandosi il numero barionico).

La successiva generalizzazione, non contemplata in questo libro, è il caso di 3 o più particelle nello stato finale, cioè il caso del break-up.

Occupiamoci anzitutto del sistema accoppiato. Consideriamo la funzione d'onda totale 5.24 e generalizziamo il primo membro.

Consideriamo direttamente lo stato accoppiato (canale di spin)  $[\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2(\alpha)]_s^\nu$ , ed abbiamo quindi l'espressione  $\langle \xi \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle$ .

Inseriamo una completezza di tipo  $\sum_{\alpha' s' \nu'} |\alpha' s' \nu' \rangle \langle \alpha' s' \nu'| = 1$  (anzichè di tipo  $\sum_{\alpha'} |\alpha' \rangle \langle \alpha'| = 1$ , come nella 5.24), ed abbiamo

$$\langle \xi \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle = \sum_{\alpha' s' \nu'} \langle \xi | \alpha' s' \nu' \rangle \langle \alpha' s' \nu' \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle. \quad (5.67)$$

Qui e avanti non specifichiamo, per non appesantire il testo, i limiti delle sommatorie. Si intende che la somma corre su tutti gli  $\alpha'$  (supponendo che il troncamento non distrugga la completezza); per ogni  $\alpha'$  la somma corre su tutti gli  $s'$  dati dall'accoppiamento di  $s_1$  ed  $s_2$ ; per ogni  $s'$ , la somma corre su tutti i suoi  $\nu'$ .

Sviluppiamo  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{k}_\alpha$  in armoniche sferiche:

$$\langle \xi \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle = \sum_{\alpha' s' \nu' l m l' m'} \chi_{\alpha' s'}^{\nu'}(\xi) Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) \frac{1}{r} \langle \alpha' s' \nu' l' m' r | \alpha s \nu l m \mathbf{k}_\alpha + \rangle \frac{1}{k_\alpha} Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha). \quad (5.68)$$

Eseguiamo gli accoppiamenti  $[\mathbf{s} \otimes \mathbf{I}]_J^M$ ,  $[\mathbf{s}' \otimes \mathbf{I}']_J^M$ , tenendo conto della conservazione di  $JM$ .

$$\begin{aligned} \langle \xi \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle &= \sum_{\alpha' s' l' m J} \\ \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \langle s' l' l', \nu - \nu' + m | s' l' J, \nu + m \rangle &\chi_{\alpha' s'}^{\nu'}(\xi) \\ Y_{l'}^{\nu - \nu' + m} \frac{1}{r} \langle \alpha' s' l' J, \nu + m, r | \alpha s l J, \nu + m, k_\alpha + \rangle &= \frac{1}{k_\alpha} Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha). \end{aligned} \quad (5.69)$$

Si noti che la conservazione di  $JM$  ha portato alla eliminazione della  $\sum_m$ .

Introduciamo una posizione simile alla 4.90, ovvero:

$$i^{l'} \sum_{\nu'} \langle s' l' l', \nu - \nu' + m | s l J, \nu + m \rangle \chi_{\alpha' s'}^{\nu'}(\xi) Y_{l'}^{\nu - \nu' + m}(\hat{r}) = \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi), \quad (5.70)$$

e sviluppiamo il braket radiale come in 2.58 e 4.91:

$$\langle \alpha' s' l' J, \nu + m, r | \alpha s l J, \nu + m, k_\alpha + \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{l'} u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^{J+}(k_\alpha r). \quad (5.71)$$

Si ottiene:

$$\begin{aligned} \langle \xi \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle &= \sum_{\alpha' s' l' m J} Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha) \\ \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^{J+}(k_\alpha r) \frac{1}{k_\alpha}. \end{aligned} \quad (5.72)$$

Attenzione: il braket è fortemente asimmetrico. Bisogna ricordare che le onde entranti sono in  $\alpha$ . In particolare il termine di parità nella 5.70 è  $i^{l'}$  (e non  $i^l$ ), perchè segue  $\langle \mathbf{r} |$ , ovvero  $Y_l^m(\hat{r})$ .

L'equazione di S. diventa quindi:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha' s' l' m J} (H_0 + H_t + V - E) \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \\ \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^{J+}(k_\alpha r) \frac{1}{k_\alpha} Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha) = 0. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Adesso operiamo come segue:

–Ricordiamo che

$$\begin{aligned} (H_0 + H_t + V - E) \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \frac{1}{r} u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^{J+}(k_\alpha r) = \\ \frac{1}{r} \left( -D_r^2 + \frac{l'(l'+1)}{r^2} - k_{\alpha'}^2 + \mu V \right) \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^{J+}(k_\alpha r) = 0. \end{aligned}$$

A proposito di questo passaggio c'è una considerazione sottile da fare. Gli autovalori  $\frac{l'(l'+1)}{r^2} - k_{\alpha'}^2$  derivano dall'azione dell'hamiltoniano ( $H_0 + H_t$ ) su  $\mathcal{Y}_{\alpha's'l'}$ , il quale contiene  $Y_{l'}(\hat{r})$  e  $\chi_{\alpha'}(\xi)$ . Quindi quegli autovalori sono relativi al canale con apice. Il fatto poi che  $u_{\alpha's'l',\alpha sl}$  sia indicato come funzione di  $k_{\alpha}$ , è del tutto convenzionale. Infatti  $u$  è a rigore funzione dell'energia totale, che determina tutti i momenti di canale  $k_{\alpha}$ , essendo note le  $\mathcal{E}_{\alpha}$ .

– Moltiplichiamo a sinistra per  $\mathcal{Y}_{\alpha''l''s''}^{J,\nu+m}(\hat{r}\xi)$

– Integriamo in  $d\hat{r} d\xi$ , tenendo conto dell'ortogonalità 4.93, che scatta per tutti gli elementi dell'operatore, tranne  $V$ . Il potenziale deve avere capacità di accoppiamento, altrimenti il problema multicanale non esiste. Per gli accoppiamenti abbiamo una relazione un po' più generale della 5.16:

$$\int \mathcal{Y}_{\alpha''l''s''}^{JM*}(\hat{r}\xi)V(\mathbf{r}\xi)\mathcal{Y}_{\alpha'l's'}^{JM}(\hat{r}\xi)d\hat{r} d\xi = V_{\alpha''l''s'',\alpha'l's'}^J(r). \quad (5.74)$$

– Moltiplichiamo per  $Y_{\lambda}^{\mu}(\hat{k})$  e integriamo in  $d\hat{k}$ , eliminando così la  $\sum_{lm}$ . Risostituiamo quindi formalmente  $lm$  al posto di  $\lambda\mu$ . A questo punto il coefficiente di CG  $\langle svlm|slJ, \nu+m \rangle$  diventa un coefficiente "overall", e può essere eliminato. – Non scriviamo la  $\sum_J$ , intendendo che il seguente sistema accoppiato, si riferisce a un definito momento angolare totale  $J$  (e quindi la  $\sum_{\alpha ls}$  corre solo sugli indici compatibili con quel  $J$ ). Oltre a  $J$  si conserva anche la parità  $\pi$ . Il numero quantico  $\pi$  non viene indicato esplicitamente.

Il sistema di equazioni accoppiate è il seguente:

$$\sum_{\alpha's'l'} \left\{ \delta_{\alpha''\alpha'} \delta_{s''s'} \delta_{l''l'} \left[ -D_r^2 + \frac{l'(l'+1)}{r^2} - k_{\alpha'}^2 \right] + \mu V_{\alpha''s''l'',\alpha'l's'}^J(r) \right\} u_{\alpha's'l',\alpha sl}^{J+}(k_{\alpha}r) = 0. \quad (5.75)$$

Un'equazione per ogni  $\alpha''s''l''$ ; un set per ogni  $\alpha sl$  (onde entranti in  $\alpha sl$ ).

### 5.3 Wronskiani e funzione di Jost

Adesso vogliamo trovare la generalizzazione della funzione di Jost. Riscriviamo la 5.75 in forma leggermente modificata indicando globalmente gli indici di canale nella forma :  $c \equiv J, \alpha sl$  ;  $c' \equiv J, \alpha's'l'$ , etc.

$$-\frac{d^2 u_{c'c}}{dr^2} + \left[ \frac{l''(l''+1)}{r^2} - (k_{c'})^2 \right] u_{c'c} + \mu \sum_{c'} V_{c''c'} u_{c'c} = 0 \quad (5.76)$$

Consideriamo un'altra soluzione linearmente indipendente  $v$ , e un altro set di equazioni, relativo a particelle entranti nel canale  $c'''$ :

$$-\frac{d^2 v_{c''c'''} }{dr^2} + \left[ \frac{l''(l''+1)}{r^2} - (k_{c''})^2 \right] v_{c''c'''} + \mu \sum_{c'} V_{c''c'} v_{c'c'''} = 0 \quad (5.77)$$

Moltiplichiamo la 5.76 per  $v_{c''c'''}$ , la 5.77 per  $u_{c''c}$ , sommiamo su  $c''$  e sottraiamo la seconda dalla prima. Si ottiene:

$$\sum_{c''} \left( u_{c''c} \cdot \frac{d^2 v_{c''c'''} }{dr^2} - \frac{d^2 u_{c''c} \cdot v_{c''c'''} }{dr^2} \right) = 0. \quad (5.78)$$

Nell'annullarsi degli altri termini è fondamentale l'ipotesi di  $V$  simmetrico. Infatti il terzo termine della 5.77 dà  $\sum_{c''c'} V_{c''c'} (u_{c'c} v_{c''c'''} - v_{c'c'''} u_{c''c})$ . Per dimostrare che questo è nullo, basta invertire, nel secondo termine,  $c'$  con  $c''$ , cosa che si può fare, purchè  $V$  sia simmetrico.

