

Indice

1	Relatività ristretta	4
1.1	La relatività galileiana e la relatività einsteiniana	4
1.2	Invarianza dell'intervallo spazio-temporale	8
1.2.1	Il teorema di invarianza dell'intervallo	8
1.3	Conseguenze del teorema dell'intervallo	12
1.3.1	Intervalli di tipo tempo, di tipo spazio e di tipo luce	12
1.3.2	La velocità massima dei segnali è c	12
1.3.3	Dilatazione dei tempi	13
1.3.4	Contraazione delle lunghezze	14
1.4	Trasformazioni di Lorentz speciali	15
1.4.1	Dilatazione dei tempi	17
1.4.2	Contraazione delle lunghezze	18
1.4.3	Trasformazione relativistica della velocità	18
2	Trasformazioni generali e algebra tensoriale	20
2.1	Il gruppo di Poincarè	20
2.1.1	Struttura del gruppo di Poincarè	23
2.1.2	Struttura del gruppo di Lorentz	23
2.1.3	Struttura del gruppo proprio di Lorentz	25
2.1.4	Il principio di relatività di Einstein	26
2.2	Quadritensori e calcolo quadritensoriale	26
2.2.1	Quadritensori	27
2.3	Algebra tensoriale	29
2.3.1	Somma e prodotto di tensori	29
2.3.2	Prodotto scalare	30
2.3.3	Contraazione dei tensori	30
2.3.4	Tensori costanti	31
2.3.5	Le leggi di trasformazione dei campi	31
2.3.6	Il quadrigradiente e la sua legge di trasformazione	32
3	Meccanica relativistica di un punto materiale	33
3.1	Quadrivelocità	33
3.2	Quadriaccelerazione	34

3.3	Quadripulso	35
3.3.1	Osservazione: energia a riposo	36
3.3.2	Osservazione: $E = mc^2$	36
3.4	Quadriforza	36
4	Forma covariante a vista delle leggi dell'elettromagnetismo	38
4.1	L'equazione di Lorentz e il tensore elettromagnetico	38
4.2	Trasformazioni speciali del campo elettromagnetico	40
4.3	Le equazioni di Maxwell	41
4.4	Il quadrivettore corrente e l'equazione di continuità	43
4.5	Quadricorrente di un sistema di cariche puntiformi	44
4.6	Le equazioni di Maxwell in termini di quadripotenziale	47
4.7	L'invarianza di gauge	49
4.8	Seconda forma del primo gruppo di equazioni di Maxwell	49
4.9	Invarianti del campo elettromagnetico	50
5	Principi di conservazione del campo elettromagnetico	51
5.1	Bilancio energetico nel formalismo tridimensionale	51
5.2	Il tensore energia-impulso e la conservazione dell'impulso	53
5.3	Conservazione del momento angolare	57
6	Elementi di teoria dei campi	60
6.1	L'azione e il principio di minima azione	60
6.1.1	Sistemi conservativi ad N gradi di libertà	61
6.1.2	Il principio di minima azione per i campi	63
6.2	Metodo dell'azione per una particella libera	65
6.2.1	Derivazione delle equazioni del moto	68
6.2.2	Le costanti del moto	68
6.3	Principi di conservazione	69
6.3.1	Conservazione dell'energia e della quantità di moto	70
6.3.2	Conservazione del momento angolare	71
6.3.3	Conservazione della corrente	72
6.4	Metodo dell'azione per N cariche interagenti con un campo elettromagnetico	72
6.4.1	L'azione per N cariche interagenti con un campo elettromagnetico	72
6.4.2	Le equazioni del moto e le equazioni di campo	76
6.4.3	Il teorema di Noether e le costanti del moto	78
6.5	Cenni alle particelle con massa quantistiche	83
6.5.1	Il campo scalare scarico e l'equazione di Klein-Gordon	83
6.5.2	Le particelle a spin semintero e l'equazione di Dirac	84
6.5.3	Il campo scalare carico	92
6.5.4	I bosoni intermedi	93

7	Le onde elettromagnetiche	95
7.1	L'equazione delle onde	95
7.2	Soluzione generale dell'equazione delle onde	96
7.3	Proprietà delle onde elettromagnetiche	100
7.3.1	L'effetto Doppler	103
8	Coniugazione di carica, parità e inversione del tempo	104
8.1	La coniugazione della carica	104
8.1.1	La coniugazione di carica in elettrodinamica	105
8.1.2	La coniugazione di carica nelle interazioni forti	106
8.1.3	La coniugazione di carica nelle interazioni deboli	107
8.2	Il numero barionico	107
8.3	I numeri leptonici	108
8.4	La parità	108
8.4.1	La parità nelle interazione elettromagnetiche e forti	109
8.4.2	La parità nelle interazioni deboli	110
8.4.3	Il decadimento β	111
8.4.4	Il decadimento e la cattura del μ^-	120
8.4.5	Transizioni β con $\Delta S = 1$ e angolo di Cabibbo	121
8.5	L'inversione del tempo	122
8.5.1	Il teorema TCP	124
8.5.2	Il sistema $K^0 - \bar{K}^0$	124

Capitolo 1

Relatività ristretta

1.1 La relatività galileiana e la relatività einsteiniana

Prima di addentrarci nella trattazione della teoria della relatività ristretta, ricordiamo che cosa si intende per sistema di riferimento: *si chiama sistema di riferimento l'insieme di un sistema di coordinate e di orologi sincronizzati tali da poter associare ad ogni evento un punto dello spazio ed un istante di tempo*. In particolare si chiamano *inerziali* quei sistemi di riferimento nei quali il moto libero di un corpo avviene a velocità costante.

Per un sistema isolato tutte le leggi della fisica sono invarianti in forma in tutti i sistemi di riferimento in quiete relativa che differiscano l'un l'altro per una rotazione degli assi e per una traslazione dell'origine. Questa invarianza delle leggi della fisica diventa evidente se si pensa che tutte le leggi della fisica per un sistema isolato possono essere espresse in forma vettoriale. Tale invarianza è dovuta all'*omogeneità* (equivalenza di tutti i punti) e all'*isotropia* (equivalenza di tutte le direzioni) dello spazio, ed ha come conseguenza la conservazione dell'impulso e del momento angolare. Per un sistema isolato le leggi della fisica sono poi invarianti anche per traslazioni nel tempo, grazie all'omogeneità del tempo, e ciò comporta la conservazione dell'energia.

Inoltre, per un sistema isolato, le leggi della meccanica newtoniana sono invarianti in forma in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro (*principio di relatività galileiano*). Tale principio vale se si ammette, come sembra naturale fare, che le leggi di trasformazione delle coordinate di un punto P nel passaggio da un sistema di riferimento K ad un altro sistema di riferimento K' in moto rettilineo uniforme rispetto a K con velocità \mathbf{v}_0 siano quelle di Galileo, cioè

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}(t) - \mathbf{v}_0 t . \quad (1.1)$$

Derivando questa relazione rispetto al tempo si ottiene la legge di composizione delle velocità

$$\mathbf{v}'(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_0 , \quad (1.2)$$

e derivando di nuovo rispetto al tempo si ottiene la costanza delle accelerazioni nei due sistemi:

$$\mathbf{a}'(t) = \mathbf{a}(t) , \quad (1.3)$$

da cui risulta evidente l'invarianza della seconda legge di Newton, una volta ammesso che le forze e le masse sono assolute.

A differenza delle leggi della meccanica, le leggi dell'elettromagnetismo non sono invarianti in forma per trasformazioni di Galileo: esse infatti non soddisfano il principio di relatività galileiana. Più precisamente, la legge di Lorentz

$$m\mathbf{a} = e \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{H} \right) \quad (1.4)$$

soddisfa il principio di Galileo, nel senso che è invariante in forma per trasformazioni del tipo (1.1), se contemporaneamente si impone ai campi elettrico e magnetico la legge di trasformazione (di Galileo)

$$\begin{cases} \mathbf{H}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{v}_0}{c} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (1.5)$$

Ma ciò che complica le cose è il fatto che le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (1.6)$$

non lo soddisfano. Ciò è evidente se si pensa che una conseguenza matematica delle equazioni di Maxwell è la propagazione delle onde elettromagnetiche con velocità pari alla costante c che compare in esse. Dato allora un sistema di riferimento K , se in esso valgono le equazioni di Maxwell e se le velocità si compongono secondo la (1.2), le equazioni di Maxwell non potranno certo valere nella stessa forma in un altro sistema di riferimento in moto rettilineo uniforme rispetto a K . Verifichiamo direttamente quanto detto: se assumiamo che le densità di carica e corrente si trasformano come

$$\begin{cases} \rho'(\mathbf{r}', t) = \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{\mathbf{v}_0}{c} \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{j}'(\mathbf{r}', t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad (1.7)$$

è allora facile verificare che le equazioni di Maxwell sono invarianti in forma sotto le trasformazioni (1.1), (1.5) e (1.7) solo se si trascura nell'equazione $\nabla \times \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$ il termine di spostamento $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$. È anche interessante notare che, trascurando il termine di spostamento, è possibile eliminare dalle equazioni di Maxwell la costante c con una ridefinizione di \mathbf{H} e di \mathbf{j} :

$$\tilde{\mathbf{H}} = \frac{1}{c} \mathbf{H}, \quad \tilde{\mathbf{j}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{j}. \quad (1.8)$$

Invece, nessuna ridefinizione dei campi, delle densità di carica e di corrente permette di eliminare c se il termine di spostamento è presente. In effetti è proprio $\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ il responsabile della propagazione delle onde.

Osserviamo infine che con la ridefinizione (1.8) il termine di spostamento $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ viene moltiplicato per $1/c^2$: ciò significa che le violazioni del principio di relatività galileiano nelle esperienze di elettromagnetismo sono dell'ordine di $1/c^2$.

Resta comunque il fatto che le leggi dell'elettromagnetismo non soddisfano il principio di Galileo. Ciò porta a pensare che, se è giusto tutto quello che abbiamo fatto finora, per la meccanica tutti i sistemi in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro sono equivalenti, mentre per l'elettromagnetismo esiste un sistema di riferimento privilegiato: quello nel quale valgono le equazioni di Maxwell nella forma (1.6). Se chiamiamo *etere* tale sistema di riferimento privilegiato, allora deve essere possibile misurare con esperienze di ottica ed elettromagnetismo la velocità di un qualunque sistema rispetto all'etere.