Finalmente, integrando in  $dr$  si ottiene il wronskiano di canale, che si dimostra essere indipendente da  $r$ :

$$W_{cc'}(u, v) = \sum_{c''} \left[ u_{c''c} \left( \frac{d}{dr} v_{c''c} \right) v_{c''c'} \right] = \text{cost}_r \quad (5.79)$$

La generalizzazione della 5.34 è:

$$u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J(k_\alpha, r) = F_l(k_\alpha r) \delta_{ll'} \delta_{ss'} \delta_{\alpha\alpha'} \sum_{l'' s'' \alpha''} \int_0^\infty dr' G_{0l'}(k_{\alpha'}; r r') V_{l' s' \alpha'; l'' s'' \alpha''}^J(r') u_{\alpha'' l'' s'', \alpha' l' s'}^J(k_\alpha, r). \quad (5.80)$$

Conviene ricavare la 5.80, ed ottenere contestualmente la generalizzazione delle principali formule ottenute in all'inizio del capitolo, al caso di interazione fra particelle dotate di spin.

L'equazione di L.S. (generalizzazione della 5.26), è la seguente:

$$|\alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle = |\alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha \rangle + \frac{1}{E_+ - \mathcal{H}_0} V |\alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle. \quad (5.81)$$

Se si spegne l'interazione, la 5.72 diventa:

$$\begin{aligned} \langle \xi \mathbf{r} | \alpha s \nu \mathbf{k} \rangle &= \sum_{\alpha' s' l' m J} Y_l^{m*}(\mathbf{k}_\alpha) \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \times \\ &\times \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_l(k_\alpha r) \frac{1}{k_\alpha} \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{ss'} \delta_{ll'} = \sum_{l m J} Y_l^{m*}(\hat{k}) \\ &\langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \mathcal{Y}_{\alpha s l}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2}{\pi}} F_l(k_\alpha r) \frac{1}{k_\alpha}. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Ovviamente la forma principale è quella a terzo membro, ma anche quella pleonastica a secondo membro può essere utile negli sviluppi, come vedremo.

Proiettiamo la 5.81 su  $\langle \mathbf{r}\xi |$ , e inseriamo opportune completezze di tipo

$$\sum_{\alpha\nu} \int |\alpha\nu\mathbf{p}\rangle d\mathbf{p} \langle \alpha\nu\mathbf{p}| = \hat{1}. \quad (5.83)$$

Le corrispondenti ortogonalità sono:

$$\langle \alpha\nu\mathbf{p}|\alpha's'\nu'\mathbf{p}'\rangle = \delta_{\alpha\alpha'}\delta_{ss'}\delta_{\nu\nu'}\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}'). \quad (5.84)$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} \langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha+}\rangle &= \langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha}\rangle + \\ &\sum_{\alpha's'\nu'} \int \langle \xi\mathbf{r}|\frac{1}{E^+ - \mathcal{H}_0}|\alpha's'\nu'\mathbf{p}\rangle d\mathbf{p} \langle \alpha's'\nu'\mathbf{p}|\xi'\mathbf{r}'\rangle \\ &d\xi' d\mathbf{r}' \langle \xi'\mathbf{r}'|V|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha+}\rangle. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Ricordiamo la 5.27, facilmente generalizzabile a:

$$\frac{1}{E^+ - \mathcal{H}_0}|\alpha\nu\mathbf{p}\rangle = \frac{1}{E_{\alpha}^+ - p^2/\mu}|\alpha\nu\mathbf{p}\rangle \quad (5.86)$$

Ricordiamo anche l'ovvia generalizzazione della (1.19) (attenzione ai coefficienti di normalizzazione!):

$$\langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha}\rangle = \chi_{\alpha s}^{\nu}(\xi)e^{i\mathbf{k}_{\alpha}\mathbf{r}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}. \quad (5.87)$$

Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned} \langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha+}\rangle &= \langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha}\rangle + \\ &\sum_{\alpha's'\nu'} \int \chi_{\alpha's'}^{\nu'}(\xi)e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\frac{1}{E_{\alpha'}^+ - p^2/\mu}d\mathbf{p}\chi_{\alpha's'}^{*\nu'}(\xi')e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}'}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \\ &d\xi' d\mathbf{r}'V(\mathbf{r}'\xi') \langle \xi'\mathbf{r}'|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha+}\rangle, \end{aligned} \quad (5.88)$$

avendo assunto  $V$  locale.

Abbiamo rimandato lo sviluppo, per poter applicare la 5.33, che fornisce finalmente:

$$\begin{aligned} \langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha+}\rangle &= \langle \xi\mathbf{r}|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha}\rangle + \\ &\sum_{\alpha's'\nu'} \int \chi_{\alpha's'}^{\nu'}(\xi)G_{0\alpha'}(k_{\alpha'}, r r')\chi_{\alpha's'}^{*\nu'}(\xi')d\xi' d\mathbf{r}' \\ &V(\mathbf{r}'\xi') \langle \xi'\mathbf{r}'|\alpha\nu\mathbf{k}_{\alpha+}\rangle, \end{aligned} \quad (5.89)$$

e adesso possiamo inserire gli sviluppi 5.72 e 5.82 su  $|\alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha\rangle$ ,  $|\alpha s \nu \mathbf{k}_\alpha + \rangle$ , e lo sviluppo multipolare su  $G_0$ :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha' s' l' l m J} Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha) \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k_\alpha r} u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J(k_\alpha r) = \\
& = \sum_{\alpha' s' l' l m J} Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha) \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k_\alpha r} F_l(k_\alpha r) \delta_{\alpha \alpha'} \delta_{s s'} \delta_{l l'} + \\
& \quad \sum_{\alpha' s' l', \alpha'' s'' l'', l m, J, l' m'} \int \chi_{\alpha' s'}^{\nu'}(\xi) Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) \frac{1}{r r'} G_{0 l' \alpha'}(k_{\alpha'}, r r') Y_{l''}^{m''*}(\hat{r}') \chi_{\alpha'' s''}^{\nu''*}(\xi') d\xi' dr' d\hat{r}' r'^2 \times \\
& \quad \times V(r') Y_l^{m*}(\hat{k}_\alpha) \langle s \nu l m | s l J, \nu + m \rangle \mathcal{Y}_{\alpha'' s'' l''}^{J, \nu + m}(\hat{r}' \xi') \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k_\alpha r'} u_{\alpha'' s'' l'', \alpha s l}^J(k_\alpha r'). \quad (5.90)
\end{aligned}$$

- Eseguiamo le semplificazioni ovvie,
- Eseguiamo gli accoppiamenti

$$\begin{aligned}
\chi_{\alpha' s'}^{\nu'}(\xi) Y_{l'}^{m'}(\hat{r}) &= \sum_{J'} \langle s' \nu' l' m' | s' l' J', \nu' + m' \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J', \nu' + m'}(\hat{r} \xi), \\
\chi_{\alpha'' s''}^{\nu''*}(\xi') Y_{l''}^{m''*}(\hat{r}') &= \sum_{J''} \langle s' \nu' l' m' | s' l' J'', \nu' + m' \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J'', \nu' + m''*}(\hat{r}' \xi').
\end{aligned}$$

E si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) u_{\alpha' s' l', \alpha s l}^J(k_\alpha r) = \delta_{l l'} \delta_{s s'} \delta_{\alpha \alpha'} \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J, \nu + m}(\hat{r} \xi) F_l(k_\alpha r) + \\
& + \sum_{\nu' m', \alpha'' s'' l'', J' J''} \int \langle s' \nu' l' m' | s' l' J', \nu' + m' \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J', \nu' + m'}(\hat{r}' \xi') G_{0 l' \alpha'}(k_\alpha, r r') \\
& \langle s' \nu' l' m' | s' l' J', \nu' + m' \rangle \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J', \nu' + m'}(\hat{r}' \xi') d\xi' dr' d\hat{r}' \\
& V(\mathbf{r}' \xi') \mathcal{Y}_{\alpha'' s'' l''}^{J, \nu + m}(\hat{r}' \xi') u_{\alpha'' s'' l'', \alpha s l}^J(k_\alpha r'). \quad (5.91)
\end{aligned}$$

Adesso consideriamo l'ortogonalità dei CG.