L'esperienza di Michelson e Morley venne ideata proprio con lo scopo di misurare la velocità della Terra rispetto all'etere. Il risultato negativo di tale esperienza, cioè il fatto che non si osservò lo spostamento delle frange di interferenza che avrebbe dovuto segnalare una velocità diversa da zero della Terra rispetto all'etere, mise in crisi la fisica. Esperienze eseguite a sei mesi di distanza diedero sempre risultati negativi: eppure la sensibilità degli strumenti era sufficiente a determinare velocità dell'ordine di quella di rotazione della Terra. D'altra parte, la conclusione che la Terra fosse ferma rispetto all'etere era contraddetta da altri fatti sperimentali come l'aberrazione delle stelle. Tutte le ipotesi ad hoc proposte per spiegare il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley (trascinamento dell'etere, contrazione di Lorentz-Fitzgerald, teorie emissive) vennero puntualmente bocciate.

Nel 1905 Einstein risolse il problema in modo radicale. Il punto di partenza dell'analisi di Einstein fu di elevare a principio il risultato negativo dell'esperienza di Michelson e Morley e delle altre consimili, postulando che l'etere non esista, quindi che non solo le leggi della meccanica, ma anche quelle dell'elettromagnetismo, cioè che tutte le leggi della fisica fossero invarianti in forma nel passare da un sistema di riferimento inerziale ad un altro in moto relativo uniforme rispetto al primo (*principio di relatività di Einstein*).

Poiché le leggi dell'elettromagnetismo non sono inavarianti in forma sotto le trasformazioni di Galileo, se si ammette il postulato di Einstein ci si trova di fronte ad un dilemma: o si cambiano le leggi dell'elettromagnetismo, oppure si cambiano le leggi di trasformazione di Galileo. Siccome i tentativi di modificare le leggi dell'elettromagnetismo si rivelarono infruttuosi, non restò altro che tentare di modificare la legge di trasformazione di Galileo. Il carattere rivoluzionario di tale scelta sta nel fatto che le trasformazioni di Galileo sembrano a prima vista ovvie e naturali: fu merito di Einstein aver messo in luce che esse si basano su un'ipotesi a priori. Per rendercene conto consideriamo l'usuale derivazione della (1.1).

Consideriamo due sistemi di riferimento K e K' coincidenti all'istante $t = 0$ ed in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Siamo O e O' le origini dei rispettivi sistemi, sia \mathbf{v}_0 la velocità del secondo rispetto al primo e sia P un generico punto. Partiamo dalla relazione vettoriale

$$\mathbf{O}'P = \mathbf{OP} - \mathbf{OO}' \quad (1.9)$$

dove $\mathbf{OP} = \mathbf{r}(t)$ è il raggio vettore di P nel sistema K , $\mathbf{O}'P = \mathbf{r}'(t)$ è il raggio vettore di P nel sistema K' e $\mathbf{OO}' = \mathbf{v}_0 t$ è il raggio vettore di O' in K . Dalla relazione (1.9) segue allora la (1.1). La (1.9) vale se il calcolo vettoriale, cioè se la legge di trasformazione è lineare. Tra poco vedremo

che ciò equivale a supporre che *lo spazio vuoto è omogeneo e isotropo e che il tempo è omogeneo*. L'invarianza per rotazioni e traslazioni e la conservazione del momento angolare per un sistema isolato ci dicono che questa ipotesi è sperimentalmente ben fondata. Tuttavia, il passaggio dalla (1.9) alla (1.1) sarebbe ovvio se i tre vettori \mathbf{r} , \mathbf{r}' e $\mathbf{v}_0 t$ fossero tutti misurati in K . Poiché \mathbf{r}' è misurato in K' , il passaggio dalla (1.9) alla (1.1) è giustificato solo se *intervalli temporali e distanze spaziali sono gli stessi in tutti i sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro*. Questa ipotesi sembra ovvia perché sembra confermata dall'esperienza quotidiana. Ma l'esperienza quotidiana ha a che fare con velocità piccole rispetto a quelle della luce, per cui quello che possiamo concludere è che questa seconda ipotesi sia vera solo per tali velocità. Da queste due ipotesi seguono le trasformazioni di Galileo (1.1) e la composizione delle velocità (1.2).

Ciò che fece Einstein fu di accettare la prima ipotesi e di sostituire la seconda con l'ipotesi, confermata dall'esperienza di Michelson e Morley, che *la velocità della luce è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali*. E chiaramente tale ipotesi è incompatibile con la seconda.

Consideriamo ancora i due riferimenti di prima e supponiamo che all'istante $t = 0$ in un punto A venga emesso un lampo di luce. L'osservatore posto in K vede la luce che si propaga in entrambe le direzioni con velocità c , per cui se A è il punto medio tra i punti B e C solidali con K , per tale osservatore il raggio di luce arriva simultaneamente in B e in C ($t_B = t_C$). Se invece A , B e C sono solidali con K' , per l'osservatore in K' sono incompatibili i seguenti fatti: $|\mathbf{AC}'| = |\mathbf{AB}'|$, $c' = c$ e $t'_C = t'_B$ perché per K' la luce non arriva simultaneamente in B e in C .

Considerando una disposizione sperimentale simile alla precedente, nella quale però i raggi luminosi vengono emessi ortogonalmente alla direzione del moto relativo, si può stabilire facilmente che i raggi luminosi arrivano simultaneamente in B e in C per entrambi gli osservatori.

Vedremo che dalla prima e dalla terza ipotesi seguono le nuove leggi di trasformazione, che vengono dette *trasformazioni di Lorentz*; vedremo anche che esse si riconducono a quelle di Galileo per velocità piccole rispetto a c . Vedremo poi che le leggi dell'elettromagnetismo sono invarianti in forma per le trasformazioni di Lorentz e che quelle della meccanica newtoniana, invarianti per trasformazioni di Galileo, non lo sono per trasformazioni di Lorentz. Per cui, per soddisfare il principio di relatività bisogna modificare le leggi della meccanica newtoniana e arrivare a quelle della meccanica relativistica, che sono invarianti in forma per trasformazioni di Lorentz. Esse inoltre dovranno ricondursi a quelle della meccanica newtoniana per velocità piccole rispetto a quella della luce.

Dimostriamo ora il seguente teorema:

Teorema 1.1. *L'omogeneità dello spazio e del tempo è causa della linearità delle trasformazioni che collegano i due sistemi di riferimento.*

Dimostrazione. Siano

$$\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3), \quad x^0 = ct$$

le coordinate spazio-temporali di un evento in un sistema di riferimento inerziale K . Siano poi K e K' due sistemi di riferimento inerziali. Dato un evento e detta $(x^0, \mathbf{x}) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ la sua quaterna rappresentativa nel sistema K , le corrispondenti componenti x'^i della quaterna nel sistema K' si otterranno dalla prima con una trasformazione del tipo

$$x'^i = f^i(\mathbf{x}, ct).$$

In particolare, possiamo considerare la trasformazione infinitesima

$$dx'^i = \sum_j \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(\mathbf{x}, ct) dx^j \equiv \sum_j \Lambda_j^i(\mathbf{x}, ct) dx^j .$$

Vediamo ora che per l'omogeneità dello spazio e del tempo i Λ_j^i non dipendono da \mathbf{x} e da ct , cioè

$$dx'^i = \sum_j \Lambda_j^i dx^j ,$$

dove i Λ_j^i sono delle costanti. Infatti, eseguendo una traslazione rigida nello spazio e nel tempo ($\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$, $t \mapsto t + b$) i differenziali non devono cambiare e quindi

$$\sum_j \Lambda_j^i(\mathbf{x}, ct) dx^j = \sum_j \Lambda_j^i(\mathbf{x} + \mathbf{a}, ct + cb) dx^j ,$$

ma ciò implica che i Λ_j^i non dipendono da \mathbf{x} e da t . Per cui, integrando si ottiene

$$x'^i = \sum_j \Lambda_j^i x^j + a^i ,$$

dove le a^i sono le costanti di integrazione. Si è così ottenuta una trasformazione lineare. \square

Osserviamo che, sia nella fisica relativistica sia in quella non relativistica, si ha che *i sistemi di riferimento inerziali sono indistinguibili* e che, una volta ammesso tale postulato, il postulato della costanza della velocità della luce si può esprimere dicendo che *la velocità massima di propagazione di una segnale è finita*.

1.2 Invarianza dell'intervallo spazio-temporale

1.2.1 Il teorema di invarianza dell'intervallo

Nel paragrafo precedente abbiamo affermato che dal fatto che lo spazio è omogeneo e isotropo, che il tempo è omogeneo e che la velocità è costante nei sistemi di riferimento inerziali, si possono dedurre le leggi di trasformazione di Lorentz. Per fare ciò dapprima dimostreremo un teorema fondamentale, il *teorema di invarianza degli intervalli spazio-temporali*, e quindi otterremo le trasformazioni di Lorentz ed altri interessanti risultati come conseguenza di tale teorema.

Diremo *evento* un qualche cosa che avviene in un certo punto dello spazio e che sia individuabile in un dato sistema di riferimento inerziale K tramite le coordinate (x, y, z) e in un certo istante di tempo mediante la coordinata t . Un evento sarà pertanto caratterizzato dalla quaterna reale (x^0, x, y, z) dove, come al solito, si pone $x^0 = ct$. Consideriamo ora due eventi (ct_1, x_1, y_1, z_1) e (ct_2, x_2, y_2, z_2) , diremo *intervallo spazio-temporale* tra i due eventi considerati la grandezza s_{12}^2 definita da

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 , \quad (1.10)$$

e notiamo subito che s_{12}^2 non è definito positivo. Supponiamo ora che i due eventi siano collegati da un segnale luminoso nel modo seguente: all'istante t_1 si abbia nel punto (x_1, y_1, z_1) l'emissione di un lampo di luce che arriva all'istante t_2 nel punto (x_2, y_2, z_2) . Siccome la luce viaggia con velocità c , la quantità $c^2(t_2 - t_1)^2$ rappresenta il quadrato dello spazio percorso dal raggio luminoso. Ma, valendo la geometria euclidea, anche la quantità $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$ è il quadrato di tale distanza, per cui si ha

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0.$$

In conclusione, quindi, se due eventi sono collegati da un raggio luminoso, dovrà essere $s_{12}^2 = 0$ e viceversa. In particolare possiamo considerare due eventi infinitamente vicini caratterizzati dalle quaterne x^i e $x^i + dx^i$, per cui l'intervallo tra di essi sarà dato da

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

E ogni volta che due eventi sono collegati da un segnale luminoso si avrà $ds^2 = 0$.