$$\sum_{\nu' m'} \langle s' \nu' l' m' | s' l' J', \nu' + m' \rangle \langle s' \nu' l' m' | s' l' J'', \nu' + m' \rangle = \delta_{J' J''}. \quad (5.92)$$

Applichiamo la 5.74:

$$\int \mathcal{Y}_{\alpha' s' l'}^{J', \nu' + m''*}(\hat{r}' \xi') V(\mathbf{r}' \xi') \mathcal{Y}_{\alpha'' s'' l''}^{J, \nu + m}(\hat{r}' \xi') d\hat{r}' \xi' = \delta_{J' J''} \delta_{\nu' + m', \nu' + m''} V_{\alpha' s' l', \alpha'' s'' l''}^{J, \nu + m}(\hat{r}' \xi'), \quad (5.93)$$

ed otteniamo la 5.80. Sulla base della 5.80, definiamo la soluzione regolare

$$\varphi_{c'c}(E, r) = \delta_{c'c} F_c(k_c r) + \sum_{c''} \mathcal{G}_{0 \varphi_{c'}}(k_{c'}; r r') dr' V_{c'c''}(r') \varphi_{c''c}(E, r'), \quad (5.94)$$

dove si intende che  $\mathcal{G}_{0\varphi_{c'}}$  è data dalla ??, e si ottiene quindi la generalizzazione della ??, ovvero:

$$\begin{aligned} \varphi_{c'e}(E, r) = & \delta_{c'e} F_c(k_c r) + \frac{\mu}{k_{c'}} \sum_{c''} \\ & \left[ F_{c'}(k_{c'} r) \int_0^r G_{c'}(k_{c'} x) V_{c'e''}(k) \varphi_{c'e''}(x, E) dx \right. \\ & \left. - G_{c'}(k_{c'} r) \int_0^r F_{c'}(k_{c'} x) V_{c'e''}(x) \varphi_{c'e''}(E, x) dx \right]. \end{aligned} \quad (5.95)$$

Gli andamenti asintotici si ricavano immediatamente, e sono:

$$\varphi_{c'e}(E, r \rightarrow 0) = \delta_{c'e} F_c(k_c, r \rightarrow 0) = \delta_{c'e} \frac{(k_c r)^{l+1}}{(2l+1)!!}, \quad (5.96)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{c'e}(E, r \rightarrow \infty) = & F_{c'}(k_{c'} r) \left[ \delta_{c'e} + \frac{\mu}{k_{c'}} \int_0^\infty G_{c'}(k_c, x) V_{c'e''}(x) \varphi_{c'e''}(E, x) dx \right] \\ & - \frac{\mu}{k_{c'}} G_{c'}(k_{c'} r) \left[ \int_0^\infty F_{c'}(k_{c'} x) V_{c'e''}(x) \varphi_{c'e''}(E, x) dx \right] \end{aligned} \quad (5.97)$$

Per quanto riguarda la soluzione irregolare, abbiamo:

$$\begin{aligned} f_{c'e}^{(\pm)}(E, r) = & \delta_{c'e} O_c^{(\pm)}(k_c r) + \frac{\mu}{k_{c'}} \left\{ -F_{c'}(k_{c'} r) \int_r^\infty G_{c'}(k_{c'} x) V_{c'e''}(x) f_{c'e''}^{(\pm)}(x) dx \right. \\ & \left. + G_{c'}(k_{c'} r) \int_r^\infty F_{c'}(k_{c'} x) V_{c'e''}(x) f_{c'e''}^{(\pm)}(x) dx \right\}. \end{aligned} \quad (5.98)$$

L'andamento asintotico è evidentemente:

$$f_{c'e}^{(\pm)}(E, r \rightarrow \infty) = \delta_{c'e} O_c^{(\pm)}(k_c r \rightarrow \infty) = \delta_{c'e} e^{\pm i(k_c r - l\pi/2)}. \quad (5.99)$$

Adesso ricordiamo la definizione 5.79 di Wronskiano, che in forma matriciale possiamo scrivere:

$$\mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tilde{\mathbf{u}}\mathbf{v}' - \tilde{\mathbf{u}}'\mathbf{v}. \quad (5.100)$$

Scriviamo la  $\varphi$  come sovrapposizione delle  $f^{(\pm)}$ , ed indichiamo con  $\Phi$  la matrice  $\varphi_{c'e}$ :

$$\Phi(E, r) = \Phi^{(+)}(E, r)\mathbf{A}(E) + \Phi^{(-)}(E, r)\mathbf{B}(E). \quad (5.101)$$

Calcoliamo il Wronskiano di  $f^+$  e  $\varphi$ :

$$\mathbf{W}(\mathbf{F}^{(+)}, \Phi) = \mathbf{W}(\mathbf{F}^{(+)}, \mathbf{F}^{(+)})\mathbf{A} + \mathbf{W}(\mathbf{F}^{(+)}, \mathbf{F}^{(-)})\mathbf{B}. \quad (5.102)$$

Calcoliamo il  $W$  all' $\infty$ , dove vale la (47b), e le  $\Phi$  diventano diagonali.

Ricordiamo che se  $u$  e  $v$  sono diagonali, vale la seguente proprietà di immediata verifica:

$$W_{cc'}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \delta_{cc'} W(u_c, v_c). \quad (5.103)$$

Anche il Wronskiano è diagonale, e i suoi elementi sono i Wronskiani degli omonimi termini diagonali.

Un corollario è che, sempre per  $u$  diagonale, è:

$$W(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \mathbf{0}. \quad (5.104)$$

Ne segue che

$$\mathbf{W}(\mathbf{F}^{(+)}, \Phi) = \mathbf{W}(\mathbf{O}^{(+)}, \mathbf{O}^{(+)})\mathbf{A} + \mathbf{W}(\mathbf{O}^{(+)}, \mathbf{O}^{(-)})\mathbf{B}, \quad (5.105)$$

dove evidentemente la matrice diagonale  $\mathbf{O}$  è definita nel modo seguente:

$$O_{c'c}^{(\pm)} = \delta_{c'c} O_c^{(\pm)}. \quad (5.106)$$

Per quanto abbiamo detto, e per la ??:

$$W_{c'c}(\mathbf{O}^{(+)}, \mathbf{O}^{(-)}) = \delta_{c'c} W(O_c^+, O_c^-) = -2ik_c \quad (5.107)$$

Conviene a questo punto definire la matrice diagonale momento  $\mathbf{K}$ , i cui elementi di matrice sono:

$$k_{c'c} = \delta_{c'c} k_c, \quad (5.108)$$

con il che la 5.105 si può scrivere finalmente:

$$\mathbf{W}(\mathbf{F}^{(+)}, \Phi) = -2i\mathbf{K}\mathbf{B}. \quad (5.109)$$

Ponendo

$$\mathbf{Q}^{(\pm)} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{W}(\mathbf{F}^{(\pm)}, \Phi), \quad (5.110)$$

dove la matrice  $\mathbf{K}^{-1}$  è anch'essa diagonale, ed ha elementi  $(k^{-1})_{c'c} = \delta_{c'c} k_c^{-1}$ , si può scrivere

$$\mathbf{B} = -\mathbf{Q}^{(+)} / 2i. \quad (5.111)$$

Con operazione analoga si ottiene

$$\mathbf{A} = -\mathbf{Q}^{(-)} / 2i, \quad (5.112)$$

per cui si ottiene finalmente:

$$\Phi(E, r) = \frac{1}{2i} \left[ \Phi^{(+)}(E, r) \mathbf{Q}^{(-)}(E) - \Phi^{(-)}(E, r) \mathbf{Q}^{(+)}(E) \right] \quad (5.113)$$



Adesso, sempre dalla 5.80, scriviamo la soluzione fisica:

$$u_{c'e}^{(\pm)}(E, r) = \delta_{c'e} F_c(k_c r) - \frac{\mu}{k_{c'}} \sum_{c''} \left\{ O_{c'}^{(\pm)}(k_{c'} r) \int_0^r (k_{c'} x) V_{c'e''}(x) u_{c''e}^{(\pm)}(k_c, x) dx + F_{c'}^{(\pm)}(k_{c'} r) \int_r^\infty O_{c'}^{(\pm)}(k_{c'} x) V_{c'e''}(x) u_{c''e}^{(\pm)}(E, x) dx \right\}, \quad (5.114)$$

e la sua forma per  $r \rightarrow 0$ :

$$u_{c'e}^{(\pm)}(E, r \rightarrow 0) = F_{c'}(k_{c'}, r \rightarrow 0) \left[ \delta_{c'e} - \frac{\mu}{k_{c'}} \sum_{c''} \int_0^\infty O_{c'}^{(\pm)}(k_{c'}, x) V_{c'e''}(x) u_{c''e}^{(\pm)}(E, x) dx \right]. \quad (5.115)$$

Quindi  $u$  è proporzionale ad  $F$  e conseguentemente a  $\varphi$  (all'origine e quindi dappertutto), nel senso che:

$$u_{c'e}(E, r \rightarrow 0) = F_{c'}(k_{c'}, r) \Omega_{c'e}(E) \quad (5.116)$$

ovvero, in notazione matriciale

$$\mathbf{u}(E, r \rightarrow 0) = \mathbf{F}(E, r) \mathbf{\Omega}(E) \quad (5.117)$$

e quindi

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Phi} \mathbf{\Omega}. \quad (5.118)$$