Teorema 1.2 (dell'intervallo). *L'intervallo spazio-temporale tra due eventi è un invariante per trasformazioni tra sistemi di riferimento inerziali. Cioè*

$$ds'^2 = ds^2. \quad (1.11)$$

Dimostrazione. Siano K e K' due sistemi di riferimento inerziali. Consideriamo due eventi infinitamente vicini e indichiamo con ds^2 e ds'^2 gli intervalli valutati rispettivamente in K e in K' . Vogliamo dimostrare che, qualunque siano i due eventi considerati, si ha $ds^2 = ds'^2$. Supponiamo dapprima che i due eventi siano collegati da un segnale luminoso; sappiamo allora che in K si ha $ds^2 = 0$ e che, per l'invarianza della velocità della luce, anche $ds'^2 = 0$ in K' . Poiché ad ogni coppia di eventi di intervallo nullo in un certo sistema è associabile la propagazione di un segnale luminoso, concludiamo che la relazione tra ds^2 e ds'^2 deve essere tale che

$$ds^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad ds'^2 = 0.$$

Vediamo allora di stabilire quale relazione c'è tra ds^2 e ds'^2 . Per definizione di intervallo spazio-temporale possiamo scrivere

$$ds'^2 = c^2 dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = dx'^{02} - \sum_{\alpha=1}^3 dx'^{\alpha 2}.$$

Per la linearità della trasformazione da K a K' , che sappiamo essere diretta conseguenza del fatto che lo spazio è isotropo e omogeneo e che il tempo è omogeneo, si ha

$$x'^i = \sum_{j=0}^3 \Lambda_j^i x^j + a^i, \quad dx'^i = \sum_{j=0}^3 \Lambda_j^i dx^j;$$

per cui, sostituendo si ottiene

$$\begin{aligned} ds'^2 &= dx'^{02} - \sum_{\alpha=1}^3 dx'^{\alpha 2} = \sum_{i,j=0}^3 \left[\Lambda_i^0 \Lambda_j^0 - \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_i^\alpha \Lambda_j^\alpha \right] dx^i dx^j \\ &= \sum_{i,j=0}^3 g_{ij} dx^i dx^j, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$g_{ij} = \Lambda_i^0 \Lambda_j^0 - \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_i^\alpha \Lambda_j^\alpha .$$

Con ciò si è allora dimostrato che ds'^2 è infinitesimo del secondo ordine nella dx^i , così come ds^2 .

Dimostriamo ora che $ds'^2 = \kappa(|\mathbf{v}|)ds^2 \equiv \kappa(v)ds^2$. A tale scopo consideriamo la propagazione di segnali luminosi in opportune direzioni; consideriamo cioè un segnale luminoso che in K si propaga nella direzione dell'asse delle x positive. In tal caso, essendo $dy = dz = 0$, possiamo scrivere

$$0 = ds'^2 = g_{00} dx^{02} + g_{01} dx^0 dx^1 + g_{10} dx^1 dx^0 + g_{11} dx^{12} .$$

Osserviamo poi che, per come sono stati definiti, i g_{ij} sono simmetrici rispetto allo scambio degli indici. In altre parole, la matrice $G = [g_{ij}]$ è una matrice di dimensione 4×4 simmetrica. Allora

$$0 = ds'^2 = g_{00} dx^{02} + 2g_{01} dx^0 dx^1 + g_{11} dx^{12} .$$

Trattandosi poi di un segnale luminoso che si propaga parallelo e concorde al semiasse delle x positive, abbiamo $dx^0 \equiv c dt = dx^1$, da cui

$$0 = ds'^2 = (g_{00} + 2g_{01} + g_{11}) dx^{02} .$$

Ripetendo lo stesso ragionamento per un segnale luminoso che si propaga parallelo e discorde al semiasse positivo delle x , e ricordando che in questo caso $dx^0 \equiv c dt = -dx^1$, otteniamo:

$$0 = ds'^2 = (g_{00} - 2g_{01} + g_{11}) dx^{02} .$$

Poiché entrambe le uguaglianze ricavate devono valere per ogni dx^0 , si deduce che

$$g_{10} = g_{01} = 0 , \quad g_{11} = -g_{00} .$$

Con ragionamenti analoghi ai precedenti, ma applicati a segnali luminosi propagantisi lungo gli assi y e z si ottiene:

$$g_{20} = g_{02} = 0 , \quad g_{22} = -g_{00} ; \quad g_{30} = g_{03} = 0 , \quad g_{33} = -g_{00} .$$

Possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned} ds'^2 &= g_{00} (dx^{02} - dx^{12} - dx^{22} - dx^{32}) + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= g_{00} ds^2 + \sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta . \end{aligned}$$

Consideriamo ora un raggio luminoso generico congiungente i punti x^i e $x^i + dx^i$, Naturalmente sarà $ds'^2 = ds = 0$, per cui

$$\sum_{\substack{\alpha, \beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^3 g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$$

e, per l'arbitrarietà di dx^α dovrà essere $g_{\alpha\beta} = 0$ se $\alpha \neq \beta$. Per cui, per ora, la matrice G è la matrice

$$G = \begin{bmatrix} g_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -g_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g_{00} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g_{00} \end{bmatrix},$$

e quindi, $ds'^2 = g_{00} ds^2$. Chiediamoci ora da che cosa può dipendere g_{00} . Per le note caratteristiche dello spazio e del tempo e per la costanza della velocità della luce nel vuoto, esso non può dipendere dalle x^i e neppure da K e K' separatamente, per il fatto che tutti i sistemi inerziali sono equivalenti. Eventualmente esso potrà dipendere dalla velocità relativa \mathbf{v} di K' rispetto a K ma, sempre per l'isotropia dello spazio, non dalle componenti di essa, nè dal fatto che i due sistemi si stiano avvicinando o allontanando, per l'omogeneità del tempo. Allora, al più g_{00} potrà dipendere dal modulo $v = |\mathbf{v}|$ della velocità relativa; poniamo quindi $g_{00} = \kappa(v)$ e scriviamo

$$ds'^2 = \kappa(v) ds^2.$$

Dimostriamo che $\kappa(v) = 1$. Consideriamo tre sistemi di riferimento inerziali K , K_1 , K_2 e indichiamo con \mathbf{v}_1 la velocità relativa di K_1 rispetto a K , con \mathbf{v}_2 la velocità relativa di K_2 rispetto a K e con \mathbf{v}_{12} la velocità relativa di K_1 rispetto a K_2 . Abbiamo allora

$$ds_1^2 = \kappa(v_1) ds^2, \quad ds_2^2 = \kappa(v_2) ds^2, \quad ds_1^2 = \kappa(v_{12}) ds_2^2,$$

e quindi $\kappa(v_1) ds^2 = \kappa(v_{12}) ds_2^2 = \kappa(v_{12})\kappa(v_2) ds^2$. Poiché l'uguaglianza deve valere per ogni ds^2 deve essere $\kappa(v_1) = \kappa(v_{12})\kappa(v_2)$ ed essendo $\kappa \neq 0$ possiamo scrivere

$$\kappa(v_{12}) = \frac{\kappa(v_1)}{\kappa(v_2)}.$$

Il modulo della velocità relativa di K_1 rispetto a K_2 dovrà dipendere dall'angolo tra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 . Questo non per il teorema del coseno, valido solo nel caso in cui la legge di composizione delle velocità sia quella galileiana, ma per il fatto che per velocità piccole rispetto a quelle della luce si deve ricadere nella dipendenza classica. Tuttavia, il secondo membro dell'identità non dipende dall'angolo tra \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , per cui non ne deve dipendere neanche il primo membro $\kappa(v_{12})$. L'unico modo affinché ciò accada è che κ non dipenda da v , cioè che

$$\kappa = \frac{\kappa}{\kappa} = 1.$$

Concludiamo quindi che $ds^2 = ds'^2$. Per cui abbiamo che la matrice G è data da

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

All'uguaglianza tra intervalli infinitesimi corrisponde poi l'uguaglianza per gli intervalli finiti $s'_{12}{}^2 = s_{12}^2$. \square

1.3 Conseguenze del teorema dell'intervallo

1.3.1 Intervalli di tipo tempo, di tipo spazio e di tipo luce

Abbiamo definito l'intervallo tra due eventi come la quantità

$$s_{12}^2 = c^2 \Delta t^2 - |\Delta \mathbf{x}|^2$$

e, anche quando scriveremo $s^2 = c^2 t^2 - x^2$ intenderemo l'intervallo tra l'evento di coordinate (ct, \mathbf{x}) e l'evento caratterizzato dalla quaterna $(0, 0, 0, 0)$.

Definizione 1.1. *L'intervallo tra due eventi 1 e 2 si dice di tipo tempo se $s_{12}^2 > 0$, di tipo luce se $s_{12}^2 = 0$, di tipo spazio se $s_{12}^2 < 0$.*

Evidentemente l'intervallo tra due eventi che avvengono nello stesso punto spaziale ma in istanti diversi è di tipo tempo, l'intervallo tra due eventi collegati da un raggio luminoso è di tipo luce, quello tra due eventi simultanei che avvengono in due punti distinti dello spazio è di tipo spazio. Per il teorema di invarianza dell'intervallo, si ha poi che tale classificazione è assoluta, cioè indipendente dal sistema di riferimento.

Per rappresentare l'intervallo tra due eventi è molto utile la rappresentazione grafica di Minkowsky . Per semplicità supponiamo che uno dei due eventi coincida con l'origine e limitiamoci alla sola coordinata spaziale x . Il moto rettilineo di una particella che passa per il punto $x = 0$ all'istante $t = 0$ è rappresentato da una retta passante per l'origine e formante con l'asse ct un angolo la cui tangente è uguale alla velocità del punto. Tra tutte le rette del piano uscenti dall'origine le più importanti sono le rette di equazione $ct = \pm x$ che rappresentano la propagazione in direzione opposta di due segnali luminosi e passanti per $x = 0$ al tempo $t = 0$. Le rette uscenti dall'origine che formano con l'asse ct un angolo minore di 45° rappresentano le traiettorie di punti che si muovono con velocità inferiore a quella della luce, mentre quelle inclinate di un angolo maggiore di 45° rappresentano le traiettorie di segnali che viaggiano con velocità superiore a c .

Se ora ci poniamo in un altro sistema di riferimento inerziale, per l'invarianza dell'intervallo si ha che

$$x_0^2 - x^2 = x_0'^2 - x'^2 = cost .$$

Questa equazione è l'equazione di un'iperbole che rappresenta le possibili coordinate dell'evento nei vari sistemi di riferimento inerziali. Abbiamo già detto che se due eventi hanno luogo nello stesso punto il loro intervallo è di tipo tempo, ma è vero anche il viceversa: se l'intervallo tra due eventi è di tipo tempo, allora esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi avvengono nello stesso punto. Abbiamo poi visto che se due eventi sono simultanei, l'intervallo tra di essi è di tipo spazio. Anche in questo caso è vero il viceversa: se l'intervallo tra due eventi è di tipo spazio, allora esiste un sistema di riferimento in cui essi sono simultanei.

1.3.2 La velocità massima dei segnali è c

Per dimostrare che la velocità massima di propagazione di un segnale non può superare la velocità della luce c ragioniamo per assurdo: supponiamo che esista un segnale che colleghi

l'evento O con l'evento P e che si propaghi ad una velocità superiore a c . Allora risulterà $c^2 t^2 - x^2 < 0$. L'intervallo spazio-temporale tra O e P sarà allora di tipo spazio: ciò significa che può esistere un altro sistema di riferimento K' nel quale le coordinate P' di P avranno il tempo cambiato di segno. Allora in K' il tempo dell'evento finale è negativo, cioè in K' il segnale è arrivato prima di partire, ma ciò è in contrasto con il principio di causalità, da cui l'assurdo.

1.3.3 Dilatazione dei tempi

Consideriamo due eventi che per l'osservatore in K' avvengono nello stesso punto e separati da un intervallo di tempo $\Delta t'$. Ora dimostreremo che per un osservatore in K , rispetto al quale il punto in cui si verificano gli eventi è in moto, l'intervallo di tipo tempo tra i due eventi risulta più grande. Per l'invarianza dell'intervallo si ha

$$c^2 dt^2 - dx^2 = c^2 dt'^2 .$$

Sia v il modulo della velocità con cui K' si muove rispetto a K ; abbiamo allora $c^2 dt^2 - v^2 dt^2 = c^2 dt'^2$, e cioè

$$c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) dt^2 = c^2 dt'^2 ,$$

da cui si ricava subito

$$c dt' = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} .$$

Invertendo tale relazione si ottiene

$$c dt = \frac{c dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} ,$$

dalla quale, passando ad intervalli finiti con una integrazione e supponendo v costante, si ha

$$c \Delta t = \frac{c \Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Anche se il punto non è in moto uniforme rispetto a K possiamo considerare, istante per istante, il sistema di riferimento inerziale la cui velocità coincide con quella della particella e la relazione infinitesima continua a valere. Integrando allora tale relazione si ha

$$t_2 - t_1 = \int_{t'_1}^{t'_2} \frac{dt'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} > t'_2 - t'_1 .$$

Su tale relazione si basa il *paradosso dei gemelli*: se di due gemelli uno rimane sulla Terra mentre l'altro si mette in viaggio su un'astronave che viaggia ad una velocità non piccola rispetto a c , al ritorno il gemello a bordo dell'astronave sarà invecchiato di meno di quello rimasto sulla Terra. In realtà non c'è alcun paradosso perché la Terra e l'astronave non sono sistemi equivalenti: la Terra, infatti, è approssimativamente inerziale, mentre l'astronave non lo è.

Una verifica sperimentale della dilatazione dei tempi è comunque riscontrabile nei muoni. I muoni sono particelle prodotte dai raggi cosmici che, rispetto all'osservatore a riposo con esse, hanno una vita media pari a $\tau \sim 10^{-6}$ secondi. Anche se viaggiassero ad una velocità molto

prossima a c , in τ secondi potrebbero percorrere solo qualche centinaio di metri; essi invece arrivano sulla Terra con i raggi cosmici dopo aver percorso chilometri e chilometri. Tale fatto si spiega osservando che il tempo impiegato dai muoni per giungere sulla Terra dall'istante in cui sono prodotti, nel sistema di riposo con la Terra è molto maggiore dell'intervallo di tempo tra gli stessi due eventi misurato nel sistema di riferimento del muone.

1.3.4 Contrazione delle lunghezze

Consideriamo una sbarra solidale al sistema K e parallela alla velocità \mathbf{v} con cui K si muove rispetto a K' . In questo paragrafo dimostreremo che per l'osservatore in K' la lunghezza della sbarra è minore che per l'osservatore in K , rispetto al quale la sbarra è a riposo. A questo punto sorge il problema di come misurare la lunghezza della sbarra. Per l'osservatore in K , rispetto al quale la sbarra è ferma, non c'è problema: gli basterà utilizzare i regoli rigidi di cui è dotato. L'osservatore in K' , rispetto al quale la sbarra è in moto, dovrà invece servirsi di un diverso procedimento di misura. Ad uno stesso istante t' egli infatti dovrà osservare i punti P' e Q' del sistema K' che coincidono in tale istante con gli estremi P e Q della sbarra e solidali con K ; ad esempio, egli potrà fare una fotografia con la macchina fotografica ben ferma in K' . Poi potrà determinare la distanza tra P' e Q' con i suoi regoli.

Riscrivendo il teorema di invarianza dell'intervallo in termini finiti e in relazione alla situazione considerata, abbiamo:

$$c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 = -\Delta x'^2, \quad (1.12)$$

cioè $c^2 \Delta t^2 - l^2 = -l'^2$, da cui $l'^2 = l^2 - c^2 \Delta t^2$. Possiamo intanto stabilire che le lunghezze che si contraggono sono quelle parallele al moto e non quelle trasversali, in quanto per queste ultime si ha $\Delta t = 0$ nella (1.12). Ora si deve determinare quanto vale Δt^2 nel caso in cui la sbarra sia parallela al moto. Indichiamo allora con l la lunghezza di \mathbf{PQ} in K , con l' la lunghezza di $\mathbf{P'Q'}$ in K' e con l'' la lunghezza di $\mathbf{P'Q'}$ in K . Dopo un breve ragionamento si arriva a stabilire che per l'osservatore in K si ha

$$l'' - l = -v \Delta t.$$

Per cui per tale osservatore sarà $(l - l'')^2 = v^2 \Delta t^2$, e cioè

$$\Delta t^2 = \frac{(l - l'')^2}{v^2}, \quad (1.13)$$

e quindi sostituendo la (1.13) in $l'^2 = l^2 - c^2 \Delta t^2$ si ottiene

$$l'^2 = l^2 - \frac{c^2}{v^2} (l - l'')^2.$$

Per ogni elemento infinitesimo della sbarra \mathbf{PQ} abbiamo $dl = \kappa dl$, con κ indipendente da l , per cui integrando diventa $l' = \kappa l$. Quello che dobbiamo determinare ora è quanto vale κ . Per la reciprocità tra l' e l e tra l'' e l' , abbiamo:

$$l'^2 = l^2 - \frac{c^2}{v^2} l^2 (1 - \kappa^2)^2,$$

cioè $(1 - \kappa^2)l^2 = \frac{c^2}{v^2}(1 - \kappa^2)^2 l^2$, e quindi $\kappa^2 = 1 - v^2/c^2$, cioè

$$\kappa = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Sostituendo ora in $l' = \kappa l$ otteniamo la formula cercata per la contrazione delle lunghezze:

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (1.14)$$

da cui $l' < l$.

1.4 Trasformazioni di Lorentz speciali

In questo paragrafo determineremo le leggi di trasformazione che ci permettono di passare da un sistema di riferimento inerziale K ad un altro sistema inerziale K' nel caso particolare in cui \mathbf{v} sia costante. Supponiamo che le origini O e O' dei due sistemi coincidano per $t = t' = 0$ e che l'asse x' scorra lungo l'asse x . Siano poi y' e z' paralleli rispettivamente ad y e z . Sia P un evento di coordinate (x, y, z) all'istante t in K e (x', y', z') all'istante t' in K' . Poiché abbiamo visto che le lunghezze nelle direzioni ortogonali alla velocità relativa non si contraggono, abbiamo

$$y' = y, \quad z' = z.$$

Per la linearità della trasformazione e per l'ipotesi che $O \equiv O'$ per $t = t' = 0$, abbiamo la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \beta t \\ t' = \gamma t + \delta x \end{cases}$$

Ricordando che l'intervallo è un invariante, abbiamo anche che

$$x_0^2 - x^2 = x_0'^2 - x'^2. \quad (1.15)$$

Facciamo ora una digressione, ricordando come si possano ottenere le formule che esprimono una rotazione del piano xy . Consideriamo il fatto che $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ e, poiché $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, ponendo

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \alpha \\ y = \varrho \sin \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} x' = \varrho' \cos \alpha' \\ y' = \varrho' \sin \alpha' \end{cases}$$

dalla condizione $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2$ ricaviamo $\varrho = \varrho'$. Posto inoltre $\alpha' = \alpha - \vartheta$ abbiamo

$$\begin{cases} x' = \varrho \cos(\alpha - \vartheta) = \varrho \cos \alpha \cos \vartheta + \varrho \sin \alpha \sin \vartheta = x \cos \vartheta + y \sin \vartheta \\ y' = \varrho \sin(\alpha - \vartheta) = \varrho \sin \alpha \cos \vartheta - \varrho \cos \alpha \sin \vartheta = -x \sin \vartheta + y \cos \vartheta \end{cases}$$

che sono le formula cercate.