La 4.100 si estende banalmente al nostro caso, e si scrive in forma matriciale

$$\mathbf{u}(E, r \rightarrow 0) = \frac{i}{2} \left[ \mathbf{O}^{(-)}(E, r \rightarrow \infty) - \mathbf{O}^{(+)}(E, r \rightarrow \infty) \mathbf{S} \right] \quad (5.119)$$

Confrontando fra loro le 5.113, 5.118, 5.119, si ottiene:

$$\mathbf{\Omega} = [\mathbf{Q}^{(+)}]^{-1}, \quad ; \quad \mathbf{S} = \mathbf{Q}^{(-)} [\mathbf{Q}^{(+)}]^{-1}. \quad (5.120)$$

Avendo trovato il coefficiente di proporzionalità fra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{\Phi}$ , possiamo scrivere esplicitamente la 5.118, che generalizza la ??:

$$\mathbf{\Phi}(E, r) = \mathbf{u}(E, r) \mathbf{Q}^+(E). \quad (5.121)$$

Abbiamo ottenuto così una completa generalizzazione del caso monocanale. Le relazioni fra scalari sono sostituite da relazioni fra matrici. Naturalmente bisogna far attenzione alle definizioni, poichè i prodotti in generale non sono commutativi, e le matrici non sono simmetriche.

Tipico è il caso delle funzioni d'onda. Quando si scrive  $\mathbf{u}$ , ovvero  $u_{c'e}$ , bisogna ricordare che le condizioni al contorno sono di ondeentranti in  $c$ .

**Parte III**  
**Appendici**

# Appendice A

## Il momento angolare in meccanica quantistica

### A.1 L'operatore momento angolare

L'operatore quantistico momento angolare  $\mathbf{J}$ , è un vettore, di componenti cartesiane  $J_x$ ,  $J_y$ ,  $J_z$ . L'operatore  $\mathbf{J}$  è perfettamente definito dalle sue regole di commutazione:

$$[J_x, J_y] \equiv J_x J_y - J_y J_x = iJ_z, \quad (\text{A.1})$$

e dall'essere, in quanto operatore quantistico, hermitiano (nell'equazione A.1 si intende che valgono le altre 2 equazioni che si ottengono da quella scritta, con permutazione circolare degli indici  $xyz$ ). L'operatore associato al modulo quadro del momento angolare in forma cartesiana è:

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2. \quad (\text{A.2})$$

È possibile dimostrare, in base alla definizione A.2 ed alle A.1, la validità delle ulteriori regole di commutazione

$$[J^2, J_q] = 0 ; q = x, y, z. \quad (\text{A.3})$$

Poichè  $J^2$  commuta con le sue componenti, ma le componenti non commutano fra loro, è possibile scrivere le equazioni agli autovalori per gli autostati contemporanei di  $J^2$  e di una delle sue componenti, per esempio  $J_z$ .

In base alle sole regole A.1, ed all'hermiticità, è possibile (ma non semplicissimo) dimostrare che queste equazioni agli autovalori devono assumere

la forma:

$$\begin{aligned} J^2|jm\rangle &= j(j+1)|jm\rangle, \\ J_z|jm\rangle &= m|jm\rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

dove  $j$  può essere un numero intero o semintero,  $m$  può assumere tutti i valori compresi fra  $j$  e  $-j$  scalati di un'unità, e dove abbiamo indicato con  $|jm\rangle$  lo stato completo di spin, che dipende ovviamente dai due numeri quantici  $j, m$ .

Qui e nel seguito illustreremo le proprietà elencate, attraverso il caso particolare  $j = \frac{1}{2}$ ;  $m = \pm\frac{1}{2}$ . Poichè in questo caso la variabile  $m$  può assumere due valori, lo spazio di spin è uno spazio discreto a 2 dimensioni ( $2j + 1$  nel caso generale). Gli stati di base si scrivono nella forma:

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Gli operatori sono proporzionali alle matrici di Pauli:

$$J_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad J_y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad J_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Tramite la A.2 è immediato scrivere l'operatore modulo quadro:

$$J^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Si noti che  $J_z$  e  $J^2$  sono rappresentati da matrici diagonali. Anzi,  $J^2$  è proporzionale all'unità essendo i suoi autovalori uguali. Questa proprietà è generale.

Affrontiamo adesso il problema di descrivere il sistema di due particelle dotate di spin in interazione, oppure il moto di una particella dotata di spin rispetto a un centro scatteratore. Questo è il problema dell'accoppiamento dei momenti angolari, nel primo caso accoppiamento di spin-spin, nel secondo caso di spin-orbita.

Consideriamo in generale 2 operatori di spin  $\mathbf{J}_1$  e  $\mathbf{J}_2$ . Lo spazio nel quale descriviamo il sistema complessivo è il prodotto diretto degli stati componenti:

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Per quanto riguarda gli operatori, consideriamo un operatore  $A$  definito nello spazio 1, e un operatore  $B$  definito nello spazio 2. Le estensioni (che chiamano  $A_1$  e  $B_2$ ) allo spazio complessivo, sono definite nel modo seguente:

$$A_1 = A \otimes \hat{1}; \quad B_2 = \hat{1} \otimes B. \quad (\text{A.9})$$

Nelle A.9,  $\hat{1}$  è la matrice unità nello spazio 2 e nello spazio 1 rispettivamente (che possono essere di dimensioni diverse).

Per quanto riguarda le operazioni, ricordiamo che, se  $A_{mn}$  e  $B_{pq}$  sono matrici quadrate di ordine  $N$  e  $Q$  rispettivamente ( $m,n=1,2,\dots,N$ ;  $p,q=1,2,\dots,Q$ ), il prodotto diretto  $C = A \otimes B$  è una matrice di ordine  $N \times Q$  definita nel modo seguente:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & \dots & A_{11}B_{1Q} & A_{12}B_{11} & \dots & A_{12}B_{1Q} & \dots & A_{1N}B_{1Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{11}B_{Q1} & \dots & A_{11}B_{QQ} & A_{12}B_{11} & \dots & A_{12}B_{QQ} & \dots & A_{1N}B_{QQ} \\ A_{21}B_{11} & \dots & A_{21}B_{1Q} & A_{22}B_{11} & \dots & A_{22}B_{1Q} & \dots & A_{2N}B_{1Q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{21}B_{Q1} & \dots & A_{21}B_{QQ} & A_{22}B_{Q1} & \dots & A_{22}B_{QQ} & \dots & A_{2N}B_{QQ} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1}B_{Q1} & \dots & A_{N2}B_{QQ} & A_{N2}B_{Q1} & \dots & A_{N2}B_{QQ} & \dots & A_{NN}B_{QQ} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Continuiamo l'esemplificazione sul caso di 2 fermioni in interazione, e diamo le espressioni esplicite degli stati, nello spazio prodotto quadridimensionale:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \frac{1111}{2222} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left| \frac{1111}{2222}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \\ \left| \frac{1}{2}, -\frac{1111}{2222} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{11}{22}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Per quanto riguarda gli operatori, diamo a titolo di esempio gli operatori  $J_z$  delle 2 particelle nello spazio prodotto:

$$J_{z1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad J_{z2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Con queste definizioni le regole che valevano negli spazi di particella vengono semplicemente estese allo spazio di coppia, ovvero valgono le seguenti equazioni agli autovalori:

$$J_1^2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = j(j+1) |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} J_{z1} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle &= m_1 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle, \\ J_1^2 &= J_{x1}^2 + J_{y1}^2 + J_{z1}^2, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

ed analoghe con suffisso 2. Questa rappresentazione dello spazio delle due particelle è la semplice composizione delle due rappresentazioni singole. Ma per ragioni fisiche è spesso opportuno (o necessario) passare a una rappresentazione (che viene detta accoppiata) nella quale è definito un momento angolare risultante  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ . Per esempio nel caso di una particella scattata da un centro di forze, si conserva il momento angolare totale, dato dalla somma del momento angolare orbitale più quello di spin. Se le 2 particelle sono atomi che formano una molecola, lo spin della molecola è la somma dei due spin (più eventualmente il momento angolare orbitale del moto relativo). Con l'operazione di somma indichiamo che:

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} ; J_y = J_{y1} + J_{y2} ; J_z = J_{z1} + J_{z2}, \quad (\text{A.15})$$

ovvero l'operatore somma è definito nello spazio prodotto, e si ottiene sommando i componenti, estesi però allo spazio prodotto. La rappresentazione accoppiata è scelta in modo che  $\mathbf{J}$  sia ivi espresso in forma standard, ovvero che gli operatori  $J_z$  e  $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  siano diagonali. La trasformazione fra rappresentazione accoppiata e disaccoppiata è una trasformazione unitaria reale, cioè ortogonale, con opportune scelte di fasi dovute a Clebsh e Gordan. Ovviamente la trasformazione di CG che diagonalizza  $J^2$  e  $J_z$ , distrugge la diagonalità di  $J_{1z}$  e  $J_{2z}$ , ma non distrugge la diagonalità di  $J_1^2$  e  $J_2^2$ , perchè quelle matrici diagonali sono proporzionali all'unità<sup>1</sup>. Così i numeri quantici della rappresentazione disaccoppiata sono  $j_1 m_1 j_2 m_2$ , e quelli della rappresentazione accoppiata sono  $j_1 j_2 j m$ , essendo ovviamente  $m = j, j-1, \dots, -j+1, -j$ . Si dimostra che l'autovalore  $j$  può assumere tutti i valori compresi fra  $j_1 + j_2$  e  $|j_1 - j_2|$ , scalati di un'unità. È facile verificare che si conserva la dimensionalità dello spazio, ovvero che  $2j + 1 = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ . La trasformazione di CG si scrive nella forma seguente:

$$|j_1 j_2 j m \rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle |j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle . \quad (\text{A.16})$$

Il numero di elementi della trasformazione è fortemente limitato dalla regola di selezione:

$$m_1 + m_2 = m. \quad (\text{A.17})$$

L'ortogonalità dei CG assume la forma seguente:

$$\sum_{m_1 m_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j' m' \rangle = \delta_{jj'} \delta_{mm'}$$

---

<sup>1</sup>La diagonalità di  $J_1^2$  e  $J_2^2$  discende dalla diagonalità di  $J^2$ . Poichè vale la regola  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}') = \mathbf{A}\mathbf{A}' \otimes \mathbf{B}\mathbf{B}'$  (con  $AA'$  appartenenti allo stesso spazio, e così pure  $BB'$ ) si ha  $J_{x1}^2 = (J_x \otimes \hat{1})^2 = J_x^2 \otimes \hat{1}$ . Quindi  $\mathbf{J}_1^2 = \mathbf{J}^2 \otimes \hat{1} = j(j+1)(\hat{1} \otimes \hat{1})$ . Quindi  $\mathbf{J}_1^2$  è diagonale, e lo stesso vale per  $\mathbf{J}_2^2$ .

$$\sum_{jm} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_1 j_2 j m \rangle = \delta_{m_1 m'_1} \delta_{m_2 m'_2}. \quad (\text{A.18})$$

Grazie a questa ortogonalità, la trasformazione inversa alla A.16 si scrive semplicemente:

$$|j_1 m_1 j_2 m_2 \rangle = \sum_{jm} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle |j_1 j_2 j m \rangle. \quad (\text{A.19})$$

Sono importanti le relazioni di simmetria cui soddisfano i coefficienti:

$$\begin{aligned} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle &= (-)^{j_1+j_2-j} \langle j_2 m_2 j_1 m_1 | j_2 j_1 j m \rangle, \\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle &= (-)^{j_1+j_2-j} \langle j_1, -m_1 j_2, -m_2 | j_1 j_2 j, -m \rangle, \\ \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m \rangle &= (-)^{j_1-m_1} \frac{\hat{j}}{\hat{j}_2} \langle j_1 m_1 j m | j_1 j j_2 m_2 \rangle, \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

dove (-) vuol dire (-1), e  $\hat{j} = \sqrt{2j+1}$ .

Nell'esempio fermione-fermione, sono possibili 3 stati (di tripletto) con  $j = 1$ ;  $m = 1, 0, -1$ , e 1 stato (di singoletto) con  $j = m = 0$ . I CG che interessano questa trasformazione sono i seguenti:

$$\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} 11 \rangle = 1; \quad \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} 10 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} | \frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.21})$$

Tutti gli altri si possono ricavare tramite le A.20. Gli stati accoppiati che si costruiscono con i CG sono i seguenti:

$$\begin{aligned} |\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle]; \\ |\frac{1}{2} \frac{1}{2} 10 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle + |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle]; \\ |\frac{1}{2} \frac{1}{2} 11 \rangle &= |\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle; \\ |\frac{1}{2} \frac{1}{2} 00 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle - |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle]. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Per razionalizzare le regole di simmetria A.20 sono stati introdotti i seguenti coefficienti, detti simboli a 3j:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-)^{i_1-j_2-m_3}}{\hat{j}_3} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j_3 m_3 \rangle. \quad (\text{A.23})$$

A causa del cambiamento di segno su  $m_3$ , la regola di selezione A.17 si trasforma nella seguente:

$$m_1 + m_2 + m_3 = 0, \quad (\text{A.24})$$

che è simmetrica nei 3 indici.

*I 3js sono invarianti per permutazioni pari sulle colonne, e vanno moltiplicati per  $(-)^{i_1+j_2+j_3}$ , per permutazioni dispari sulle colonne, o per inversione dei segni nella seconda riga.*

L'ortonormalità assume la forma seguente:

$$\begin{aligned} \hat{j}_3^2 \sum_{m_1 m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j'_3 \\ m_1 & m_2 & m'_3 \end{pmatrix} &= \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3} \\ \sum_{j_3 m_3} \hat{j}_3^2 \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m'_2 & m_3 \end{pmatrix} &= \delta_{j_3 j'_3} \delta_{m_3 m'_3}. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Le A.25 sono più semplici delle A.18

## A.2 L'operatore rotazione

Consideriamo un campo scalare  $f(\mathbf{r})$ , in un fissato riferimento ortogonale destrorso. Se il riferimento ruota di un angolo  $\epsilon$  positivo (antiorario) attorno all'asse  $z$ , il vettore  $\mathbf{r}$  si trasforma nel modo seguente:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{M}_z(\epsilon)\mathbf{r}, \quad (\text{A.26})$$

dove

$$\mathbf{M}_z = \begin{pmatrix} \cos \epsilon & \sin \epsilon & 0 \\ -\sin \epsilon & \cos \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.27})$$

è una matrice ortogonale unimodulare. Per  $\epsilon$  infinitesimo, la matrice al prim'ordine diventa:

$$\mathbf{M}_z = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon & 0 \\ -\epsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Se il campo scalare rappresenta una proprietà oggettiva dello spazio, ruotando il riferimento cambia la rappresentazione  $f$  di questa proprietà. Il cambiamento è portato dall'operatore rotazione  $R$ , che si definisce nel modo seguente (vedi figura A.1):



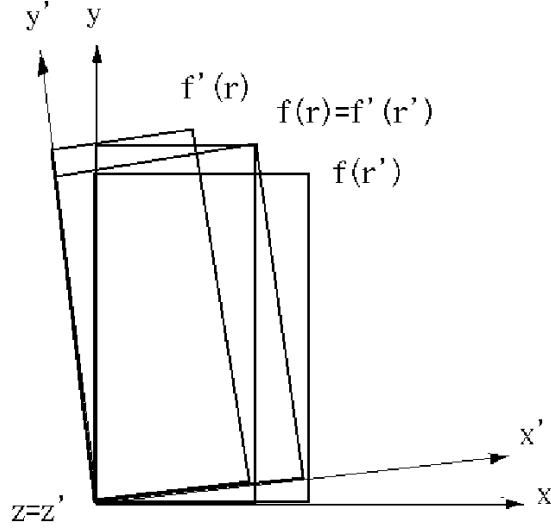


Figura A.1: Campo scalare

$$R_z(\epsilon)f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}') = f(M_z(\epsilon)\mathbf{r}) = f(x + \epsilon y, -\epsilon x + y, z) \simeq [1 - \epsilon(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x})]. \quad (\text{A.29})$$

Ricordando la definizione di momento angolare orbitale  $\mathbf{L}$ , e confrontando il primo e l'ultimo membro della A.29, si ottiene l'espressione dell'operatore rotazione:

$$R_z(\epsilon) = 1 - i\epsilon L_z. \quad (\text{A.30})$$

La generalizzazione a un angolo  $\alpha$  finito è:

$$R_z(\alpha) = e^{-i\alpha L_z}, \quad (\text{A.31})$$

dove l'esponenziale dell'operatore si definisce tramite lo sviluppo in serie. La generalizzazione a una rotazione finita attorno a un asse qualsiasi  $xyz$  è:

$$R_{\mathbf{n}}(\alpha) = e^{-i\alpha \mathbf{L} \cdot \mathbf{n}}. \quad (\text{A.32})$$

Per dimostrare questa relazione bisogna far uso delle altre due matrici  $\mathbf{M}$ , ovvero:

$$\mathbf{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \epsilon \\ 0 & -\epsilon & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{M}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\epsilon \\ 0 & 1 & 0 \\ \epsilon & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.33})$$

Una rotazione attorno a un asse qualsiasi si può ottenere anche tramite la sequenza di 3 rotazioni: una rotazione  $\alpha$  attorno all'asse  $z$ , seguita da una rotazione  $\beta$  attorno al nuovo asse  $y$ , e da una rotazione  $\gamma$  attorno al nuovo asse  $z$ . Si può dimostrare che è del tutto equivalente eseguire le 3 rotazioni in ordine inverso, sempre però attorno agli assi di partenza. Di conseguenza l'operatore si può scrivere come segue:

$$R(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha L_z} e^{-i\beta L_y} e^{-i\gamma L_z}. \quad (\text{A.34})$$