Proviamo ad applicare lo stesso metodo anche al piano di Minkowsky. In questo caso, per ottenere le trasformazioni lineari che lasciano invariato l'intervallo $x_0^2 - x^2$, possiamo sostituire al posto di \sin e \cos le corrispondenti funzioni iperboliche, per quali sappiamo che vale la relazione

$$\text{Ch}^2 \varphi - \text{Sh}^2 \varphi = 1. \quad (1.16)$$

Tuttavia c'è una leggera complicazione rispetto al caso precedente in quanto Ch è sempre positivo, per cui è necessario tenere distinti i due casi in cui l'evento P è di tipo tempo o di tipo spazio rispetto all'evento 0 rappresentato dall'origine comune dei sistemi K e K' all'istante iniziale. Nel primo caso poniamo:

$$\begin{cases} x_0 = \pm \varrho \operatorname{Ch} \varphi \\ x = \varrho \operatorname{Sh} \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_0 = \pm \varrho' \operatorname{Ch} \varphi' \\ x' = \varrho' \operatorname{Sh} \varphi' \end{cases} \quad (1.17)$$

con il segno positivo per $x_0 > 0$ e con il segno negativo per $x_0 < 0$. Invece, nel secondo caso poniamo:

$$\begin{cases} x_0 = \varrho \operatorname{Sh} \varphi \\ x = \pm \varrho \operatorname{Ch} \varphi \end{cases}, \quad \begin{cases} x'_0 = \varrho' \operatorname{Ch} \varphi' \\ x' = \pm \varrho' \operatorname{Sh} \varphi' \end{cases}. \quad (1.18)$$

In entrambi i casi, dalla (1.15) e dalla (1.16) risulta immediatamente

$$\varrho = \varrho'. \quad (1.19)$$

Poichè non è restrittivo poniamo poi

$$\varphi' = \varphi \pm \psi. \quad (1.20)$$

Consideriamo ora il caso in cui P sia di tipo tempo rispetto a 0. Inserendo la (1.19) e la (1.20) nel secondo gruppo delle (1.17) e utilizzando le formule di prostaferesi per Sh e Ch si ha:

$$\begin{cases} x'_0 = \pm \varrho \operatorname{Ch}(\varphi \pm \psi) = \pm \varrho \operatorname{Ch} \varphi \operatorname{Ch} \psi + \varrho \operatorname{Sh} \varphi \operatorname{Sh} \psi \\ x' = \varrho \operatorname{Sh}(\varphi \pm \psi) = \varrho \operatorname{Sh} \varphi \operatorname{Ch} \psi \pm \varrho \operatorname{Ch} \varphi \operatorname{Sh} \psi \end{cases},$$

cioè

$$\begin{cases} x'_0 = x \operatorname{Sh} \psi + x_0 \operatorname{Ch} \psi \\ x' = x \operatorname{Ch} \psi + x_0 \operatorname{Sh} \psi \end{cases}. \quad (1.21)$$

Chiaramente le leggi di trasformazione da K a K' non possono dipendere dal fatto che P sia di tipo tempo, spazio o luce rispetto a 0, e quindi le (1.21) devono valere in tutti e tre i casi. Lo si può verificare direttamente nel caso in cui P sia di tipo spazio rispetto a 0, inserendo le (1.19) e (1.20) nel secondo gruppo delle (1.18) e utilizzando ancora le formule di prostaferesi.

Abbiamo così ottenuto le trasformazioni cercate in funzione dell'angolo iperbolico ψ . Si tratta ora di trovare una relazione tra ψ e la velocità relativa v_0 . Per fare ciò applichiamo la (1.21) all'evento che descrive l'origine del sistema K nel sistema K' :

$$\begin{cases} x' = x_0 \operatorname{Sh} \psi \\ ct' = x_0 \operatorname{Ch} \psi \end{cases}.$$

Dividendo membro a membro, otteniamo

$$\operatorname{Th} \psi = \frac{x'}{ct'} = \frac{-v_0 t'}{ct'} = -\frac{v_0}{c}.$$

Pertanto abbiamo:

$$\text{Sh } \psi = \frac{-v_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad \text{Ch } \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}};$$

e quindi

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad ct' = \frac{ct - xv_0/c}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}.$$

La trasformazione cercata pertanto è la seguente:

$$\begin{cases} x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{cases}. \quad (1.22)$$

Tali trasformazioni sono dette *trasformazioni di Lorentz speciali* per sottolineare il fatto che in esse la velocità \mathbf{v} è considerata costante.

Se si invertono le relazioni precedenti si ottengono le trasformazioni da K' a K :

$$x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z',$$

il che mostra che la velocità di K , misurata in K' è $-\mathbf{v}_0$. Si vede poi che se v_0 è molto piccolo rispetto a c , trascurando i termini in v_0/c , si ottiene con buona approssimazione

$$x' \sim x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' \sim t,$$

che sono le trasformazioni di Galileo. Inoltre, la presenza del fattore $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$ nelle formule della trasformazione ci dice che deve sempre essere $v_0 < c$.

1.4.1 Dilatazione dei tempi

Consideriamo un orologio a riposo in K' che nel punto di coordinate \mathbf{x}' segna un intervallo di tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$ tra due eventi con le stesse coordinate spaziali. Per un osservatore in K , applicando le trasformazioni di Lorentz a tali istanti, si ha:

$$t_1 = \gamma \left(t'_1 + \frac{v_0}{c^2} x'_1 \right), \quad t_2 = \gamma \left(t'_2 + \frac{v_0}{c^2} x'_2 \right).$$

Poiché $x'_1 = x'_2$, si ha

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

che è lo stesso risultato che avevamo ottenuto considerando il solo fatto dell'invarianza degli intervalli spazio-temporali.

1.4.2 Contrazione delle lunghezze

Sia ora l la lunghezza di una sbarra fissa in K e parallela alla direzione del moto relativo, cioè $l = \Delta x = x_2 - x_1$. Per le trasformazioni di Lorentz abbiamo allora

$$x_1 = \gamma(x'_1 + v_0 t'_1), \quad x_2 = \gamma(x'_2 + v_0 t'_2).$$

Abbiamo già notato che quando l'osservatore in K deve misurare la lunghezza della sbarra, egli deve valutare simultaneamente in un certo istante di tempo t' la posizione dei suoi estremi, per cui sarà $t'_1 = t'_2$. Sostituendo si avrà:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1) = \gamma \Delta x',$$

cioè, se l' è la lunghezza della sbarra in K' , si avrà

$$l' = l \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

E anche questo risultato concorda con quello che avevamo ottenuto utilizzando solo l'invarianza degli intervalli spazio temporali.

1.4.3 Trasformazione relativistica della velocità

La legge di composizione galileiana delle velocità affermava che $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Questa legge andrà naturalmente modificata, alla luce delle trasformazioni di Lorentz delle coordinate spazio-temporali. Differenziando le equazioni della trasformazione otteniamo

$$\begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - v_0 dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \\ dt' &= \gamma \left(dt - \frac{v_0}{c^2} dx \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dividendo membro a membro le prime tre equazioni del moto per la quarta si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{dx'}{dt'} &= \frac{\frac{dx}{dt} - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} \frac{dx}{dt}} \\ \frac{dy'}{dt'} &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v_0}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \frac{dy}{dt}, \\ \frac{dz'}{dt'} &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v_0}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

e cioè

$$\begin{aligned} v'_x &= \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \\ v'_y &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} v_y \\ v'_z &= \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} v_z \end{aligned} \quad (1.24)$$

che sono le *trasformazioni relativistiche della velocità*. Dalle queste trasformazioni, per $v_0 \ll c$ e con buona approssimazione, trascurando i termini in $\frac{v_0}{c^2}$, si ottiene

$$v'_x = v_x - v_0, \quad v'_y = v_y, \quad v'_z = v_z,$$

che sono le trasformazioni classiche della velocità. Si osservi ora che, dalle formule trovate, velocità in modulo non maggiori a c in K non daranno mai velocità maggiori in modulo a c in K' . Se infatti consideriamo il caso significativo in cui $v_x = c$, $v_y = 0$ e $v_z = 0$, otteniamo

$$v'_x = \frac{c - v_0}{1 - \frac{v_0}{c}} = \frac{c - v_0}{c - v_0} = c, \quad v'_y = 0, \quad v'_z = 0.$$

Capitolo 2

Trasformazioni generali e algebra tensoriale

Nel capitolo precedente abbiamo ricavato le trasformazioni speciali di Lorentz. Ora vogliamo caratterizzare tutte le possibili trasformazioni da un sistema di riferimento inerziale ad un altro sistema di riferimento inerziale. In conformità con i postulati di relatività, tali trasformazioni dovranno soddisfare i seguenti requisiti:

i. la linearità:

$$x'^i = \Lambda_j^i x^j + a^i, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

(d'ora in avanti si utilizzerà la convenzione di Einstein sugli indici) dove i Λ_j^i e gli a^i sono dei numeri reali indipendenti dalle x^i .

ii. l'invarianza dell'intervallo:

$$\Delta x'^{02} - \Delta x'^{12} = \Delta x^{02} - \Delta x^{12}, \quad (2.2)$$

dove $\Delta x = |\Delta \mathbf{x}|$.

Questa seconda condizione farà sì che nell'espressione della trasformazione lineare gli a^i possano essere arbitrari in quanto compaiono solo nelle differenze, mentre vedremo che i Λ_j^i devono obbedire a precise limitazioni.

2.1 Il gruppo di Poincaré

Cominciamo allora a stabilire quali caratteristiche hanno le trasformazioni tra un sistema di riferimento inerziale ed un altro sistema inerziale. Per procedere conviene utilizzare la seguente notazione matriciale:

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = [\Lambda_j^i], \quad x = \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Nel simbolo Λ_j^i abbiamo che j indica il numero della colonna, mentre i indica il numero della riga; notiamo che la matrice G^{-1} di elementi g^{ij} è tale che $g^{ik}g_{kj} = \delta_j^i$ è identica alla matrice G . Deduciamo allora che la condizione di linearità diventa

$$x' = \Lambda x + a ,$$

e, per le matrici e i vettori trasposti $x'^T = x^T \Lambda^T + a^T$. In particolare da tale fatto ricaviamo

$$\Delta x' = \Lambda \Delta x , \quad \Delta x'^T = \Delta x^T \Lambda^T . \quad (2.4)$$

Per quanto riguarda la condizione sull'invarianza degli intervalli spazio-temporali, essa può essere riscritta nella forma

$$\Delta x'^i g_{ij} \Delta x'^j = \Delta x^i g_{ij} \Delta x^j ,$$

che in forma matriciale diventa

$$\Delta x'^T G \Delta x' = \Delta x^T G \Delta x . \quad (2.5)$$

Sostituendo allora le espressioni ottenute per $\Delta x'$ e $\Delta x'^T$, la condizione di invarianza dell'intervallo si traduce in

$$\Delta x^T \Lambda^T G \Lambda \Delta x = \Delta x^T G \Delta x$$

che, dovendo valere per ogni Δx e Δx^T , implica che debba essere soddisfatta la seguente condizione:

$$\Lambda^T G \Lambda = G ; \quad (2.6)$$

e questa relazione è quella che caratterizza le matrici delle trasformazioni.

In definitiva, allora, le trasformazioni cercate saranno del tipo $x' = \Lambda x + a$, dove a è una quaterna di numeri reali e Λ una matrice 4×4 soddisfacente la condizione di pseudo-ortogonalità $\Lambda^T G \Lambda = G$. Tali trasformazioni sono dette *trasformazioni di Poincarè* e, detto P l'insieme di tutte le trasformazioni di Poincarè, ogni elemento di P sarà caratterizzato dalla coppia $\{\Lambda, a\}$. Definiamo ora in P una legge di trasformazione interna: consideriamo $\{\Lambda_1, a_1\}, \{\Lambda_2, a_2\} \in P$, risulta:

$$\begin{aligned} x' &= \Lambda_1 x + a_1 , \\ x'' &= \Lambda_2 x' + a_2 = \Lambda_2 \Lambda_1 x + \Lambda_2 a_1 + a_2 ; \end{aligned}$$

pertanto poniamo

$$\{\Lambda_2, a_2\} \{\Lambda_1, a_1\} = \{\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2\} . \quad (2.7)$$

Dimostriamo allora la proprietà di chiusura, cioè che $\{\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2\} \in P$; a tale scopo è sufficiente dimostrare che $\Lambda_2 \Lambda_1$ soddisfa la condizione (2.6). Ciò è immediato, infatti

$$[\Lambda_2 \Lambda_1]^T G [\Lambda_2 \Lambda_1] = \Lambda_1^T \Lambda_2^T G \Lambda_2 \Lambda_1 = \Lambda_1^T G \Lambda_1 = G .$$

Dimostriamo ora che P dotato di questa legge di composizione interna costituisce un gruppo, detto *gruppo di Poincarè*.

i. Innanzitutto verifichiamo che la moltiplicazione in P gode della *proprietà associativa*. Osserviamo prima che

$$\begin{aligned} (\{\Lambda_1, a_1\} + \{\Lambda_2, a_2\})(x) &= \{\Lambda_1, a_1\}x + \{\Lambda_2, a_2\}x = \Lambda_1 x + a_1 + \Lambda_2 x + a_2 \\ &= (\Lambda_1 \Lambda_2)x + a_1 + a_2 = \{\Lambda_1 + \Lambda_2, a_1 + a_2\}x. \end{aligned}$$

Per cui abbiamo

$$\begin{aligned} \{\Lambda_1, a_1\}(\{\Lambda_2, a_2\} + \{\Lambda_3, a_3\})(x) &= \{\Lambda_1, a_1\}\{\Lambda_2 + \Lambda_3, a_2 + a_3\}x \\ &= \{(\Lambda_2 + \Lambda_3)\Lambda_1, (\Lambda_2 + \Lambda_3)a_1 + a_2 + a_3\}x \\ &= \{\Lambda_2\Lambda_1 + \Lambda_3\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + \Lambda_3 a_1 + a_2 + a_3\}x \\ &= \{\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2\}x + \{\Lambda_3\Lambda_1, \Lambda_3 a_1 + a_3\}x \\ &= \{\Lambda_1, a_1\}\{\Lambda_2, a_2\}x + \{\Lambda_1, a_1\}\{\Lambda_3, a_3\}x. \end{aligned}$$

ii. In P esiste l'*elemento neutro* che è dato da

$$E \equiv \{\mathcal{I}, 0\}, \quad (2.8)$$

dove \mathcal{I} è la matrice identità e 0 è il vettore nullo.

iii. Data la generica coppia $\{\Lambda, a\} \in P$, esiste l'*elemento inverso*. Infatti, osservato che $G^2 = \mathcal{I}$, moltiplicando a sinistra per G entrambi i membri della relazione $\Lambda^T G \Lambda = G$ otteniamo:

$$G \Lambda^T G \Lambda = G^2 = \mathcal{I}.$$

Allora, posto $\Lambda^{-1} \equiv G \Lambda^T G$, risulta $\Lambda^{-1} \Lambda = \mathcal{I}$ (che implica anche $\Lambda \Lambda^{-1} = \mathcal{I}$); inoltre risulta

$$\Lambda^{-T} G \Lambda^{-1} = G \Lambda G G \Lambda^{-1} = G \Lambda \Lambda^{-1} = G.$$

Considerando quindi la coppia $\{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\} \in P$, abbiamo

$$\{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\}\{\Lambda, a\} = \{\Lambda^{-1}\Lambda, \Lambda^{-1}a - \Lambda^{-1}a\} = \{\mathcal{I}, 0\} = E.$$

Pertanto possiamo scrivere che l'elemento inverso di $\{\Lambda, a\}$ è dato da

$$\{\Lambda, a\}^{-1} = \{\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a\}. \quad (2.9)$$

Visto ciò, si conclude necessariamente che P ha la struttura algebrica di un gruppo.

Come applicazione di tutta questa teoria calcoliamo l'elemento di P corrispondente alla trasformazione speciale di Lorentz ricavata nel capitolo precedente ed espressa dalle equazioni (1.22) che qui ricordiamo:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - \beta x_0) \\ y' &= y \\ z &= z' \\ x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x) \end{aligned}$$

dove $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Dopo un semplice calcolo si ottiene che la coppia $\{\Lambda, a\}$ da noi cercata è data da

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

2.1.1 Struttura del gruppo di Poincarè

Particolari trasformazioni del gruppo di Poincarè sono quelle del tipo $\{\mathcal{I}, a\}$. Esse agiscono nel modo seguente.

$$x' = x + a,$$

esse cioè sono gli elementi di P che corrispondono alle traslazioni nello spazio-tempo. Detto \mathcal{T} l'insieme di tali trasformazioni, non è difficile dimostrare che esso è un sottogruppo abeliano di P detto *gruppo delle traslazioni*.

Altre particolari trasformazioni del gruppo di Poincarè sono quelle del tipo $\{\Lambda, 0\}$ la cui azione sui vettori è

$$x' = \Lambda x,$$

cioè $x'^i = \Lambda_j^i x^j$. Detto \mathcal{L} l'insieme di queste trasformazioni non è difficile dimostrare che esso è un sottogruppo di P detto *gruppo di Lorentz*.

Concludendo, notiamo che P può essere ottenuto come prodotto semidiretto del gruppo delle traslazioni e del gruppo di Lorentz.

2.1.2 Struttura del gruppo di Lorentz

Concentriamoci ora sul gruppo di Lorentz, i cui elementi saranno denotati più semplicemente con la sola matrice Λ . Dall'uguaglianza $\Lambda^T G \Lambda = G$ ricaviamo

$$\text{Det } G = \text{Det } \Lambda^T \text{Det } G \text{Det } \Lambda = \text{Det } G \text{Det}^2 \Lambda.$$

Da cui segue che $\text{Det}^2 \Lambda = 1$, e quindi

$$\text{Det } \Lambda = \pm 1.$$

Sempre dall'uguaglianza $\Lambda^T G \Lambda = G$ (cioè $g_{ik} = \Lambda^{Tj}_i g_{lm} \Lambda^m_k$) e per definizione di G ricaviamo in particolare:

$$g_{00} = \Lambda^{T0}_i g_{ij} \Lambda^i_0 = \Lambda^i_0 g_{ii} \Lambda^i_0,$$

dove Λ^{T0}_i indica l'elemento Λ^0_i della matrice Λ^T ; da questa relazione otteniamo

$$1 = \Lambda_0^{02} - \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_0^{\alpha 2},$$

da cui

$$\Lambda_0^{02} = 1 + \sum_{\alpha=1}^3 \Lambda_0^{\alpha2},$$

e quindi $|\Lambda_0^0| \geq 1$. Possiamo allora suddividere le trasformazioni di Lorentz in quattro classi a seconda dei valori di $\text{Det } \Lambda$ e di Λ_0^0 .

i. Cominciamo con la prima classe: essa viene indicata con \mathcal{L}_+^\uparrow ed è caratterizzata da

$$\text{Det } \Lambda = 1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1.$$

A questa classe appartiene la trasformazione identica \mathcal{I} e tutte le trasformazioni di questa classe possono essere ottenute le une dalle altre a partire dalla trasformazione identica. Non è difficile verificare che questa classe è un sottogruppo del gruppo di Lorentz, detto *gruppo proprio di Lorentz*.

ii. La seconda classe \mathcal{L}_-^\uparrow è caratterizzata da

$$\text{Det } \Lambda = -1, \quad \Lambda_0^0 \geq 1.$$

Una tipica matrice di questa classe è

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

che corrisponde alla cosiddetta *operazione di parità*:

$$\begin{cases} x'^\alpha = -x^\alpha \\ x'^0 = x^0 \end{cases}.$$

Questa classe non può ovviamente costituire un sottogruppo del gruppo di Lorentz in quanto ad essa non appartiene la matrice unità \mathcal{I} . Questa classe è poi disgiunta dalla prima ed è impossibile passare con continuità da una trasformazione all'altra di \mathcal{L}_-^\uparrow . Gli elementi di \mathcal{L}_-^\uparrow si possono comunque ottenere dagli elementi di \mathcal{L}_+^\uparrow moltiplicando questi ultimi per Λ_p .