I tre angoli usati in questa procedura si chiamano angoli di Eulero. Consideriamo adesso un campo vettoriale  $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ , e ruotiamo il riferimento di  $\epsilon$  attorno a  $z$  (vedi la figura A.2). Se ci riferiamo alle componenti del vettore nel riferimento di partenza, a ciascuna di queste componenti si può applicare la regola A.29:

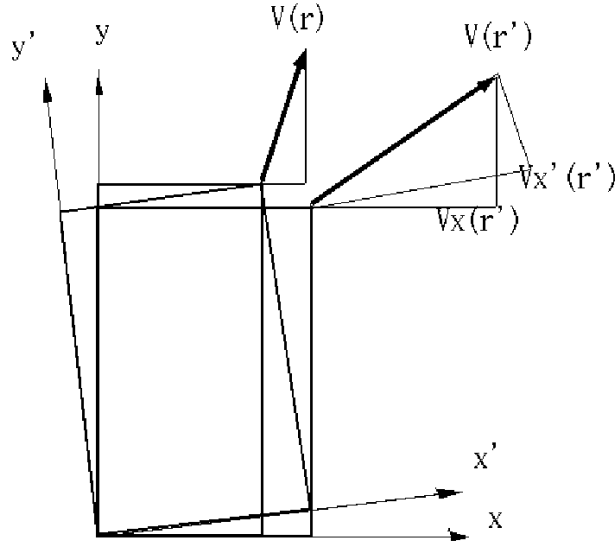


Figura A.2: Campo vettoriale

$$V_x(\mathbf{r}') = [1 - i\epsilon L_z]V_x(\mathbf{r}) ; V_y(\mathbf{r}') = [1 - i\epsilon L_z]V_y(\mathbf{r}) ; V_z(\mathbf{r}') = [1 - i\epsilon L_z]V_z(\mathbf{r}), \quad (\text{A.35})$$

ovvero globalmente:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}') = [1 - i\epsilon L_z]\mathbf{V}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.36})$$

Ma nel membro di sinistra il vettore deve essere rappresentato nella base ruotata. Indicando con  $V, \theta, \phi$  le coordinate polari di  $\mathbf{V}(\mathbf{r}')$  proiettate sugli assi

originali, le sue coordinate cartesiane (nel punto trasformato, ma proiettate sulle direzioni originali), sono:

$$V_x(\mathbf{r}') = V \sin \theta \cos \phi ; V_y(\mathbf{r}') = V \sin \theta \sin \phi ; V_z(\mathbf{r}') = V \cos \theta. \quad (\text{A.37})$$

Invece le coordinate polari nel punto trasformato e nel riferimento ruotato, sono  $V, \theta, \phi - \epsilon$ , e le corrispondenti coordinate cartesiane sono:

$$\begin{aligned} V_{x'}(\mathbf{r}') &= V \sin \theta \cos(\phi - \epsilon) \simeq V \sin \theta (\cos \phi + \epsilon \sin \phi) \\ V_{y'}(\mathbf{r}') &= V \sin \theta \sin(\phi - \epsilon) \simeq V \sin \theta (\sin \phi - \epsilon \cos \phi) \\ V_{z'}(\mathbf{r}') &= V \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Ricordando la A.26, è facile verificare che

$$\mathbf{V}'(\mathbf{r}') = \mathbf{M}_z(\epsilon) \mathbf{V}(\mathbf{r}'), \quad (\text{A.39})$$

Allora, mettendo insieme le equazioni A.35 e A.39, possiamo scrivere finalmente:

$$\mathbf{V}'(\mathbf{r}') = \mathbf{R}_z(\epsilon) \mathbf{V}(\mathbf{r}), \quad (\text{A.40})$$

avendo definito un nuovo operatore rotazione per i campi vettoriali

$$\mathbf{R}_z(\epsilon) = [1 - i\epsilon L_z] \mathbf{M}_z(\epsilon). \quad (\text{A.41})$$

Conviene porre  $\mathbf{M}_z(\epsilon)$  nella forma:

$$\mathbf{M}_z(\epsilon) = \hat{1} - i\epsilon \mathbf{T}_z ; \mathbf{T}_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.42})$$

e troviamo quindi (al primo ordine in  $\epsilon$ ):

$$\mathbf{R}_z(\epsilon) = \hat{1} - i\epsilon(L_z \hat{1} + \mathbf{T}_z). \quad (\text{A.43})$$

Analogo ragionamento condotto sugli assi  $x, y$ , porta a una banale generalizzazione dell'equazione A.43 e delle matrici  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{T}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.44})$$

Un esame delle matrici A.42 e A.44, consente di verificare immediatamente che:

- a)  $\mathbf{T}$  è hermitiano.

b) Valgono le proprietà:

$$[T_i, T_j] = T_k ; \sum_i T_i^2 = 2 \cdot \hat{1}, \quad (\text{A.45})$$

con  $ijk=xyz$  e permutazioni circolari.

La matrice  $\mathbf{T}$  rappresenta quindi l'operatore momento angolare di modulo 1, ma non in rappresentazione standard, perchè  $T_z$  non è diagonale. Cerchiamo allora se esiste una trasformazione unitaria  $U$ , capace di ridurre  $\mathbf{T}$  alla sua forma standard  $\mathbf{S}$ .

Dalle componenti di  $\mathbf{S}$  in rappresentazione standard:

$$\mathbf{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} ; \mathbf{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.46})$$

dalla trasformazione  $\mathbf{S}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{T}$ , e dall'unitarietà di  $\mathbf{U}$  si ricava, a meno di una fase inessenziale, la seguente espressione di  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.47})$$

Tramite la trasformazione  $\mathbf{U}$ , il campo vettoriale  $\mathbf{V}$  acquista la nuova rappresentazione  $\mathbf{W} = \mathbf{U}\mathbf{V}$ , che si trasforma per rotazioni nel modo seguente:

$$\mathbf{R}_z(\epsilon) = \hat{1} - i\epsilon(L_z\hat{1} + \mathbf{S}_z), \quad (\text{A.48})$$

dove  $\mathbf{S}$ , è l'operatore di spin 1.

In quella forma dell'operatore rotazione, l'operatore momento angolare trasforma le 3 componenti (scalari) del vettore, intese come componenti sul sistema di partenza. L'operatore di spin mescola tra loro le componenti, tenendo conto della mutata orientazione degli assi su cui si proietta.  $\mathbf{W}$ , è un tensore sferico irriducibile di rango 1, e rappresenta la forma sferica del campo vettoriale  $\mathbf{V}$ . Introducendo le 3 proiezioni del vettore  $s = 1$ , ovvero  $m = 1, 0, -1$ , le componenti di  $\mathbf{W}$  si scrivono nella forma:

$$W_1^1 = \frac{-V_x + iV_y}{\sqrt{2}} ; W_1^0 = V_z ; W_1^{-1} = \frac{V_x + iV_y}{\sqrt{2}}. \quad (\text{A.49})$$

Le estensioni della A.48 a rotazioni finite attorno a un asse qualsiasi, individuato dal suo versore  $\mathbf{n}$  oppure dagli angoli di Eulero  $\alpha, \beta, \gamma$ , si scrivono:

$$\mathbf{R}_n(\alpha) = e^{-i\alpha\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}} ; \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} ; \mathbf{L} + \mathbf{S} = \mathbf{J}. \quad (\text{A.50})$$

L'equazione A.49 dà la forma polare di un vettore cartesiano.

Dati 2 vettori  $W$  e  $X$  in forma polare, essi si possono trattare alla stregua di stati di tipo  $|1m\rangle$ , e quindi tramite i coefficienti di CG da questi vettori si possono costruire rispettivamente uno scalare, un vettore e un tensore di rango 2:

$$[W_1 \otimes X_1]_0^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(W_1^1 X_1^{-1} - W_1^0 X_1^0 + W_1^{-1} X_1^1); \quad (\text{A.51})$$

$$\begin{aligned} [W_1 \otimes X_1]_1^1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^1 X_1^0 - W_1^0 X_1^1), \\ [W_1 \otimes X_1]_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^1 X_1^{-1} - W_1^{-1} X_1^1), \\ [W_1 \otimes X_1]_1^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^0 X_1^{-1} - W_1^{-1} X_1^0); \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\begin{aligned} [W_1 \otimes X_1]_2^2 &= W_1^1 X_1^1; \quad [W_1 \otimes X_1]_2^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^1 X_1^0 + W_1^0 X_1^1), \\ [W_1 \otimes X_1]_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{6}}W_1^1 X_1^{-1} + \sqrt{\frac{2}{3}}W_1^0 X_1^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}W_1^{-1} X_1^1, \\ [W_1 \otimes X_1]_2^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(W_1^0 X_1^{-1} + W_1^{-1} X_1^0), \\ [W_1 \otimes X_1]_2^{-2} &= W_1^{-1} X_1^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A.53})$$

Applicando la trasformazione A.49 al sistema A.53, si trova che l'accoppiamento a 0 è proporzionale alla definizione elementare di prodotto scalare, e l'accoppiamento ad 1 è proporzionale alla definizione di prodotto vettore, ovvero:

$$[W_1 \otimes X_1]_0^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{V} \cdot \mathbf{U}; \quad [W_1 \otimes X_1]_1^1 = -\frac{i}{\sqrt{3}}\mathbf{V} \times \mathbf{U}. \quad (\text{A.54})$$

Ovviamente l'accoppiamento a 2 dà un tensore di rango 2, e non ha un analogo in algebra vettoriale. I coefficienti di CG che interessano le trasformazioni viste sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \langle 111, -1 | 1100 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \langle 1010 | 1100 \rangle = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \langle 111, -1 | 1110 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \langle 1010 | 1110 \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle 111, 0 | 1111 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\langle 111, -1 | 1120 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}} ; \quad \langle 101, 0 | 1120 \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \\
\langle 111, 0 | 1121 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} ; \quad \langle 1111 | 1122 \rangle = 1.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Tutti gli altri CG di interesse, si possono ricavare da queste tramite trasformazioni di tipo A.20.

### A.3 Le matrici di Wigner e le armoniche sferiche

Se applichiamo l'operatore  $\mathbf{R}(\alpha\beta\gamma)$  a uno stato  $|jm\rangle$ , otteniamo (inserendo una completezza):

$$\mathbf{R}(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'} |im'\rangle \langle jm' | \mathbf{R}(\alpha\beta\gamma) | jm \rangle. \tag{A.56}$$

L'elemento di matrice dell'operatore rotazione nel suo spazio, si chiama matrice  $D$  o matrice di Wigner:

$$D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = \langle jm' | e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} | jm \rangle = e^{-i(\alpha m' + \gamma m)} d_{m'm}^j(\beta). \tag{A.57}$$

Il terzo membro della A.57 estrae in modo banale la dipendenza da  $\alpha$  e  $\gamma$ , e definisce la matrice ridotta:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \langle jm' | e^{-i\beta J_y} | jm \rangle. \tag{A.58}$$

Lo spazio  $|jm\rangle$  si trasforma in sè stesso per rotazioni del riferimento. Il singolo stato  $|jm\rangle$  si trasforma in sè stesso per rotazioni attorno all'asse  $z$ . Tutto ciò spiega la convenzione sugli angoli di Eulero, che predilige la rotazione attorno all'asse  $z$ :

$$\mathbf{R}(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle. \tag{A.59}$$

Consideriamo la trasformazione A.19, in forma leggermente diversa (che tien conto implicitamente della regola di selezione A.17):

$$|j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \sum_j \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j, m_1 + m_2 \rangle |j_1 j_2 j, m_1 + m_2\rangle, \tag{A.60}$$

e operiamo a sinistra con l'operatore rotazione, tenendo conto della A.56. Si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m'_1 m'_2} D_{m'_1 m_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) D_{m'_2 m_2}^{j_2}(\alpha\beta\gamma) |j_1 m'_1 j_2 m'_2 \rangle = \\
& = \sum_{jm} \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_1 j_2 j, m'_1 + m'_2 \rangle \\
& D_{m', m_1 + m_2}^j(\alpha\beta\gamma) |j_1 j_2 j m \rangle .
\end{aligned} \tag{A.61}$$

Adesso scomponiamo lo stato  $|j_1 j_2 j m \rangle$  a secondo membro della A.61, ed uguagliamo i singoli termini della sommatoria (operazione legittima per via dell'ortogonalità degli stati):

$$\begin{aligned}
D_{m'_1 m_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) D_{m'_2 m_2}^{j_2}(\alpha\beta\gamma) & = \sum_j \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_1 j_2 j, m'_1 + m'_2 \rangle \\
& \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j, m_1 + m_2 \rangle D_{m'_1 + m'_2, m_1 + m_2}^j(\alpha\beta\gamma).
\end{aligned} \tag{A.62}$$

La A.62 è detta serie di CG, ed è in realtà una regola di composizione per le matrici  $D$ . La relazione inversa, cioè la regola di decomposizione, si può ottenere o applicando alla A.62 l'ortonormalità dei CG, oppure eseguendo procedimento analogo sulla A.18 anzichè sulla A.19:

$$\begin{aligned}
D_{m' m}^j(\alpha\beta\gamma) & = \sum_{m'_1 m_1} \langle j_1 m'_1 j_2, m' - m'_1 | j_1 j_2 j m' \rangle \\
& \langle j_1 m_1 j_2, m - m_1 | j_1 j_2 j m \rangle \\
D_{m'_1 m_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) D_{m' - m'_1, m - m_1}^{j_2}(\alpha\beta\gamma),
\end{aligned} \tag{A.63}$$

per tutti i  $j_1, j_2$  che possono dare  $j$  per composizione.

Sostituendo la A.57 nelle A.62, A.63, si vede immediatamente che due espressioni formalmente identiche valgono per le matrici  $d$ :

$$\begin{aligned}
d_{m'_1 m_1}^{j_1}(\beta) d_{m'_2 m_2}^{j_2}(\beta) & = \sum_j \langle j_1 m'_1 j_2 m'_2 | j_1 j_2 j, m'_1 + m'_2 \rangle \\
& \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j, m_1 + m_2 \rangle d_{m'_1 + m'_2, m_1 + m_2}^j(\beta); \\
d_{m' m}^j(\beta) & = \sum_{m'_1 m_1} \langle j_1 m'_1 j_2, m' - m'_1 | j_1 j_2 j m' \rangle \\
& \langle j_1 m_1 j_2, m - m_1 | j_1 j_2 j m \rangle d_{m'_1 m_1}^{j_1}(\beta) d_{m' - m'_1, m - m_1}^{j_2}(\beta).
\end{aligned} \tag{A.64}$$

Allora, se è noto il set  $d_{m' m}^{\frac{1}{2}}$ , è possibile costruire qualsiasi  $\mathbf{d}$  con accoppiamenti successivi.

Tramite le A.5, A.6, e lo sviluppo in serie dell'esponenziale, si ricava:

$$\mathbf{d}^{\frac{1}{2}}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.65})$$

Per le matrici  $d$  valgono le seguenti relazioni di simmetria:

$$\begin{aligned} d_{m'm}^j(\beta) &= (-)^{m'-m} d_{m'm}^j(-\beta); \\ d_{m'm}^j(\beta) &= (-)^{m'-m} d_{-m',-m}^j(\beta); \\ d_{m'm}^j(\beta) &= (-)^{m'-m} d_{mm'}^j(\beta). \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Le A.66 si possono riassumere dicendo che l'esecuzione di una delle seguenti operazioni:

- inversione del segno della rotazione,
- inversione del segno delle 2 proiezioni,
- scambio delle 2 proiezioni,

introduce nella  $d$  il fattore di fase  $(-)^{m'-m}$ .

Un ovvio corollario (conseguente al fatto che  $m' - m$  è intero), è che 2 qualsiasi delle operazioni suddette lasciano la  $d$  invariata, mentre tutte e tre introducono ancora la stessa fase.

In particolare vale la:

$$d_{m'm}^j(\beta) = d_{mm'}^j(-\beta). \quad (\text{A.67})$$

Questa equazione esprime l'unitarietà della  $d$ . Infatti il secondo membro è il coniugato hermitiano (essendo  $d$  reale) della matrice relativa alla trasformazione inversa (che si attua invertendo il segno di  $\beta$ ).

Dalla seconda delle A.66 si ricava facilmente l'analoga proprietà della  $D$  (che è complessa):

$$D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = (-)^{m-m'} D_{-m',-m}^j(\alpha\beta\gamma). \quad (\text{A.68})$$

L'armonica sferica  $Y_l^m(\theta\phi)$ , in quanto autostato del momento angolare orbitale, soddisfa alla A.59:

$$\mathbf{R}(\alpha\beta\gamma)Y_l^m(\theta\phi) = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\alpha, \beta, \gamma)Y_l^{m'}(\theta\phi). \quad (\text{A.69})$$

La trasformazione inversa, essendo  $D$  unitaria, si scrive:

$$Y_l^m(\theta\phi) = \sum_{m'} D_{mm'}^{l*}(\alpha\beta\gamma)\mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma)Y_l^{m'}(\theta\phi). \quad (\text{A.70})$$



Scegliamo adesso una particolare rotazione del riferimento con  $\alpha = \phi, \beta = \theta, \gamma = \text{qualsiasi}$ . A seguito di una rotazione siffatta il punto di coordinate  $\theta\phi$  della sfera unitaria va a cascare sull'asse  $z$ , e quindi:

$$\mathbf{R}(\phi, \theta, \gamma = \text{qualsiasi})Y_l^{m'}(\theta\phi) = Y_l^{m'}(0) = \frac{\hat{l}}{\sqrt{4\pi}}\delta_{0m'}, \quad (\text{A.71})$$

per cui la A.70 diventa:

$$Y_l^m(\theta\phi) = \frac{\hat{l}}{\sqrt{4\pi}}D_{m0}^{l*}(\phi, \theta). \quad (\text{A.72})$$

*Quando una delle 2 proiezioni è nulla, la matrice  $D$  si riduce a un'armonica sferica.*

Dall'unitarietà delle matrici  $D$  A.68, si ricava l'importante regola di coniugazione delle  $Y$ :

$$Y_l^{m*}(\theta\phi) = (-)^m Y_l^{-m}(\theta\phi). \quad (\text{A.73})$$

Consideriamo l'accoppiamento a 0 di due armoniche sferiche:

$$[Y_l \otimes Y_l]_0 = \sum_m \langle lml, -m | ll00 \rangle Y_l^m Y_l^{-m}. \quad (\text{A.74})$$

Poichè

$$\langle lml, -m | ll00 \rangle = \frac{(-)^{l-m}}{\hat{l}}, \quad (\text{A.75})$$

possiamo scrivere:

$$[Y_l \otimes Y_l]_0 = (-)^l \sum_m Y_l^m (-)^m Y_l^{-m} = (-)^l \sum_m Y_l^m Y_l^{m*}, \quad (\text{A.76})$$

avendo tenuto conto della A.73 e del fatto che  $l$  è intero.