iii. Alla terza classe \mathcal{L}_-^\downarrow appartengono le trasformazioni per le quali

$$\text{Det } \Lambda = -1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1.$$

Una matrice di tale insieme è la matrice

$$\Lambda_t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

che corrisponde all'*inversione del tempo*:

$$\begin{cases} x'^{\alpha} = x^{\alpha} \\ x'^0 = -x^0 \end{cases} .$$

Per questa classe di trasformazioni valgono le osservazioni fatte per le trasformazioni di \mathcal{L}_+^{\uparrow} ; in particolare, gli elementi di $\mathcal{L}_-^{\downarrow}$ possono essere ottenuti moltiplicando quelli di \mathcal{L}_+^{\uparrow} per Λ_t .

iv. La quarta classe $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ è costituita dalle trasformazioni tali che

$$\text{Det } \Lambda = 1, \quad \Lambda_0^0 \leq -1 .$$

Una matrice di questa classe è

$$-\mathcal{I} = \Lambda_t \Lambda_p = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ,$$

che corrisponde alla trasformazione

$$\begin{cases} x'^{\alpha} = -x^{\alpha} \\ x'^0 = -x^0 \end{cases} .$$

Anche per gli elementi di $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ valgono le considerazioni fatte per \mathcal{L}_-^{\uparrow} e per $\mathcal{L}_-^{\downarrow}$, in particolare ogni elemento di $\mathcal{L}_+^{\downarrow}$ si può ottenere da un elemento di \mathcal{L}_+^{\uparrow} moltiplicandolo per $-\mathcal{I}$.

2.1.3 Struttura del gruppo proprio di Lorentz

Studiamo ora la struttura del gruppo proprio di Lorentz \mathcal{L}_+^{\uparrow} . Una generica matrice Λ reale 4×4 dipende da 16 parametri reali, ma se è un elemento di \mathcal{L}_+^{\uparrow} essa deve soddisfare la condizione $\Lambda^T G \Lambda = G$ che, data la simmetria di G , fornisce 10 condizioni indipendenti sui parametri e di conseguenza riduce a 6 il numero di parametri reali indipendenti.

Nello spazio tridimensionale euclideo le rotazioni sono individuate da tre parametri reali, che ad esempio possono essere gli angoli di Eulero. Nel caso del gruppo proprio di Lorentz, la generica Λ è individuata da 6 parametri reali associati alle “rotazioni” nei seguenti piani coordinati:

$$xy, \quad xz, \quad yz, \quad xt, \quad yt, \quad zt .$$

Nei primi tre casi abbiamo le rotazioni tridimensionali ordinarie, che costituiscono un sottogruppo del gruppo proprio di Lorentz. Nei secondi tre casi, invece, abbiamo le “pseudorotazioni” corrispondenti alle trasformazioni speciali di Lorentz. Si badi bene che l'insieme delle trasformazioni speciali di Lorentz sui tre piani xt , yt e zt non costituisce un sottogruppo del gruppo proprio di Lorentz: è un sottogruppo solo l'insieme delle trasformazioni speciali lungo un dato asse.

2.1.4 Il principio di relatività di Einstein

In definitiva, ogni trasformazione di Poincarè può essere pensata come il risultato di una *traslazione* (che richiede quattro parametri), di una *pura rotazione spaziale* (che ne richiede tre), di una *pura trasformazione speciale di Lorentz* (che ne richiede altri tre) e di eventuali *riflessioni degli assi spazio-temporali*.

Dei tre postulati di relatività finora ne sono stati utilizzati solo due: quello sull'omogeneità e isotropia dello spazio e omogeneità del tempo e quello sulla costanza della velocità della luce nel vuoto in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Ora dobbiamo precisare i limiti di validità del terzo, ossia del principio di relatività di Einstein.

Dato un sistema di riferimento inerziale, consideriamo l'insieme dei sistemi di riferimento che si ottengono da questo mediante delle trasformazioni lineari che lasciano invariato l'intervallo spazio-temporale: avremo allora dei sistemi ruotati, traslati, in moto rettilineo uniforme e i sistemi ottenuti da questi con operazioni di parità ed eventualmente di inversione del tempo. Quello che vogliamo stabilire ora è se il principio di relatività di Einstein vale per tutti questi sistemi di riferimento o solo per una parte di essi.

Fino al 1957 si riteneva che esso valesse per tutti questi sistemi di riferimento, ma in tale anno si scoprì che le leggi della fisica non sono necessariamente invarianti per riflessione degli assi spazio-temporali. Ad esempio, le leggi delle interazioni deboli non sono invarianti per parità e per inversione del tempo. Si deve pertanto concludere che il principio di relatività di Einstein riguarda i sistemi inerziali collegati da trasformazioni che sono combinazioni lineari di traslazioni e trasformazioni proprie di Lorentz (gruppo proprio di Poincarè).

Nel seguito ciò comunque non sarà rilevante in quanto le leggi dei fenomeni che tratteremo sono invarianti anche per operazioni di parità e inversione del tempo.

2.2 Quadritensori e calcolo quadritensoriale

In conformità con quanto visto nel capitolo precedente, ora dobbiamo riuscire a modificare le leggi della meccanica in modo tale che esse soddisfino il terzo postulato della relatività (il principio di relatività di Einstein) e si riducano a quelle della meccanica classica per velocità piccole rispetto a c ; poi dobbiamo verificare se anche le leggi dell'elettromagnetismo soddisfano il terzo postulato della relatività.

Per sviluppare questo programma è opportuno utilizzare del calcolo quadritensoriale. Per capire questo punto facciamo una digressione chiedendoci perché per un sistema isolato le leggi della fisica classica si esprimono in forma vettoriale. La risposta sta nel fatto che per un sistema isolato le leggi della fisica devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento che differiscano tra loro per una traslazione o per una rotazione degli assi. Come si è già detto, ciò è conseguenza dell'omogeneità e isotropia dello spazio ed implica che per un sistema isolato S tutti i sistemi di riferimento traslati ed eventualmente ruotati sono equivalenti, ossia le leggi della fisica non consentono di distinguere tra questi sistemi di riferimento.

Come sappiamo, le leggi di trasformazione da un sistema di riferimento K ad un altro K'

rototraslato rispetto ad esso sono:

$$\mathbf{x}' = R\mathbf{x} + \mathbf{a},$$

dove R è una matrice 3×3 e \mathbf{a} è una terna di numeri reali. Per definizione, uno *scalare* è un ente che non cambia per traslazioni e rotazioni, mentre un *vettore* \mathbf{A} è un ente che resta immutato per traslazioni, mentre per rotazioni si trasforma secondo $\mathbf{A}' = R\mathbf{A}$.

In modo analogo si possono definire i tensori doppi, tripli, ecc. Per un sistema isolato le leggi della fisica sono espresse in forma vettoriale, cioè come uguaglianza tra scalari e scalari, vettori e vettori, tensori e tensori, ecc. Allora, automaticamente, esse avranno la stessa forma in tutti i sistemi rototraslati. Per esempio, se in K una legge fisica ha la forma $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, dove \mathbf{A} e \mathbf{B} sono dei vettori, poiché $A_\alpha = B_\alpha$, allora $R_{\alpha\beta}A_\beta = R_{\alpha\beta}B_\beta$, per cui $\mathbf{A}' = \mathbf{B}'$, e quindi tale legge avrà la stessa forma anche in K' e, se ciò vale per tutte le leggi fisiche, K e K' saranno sistemi di riferimento equivalenti.

In fisica relativistica il nostro scopo è quello di ottenere delle equazioni (per sistemi isolati) che soddisfino il terzo principio di relatività, cioè che abbiano la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Abbiamo già visto che le leggi di trasformazione tra due sistemi inerziali sono quelle (proprie) di Poincarè. Queste ultime sono simili a quelle delle rototraslazioni, ma differiscono da esse perché agiscono in uno spazio a quattro dimensioni (invece che a tre) e perchè la metrica in tale spazio è pseudoeuclidea anzichè euclidea. Queste differenze non ci impediscono comunque di costruire un calcolo quadrivettoriale simile a quello trivettoriale e concludere che, se le leggi della fisica sono espresse in forma quadrivettoriale o, come si dice, sono *covarianti a vista* (cioè sono espresse da uguaglianze tra scalari e scalari, quadrivettori e quadrivettori, ecc), allora esse saranno automaticamente invarianti in forma in tutti i sistemi inerziali. Anzi, a volte, il fatto che le leggi della fisica per un sistema isolato debbano essere covarianti a vista, può essere utilizzato in modo euristico per “intuire” quali sono le leggi corrette.

2.2.1 Quadritensori

Diamo subito le seguenti due definizioni:

Definizione 2.1. *Un (quadri)scalare è un ente che non cambia per trasformazioni appartenenti al gruppo di Poincarè, cioè*

$$C' = \{\Lambda, \mathbf{a}\}C = C. \quad (2.11)$$

Definizione 2.2. *Un quadrivettore controvariante è un ente caratterizzato da quattro componenti A^i , con $i = 0, 1, 2, 3$, tali che*

i. per traslazioni si ha

$$A'^i = A^i;$$

ii. per trasformazioni di Lorentz (cioè con Λ tale che $\Lambda^T G \Lambda = G$) si ha

$$A'^i = \Lambda_j^i A^j.$$

Si noti che a rigore (x^0, x^1, x^2, x^3) non è un quadrivettore, infatti esso si trasforma secondo la legge

$$x'^i = \Lambda_j^i x^j + a^i,$$

mentre un vero quadrivettore è (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) , perché esso, in seguito ad una generica trasformazione di Poincaré varia secondo la legge

$$dx'^i = \Lambda_j^i dx^j.$$

Analogamente, anche $(x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3) - (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ è un quadrivettore.