Si definisce prodotto scalare fra armoniche sferiche la quantità:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_l(\hat{r}_1) \cdot \mathbf{Y}_l(\hat{r}_2) &= (-)^l [Y_l(\hat{r}_1) \otimes Y_l(\hat{r}_2)]_0 = \\ &= \sum_m Y_l^m(\hat{r}_1) (-)^m Y_l^{-m}(\hat{r}_2) = \sum_m Y_l^m(\hat{r}_1) Y_l^{m*}(\hat{r}_2). \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Quanto detto è perfettamente coerente con la A.51. Si noti che questo prodotto scalare coincide solo a meno di fattori, sia con il prodotto scalare elementare fra vettori, sia con l'operazione di accoppiamento a zero. La cosa importante però è che il risultato di tutte queste operazioni è uno scalare, invariante per rotazioni. Consideriamo allora l'equazione A.77 e ruotiamo il riferimento in modo che il nuovo asse  $z$  passi per il punto  $(\hat{r}_1)$ , e il nuvo

piano  $xz$  contenga il punto  $(\hat{r}_2)$ . Essendo il prodotto scalare invariante per rotazioni, abbiamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_1(\hat{\mathbf{r}}_1) \cdot \mathbf{Y}_1(\hat{\mathbf{r}}_2) &= \sum_m Y_l^m(0, \phi = \text{qualsiasi}) Y_l^{m*}(\theta, 0) = \\ &= \frac{\hat{l}}{\sqrt{4\pi}} Y_l^0(\hat{r}_{12}) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\hat{r}_{12}), \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

avendo indicato con  $\hat{r}_{12}$  l'angolo che chiude il triangolo sferico i cui vertici sono  $00, \hat{r}_1, \hat{r}_2$ .

L'equazione A.78 è detta *teorema di addizione delle armoniche sferiche*.

## A.4 Il teorema di Wigner Eckart

La chiave di volta dell'algebra dei tensori è il teorema di WE, che riguarda la rappresentazione dell'operatore tensore sferico nella sua base naturale, di autostati di momento angolare.

Consideriamo l'elemento di matrice  $\langle jm|T_L^M|i'm' \rangle$ , ed eseguiamo una rotazione sul riferimento con angoli di Eulero qualsiasi, a seguito della quale l'operatore e gli stati si trasformano come tensori, mentre l'elemento di matrice, in quanto scalare, resta invariato:

$$\langle jm|T_L^M|i'm' \rangle = \sum_{\mu\nu\mu'} D_{\mu m}^{j*}(\alpha\beta\gamma) D_{\nu M}^L(\alpha\beta\gamma) D_{\mu'm'}^j(\alpha\beta\gamma) \langle j\mu|T_L^\nu|j'\mu' \rangle. \quad (\text{A.79})$$

Eseguiamo l'accoppiamento delle 2 matrici  $D$  non asteriscate tramite la A.62:

$$\begin{aligned} \langle jm|T_L^M|i'm' \rangle &= \sum_{\mu\nu\mu'J} \langle j'\mu'Lv|j'LJ, \mu' + \nu \rangle \langle j'm'LM|j'LJ, m' + M \rangle \\ &D_{\mu m}^{j*}(\alpha\beta\gamma) D_{\mu'+\nu, m'+M}^J(\alpha\beta\gamma) \langle j\mu|T_L^\nu|j'\mu' \rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

Poichè l'identità vale per qualsiasi  $\alpha\beta\gamma$ , eliminiamo gli angoli tramite integrazione a tutto lo spazio, usando l'identità:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin\beta d\beta \int_0^{2\pi} d\gamma D_{\mu_1 m_1}^{j_1*}(\alpha\beta\gamma) D_{\mu_2 m_2}^{j_2}(\alpha\beta\gamma) = \delta_{j_1 j_2} \delta_{\mu_1 \mu_2} \delta_{m_1 m_2} \frac{8\pi^2}{\hat{j}_1^2}. \quad (\text{A.81})$$

Si ottiene:

$$\langle jm|T_L^M|i'm' \rangle = \frac{1}{\hat{j}} \langle j'm'LM|j'LJm \rangle \langle j||T_L||j' \rangle, \quad (\text{A.82})$$

avendo posto:

$$\langle j || T_L || j' \rangle = \frac{1}{\hbar} \sum_{\mu\mu'} \langle j' m u' L, \mu - \mu' | j' L j \mu \rangle \langle j \mu | T_L^{\mu-\mu'} | j' \mu' \rangle . \quad (\text{A.83})$$

La A.82 è il teorema di WE, che estrae dalla matrice le regole di selezione e la dipendenza dalle proiezioni. L'espressione A.83 è detta matrice ridotta e non contiene le proiezioni. Il risultato più importante è che i 3 momenti  $jLj'$ , devono soddisfare alla relazione triangolare.

# Bibliografia

- [1] J.R.Taylor, Scattering Theory, Wiley.
- [2] M.L.Goldberger and K.M.Watson, Collision Theory, Wiley.
- [3] R.G.Newton, Scattering Theory of Waves and Particles, McGraw–Hill.
- [4] P.E.Hodgson, Nuclear Reactions and Nuclear Structure, Clarendon.
- [5] G.R.Satchler, Direct Nuclear Reactions, Clarendon.
- [6] M.E.Rose, Elementary theory of Angular Momentum, Wiley.
- [7] U.Fano and G.Racah, Irreducible Tensorsial Sets, Academic Press.

# Indice

0.1	Premessa . . . . .	ii
<b>I</b>	<b>Lo scattering elastico fra due particelle puntiformi</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Equazioni integrali dello scattering</b>	<b>3</b>
1.1	Gli autostati di momento . . . . .	3
1.2	Equazione di Lippmann–Schwinger e sua soluzione formale . . . . .	9
1.3	Ampiezza di scattering, operatore di Moeller, matrice transizione e matrice di scattering . . . . .	21
1.4	Serie perturbativa, approssimazione di Born e formula a due potenziali . . . . .	30
<b>2</b>	<b>La decomposizione su stati di momento angolare</b>	<b>35</b>
2.1	Generalità . . . . .	35
2.2	Equazione di Schroedinger completa e funzione d’onda . . . . .	43
2.3	Sviluppo delle matrici T ed S . . . . .	44
2.4	Ampiezza di scattering e sezione d’urto . . . . .	45
2.5	Equazione di Lippmann-Schwinger, approssimazione di Born e distorted wave Born approximation . . . . .	48
2.6	La matrice $K$ . . . . .	52
<b>3</b>	<b>La matrice <math>R</math> e le risonanze</b>	<b>58</b>
3.1	Comportamenti asintottici dell’equazione radiale . . . . .	58
3.2	La teoria della matrice $\mathcal{R}$ . . . . .	60
3.3	La risonanza . . . . .	63

<b>II</b>	<b>Scattering elastico e inelastico fra due particelle dotate di struttura</b>	<b>69</b>
<b>4</b>	<b>Scattering elastico fra particelle dotate di spin</b>	<b>70</b>
4.1	L'ampiezza di scattering . . . . .	70
4.2	Matrice densità e vettore polarizzazione . . . . .	76
4.3	Le equazioni accoppiate . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Scattering elastico e inelastico fra particelle dotate di struttura</b>	<b>91</b>
5.1	Il problema tridimensionale . . . . .	91
5.2	Sviluppo in stati $s$ e $J$ . . . . .	101
5.3	Wronskiani e funzione di Jost . . . . .	104
<b>III</b>	<b>Appendici</b>	<b>111</b>
<b>A</b>	<b>Il momento angolare in meccanica quantistica</b>	<b>112</b>
A.1	L'operatore momento angolare . . . . .	112
A.2	L'operatore rotazione . . . . .	117
A.3	Le matrici di Wigner e le armoniche sferiche . . . . .	123
A.4	Il teorema di Wigner Eckart . . . . .	127