Ricordando che l'invarianza dell'intervallo si esprime nella forma $ds'^2 = ds^2$, o anche

$$dx'^i g_{ij} dx'^j = dx^i g_{ij} dx^j,$$

dove g_{ij} sono gli elementi della matrice G definita nel capitolo precedente, concludiamo che *l'intervallo spazio-temporale è un quadriscalare*.

In corrispondenza delle componenti controvarianti A^i di un quadrivettore, sono definite anche delle nuove quantità con gli indici in basso, dette *componenti covarianti*:

Definizione 2.3. *Dato un quadrivettore controvariante A^i si definisce quadrivettore covariante il quadrivettore di componenti A_i date da*

$$A_i = g_{ij} A^j. \quad (2.12)$$

In particolare, abbiamo allora $dx_i = g_{ij} dx^j$ e $dx'_i = g_{ij} dx'^j$, per cui l'invarianza dell'intervallo si potrà scrivere

$$dx'^i dx'_i = dx^i dx_i.$$

Cerchiamo di determinare la legge di trasformazione delle componenti covarianti di un quadrivettore in seguito ad una trasformazione di Poincaré. Se la *legge di trasformazione delle componenti controvarianti* è la seguente:

$$A'^i = \Lambda_j^i A^j, \quad (2.13)$$

ora dimostreremo che la *legge di trasformazione delle componenti covarianti* è

$$A'_i = \hat{\Lambda}_i^j A_j, \quad (2.14)$$

dove si è posto $\hat{\Lambda}_i^j = g_{ik} \Lambda_l^k g^{lj}$, con g^{lk} che sono gli elementi di G^{-1} . Infatti da $A'^k = \Lambda_l^k A^l$, moltiplicando entrambi i membri a sinistra per g_{ik} e sommando sugli indici muti otteniamo

$$g_{ik} A'^k = g_{ik} \Lambda_l^k A^l = g_{ik} \Lambda_l^k g^{lj} A_j;$$

ricordando le definizioni date si può poi esprimere l'uguaglianza precedente nella forma (2.14), infatti $g_{ik} A'^k = A'_i = \hat{\Lambda}_i^j A_j$.

In modo del tutto analogo si può dimostrare che, se la legge di trasformazione delle componenti covarianti è la (2.14), quella delle componenti controvarianti, ottenibili dalle prime tramite la relazione $A^i = g^{ij} A_j$, è la (2.13), dove si osservi che

$$\Lambda_j^i = g^{ik} \hat{\Lambda}_k^l g_{lj}.$$

La distinzione tra quadrivettori covarianti e quadrivettori controvarianti, che è assente nel caso euclideo tridimensionale, è connessa con il fatto che nel nostro caso la metrica dello spazio è pseudoeuclidea.

In modo analogo si possono definire i quadritensori di ordine più elevato, con indici controvarianti, covarianti e misti. Vediamo allora come sono definiti questi oggetti matematici:

Definizione 2.4. *Si chiama tensore doppio controvariante un ente invariante per traslazioni e che per trasformazioni di Lorentz si trasforma come*

$$T^{ij} = \Lambda_i^i \Lambda_m^i T^{lm}. \quad (2.15)$$

Definizione 2.5. *Si chiama tensore doppio covariante un ente invariante per traslazioni e che per trasformazioni di Lorentz si trasforma come*

$$T'_{ij} = \hat{\Lambda}_i^l \hat{\Lambda}_j^m T_{lm}. \quad (2.16)$$

Definizione 2.6. *Si chiama tensore doppio misto un ente invariante per traslazioni e che per trasformazioni di Lorentz si trasforma come*

$$T_i'^j = \hat{\Lambda}_i^l \Lambda_m^j T_l^m, \quad T'^i_j = \Lambda_l^i \hat{\Lambda}_j^m T_m^l. \quad (2.17)$$

Il numero di indici delle componenti di un tensore definisce il *rango* del tensore. I tensori di rango 1 sono i vettori.

Inoltre si possono definire altri enti, detti *pseudotensori* di prima o seconda specie, la cui legge di trasformazione differisce da quella dei tensori ordinari per il fattore moltiplicativo $\text{Det } \Lambda$ per i pseudotensori di prima specie e per $\varepsilon(\Lambda_0^0)$ per quelli di seconda specie, dove $\varepsilon(\Lambda_0^0)$ indica il segno di Λ_0^0 . Ad esempio $S' = \text{Det } \Lambda \cdot S$ è uno pseudoscalare di prima specie, mentre $S' = \varepsilon(\Lambda_0^0)S$ è uno pseudoscalare di seconda specie.

Notiamo che per trasformazioni di Lorentz proprie, per le quali sappiamo che $\text{Det } \Lambda = 1$, abbiamo $\varepsilon(\Lambda_0^0) = 1$, per cui la legge di trasformazione dei pseudotensori di seconda specie è la stessa di quella dei tensori ordinari.

2.3 Algebra tensoriale

Definiti quindi gli oggetti matematici del paragrafo precedente, cerchiamo di trovare per essi un'algebra. In questo paragrafo vedremo cosa si intende per somma e per prodotto, per prodotto scalare, per contrazione di un tensore e per tensore costante, quali sono le trasformazioni dei campi, in che cosa consista il quadrigradiente e come si trasforma.

2.3.1 Somma e prodotto di tensori

Semplicemente, sommando due tensori dello stesso rango si ottiene un tensore dello stesso rango:

$$A_{abcd}^{fg} + B_{abcd}^{fg} = C_{abcd}^{fg},$$

mentre moltiplicandoli di ottiene un tensore di rango più elevato:

$$A_a^{bc} B_{def}^g = C_{adef}^{bcg}.$$

Si vede quindi che nel caso della moltiplicazione, il rango del tensore prodotto è la somma dei ranghi dei tensori moltiplicati.

2.3.2 Prodotto scalare

Siano A^i le componenti controvarianti di un quadrivettore e B_i le componenti covarianti di un quadrivettore covariante. Vogliamo dimostrare che la quantità

$$A^i B_i, \quad (2.18)$$

detta *prodotto scalare pseudoeuclideo*, è un quadriscalare, ossia è un invariante per trasformazioni di Poincarè. Abbiamo:

$$\begin{aligned} A'^i B'_i &= \Lambda_k^i A^k \hat{\Lambda}_i^k B_k = \Lambda_k^i A^k g_{i\mu} \Lambda_\nu^\mu g^{\nu k} B_k = A^k \Lambda_k^i g_{i\mu} \Lambda_\nu^\mu g^{\nu k} B_k \\ &= A^k \Lambda^T_k{}^i g_{i\mu} \Lambda_\nu^\mu g^{\nu k} B_k = A^k g_{k\nu} g^{\nu k} B_k = A^k B_k. \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. Come caso particolare di questa proprietà possiamo riottenere l'invarianza dell'intervallo:

$$ds'^2 = dx'^i dx'_i = dx^i dx_i = ds^2.$$

In particolare $A^i A_i$ è un quadriscalare. In analogia con quanto si è detto per l'intervallo, diremo che A^i è un quadrivettore di tipo tempo, di tipo luce o di tipo spazio
indexquadrivettore!di tipo!spazio a seconda che $A^i A_i$ sia maggiore, uguale o minore di zero.

2.3.3 Contrazione dei tensori

Consideriamo il generico tensore T_{abcd}^{efgh} . Sommando sugli indici corrispondenti della riga inferiore e superiore (ad esempio T_{akcd}^{afgk}), si ottiene un tensore di rango di due gradi inferiore. Ad esempio, dal tensore di secondo rango T_i^k si ricava lo scalare $T = T_i^i$, mentre dal tensore di ottavo rango T_{abcd}^{efgh} si può ottenere il tensore di sesto rango $S_{acd}^{afg} = T_{akcd}^{afgk}$, poi il tensore di quarto rango $R_{ac}^{fg} = S_{ack}^{kfg}$, e così via...

È poi possibile combinare le operazioni di moltiplicazione e di contrazione: mediante A_i e B^i è possibile costruire il tensore di secondo rango $S_i^k = A_i B^k$, e da questo lo scalare $S = S_i^i$ (che comunque si poteva ricavare direttamente da A_i e B^i come visto sopra). Analogamente, dal tensore A_{ik} e dal vettore x^k si possono ottenere il vettore $y_i = A_{ik} x^k$ e l'invariante $J = A_{ik} x^i x^k$.

Le regole applicate possono essere invertite, cioè se $A_k x^k$ è un invariante per ogni vettore arbitrario x^k , allora le A_k sono le componenti di un vettore. Se invece $A_{ik} = A_{ki}$ e $A_{ik} x^i x^k$ è un invariante per ogni vettore arbitrario x^i , allora le A_{ik} sono le componenti di un tensore covariante di secondo rango.

Le regole viste qui possono ovviamente essere applicate anche ai tensori di rango più elevato.

2.3.4 Tensori costanti

Un quadritensore di particolare interesse è il *tensore metrico* di componenti g_{ij} (oppure g^{ij}), definite dalla matrice G (G^{-1}) e caratterizzate dal fatto di essere le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali. Verifichiamo che il tensore metrico è effettivamente un tensore dimostrando che

$$g_{ij} = g'_{ij} = \hat{\Lambda}_i^l \hat{\Lambda}_j^m g_{lm}.$$

Moltiplicando in $G = \Lambda^T G \Lambda$ a destra per Λ^{-T} e a sinistra per Λ^{-1} , ricaviamo $\Lambda^{-T} G \Lambda^{-1} = G$, ossia $G = \hat{\Lambda} G \hat{\Lambda}^T$, e quindi

$$g_{ij} = \hat{\Lambda}_j^l g_{lm} \hat{\Lambda}_i^T m.$$

Il tensore metrico si rivela molto utile quando si vogliono abbassare o alzare gli indici. Si consideri l'ente caratterizzato dalle 4^4 quantità così definite:

$$\varepsilon^{iklm} = \begin{cases} 0 & \text{se due indici sono uguali} \\ 1 & \text{se gli indici formano una permutazione pari di 0123} \\ -1 & \text{se gli indici formano una permutazione dispari di 0123} \end{cases} \quad (2.19)$$

Si verifica che tali quantità sono le componenti controvarianti di uno pseudotensore costante di prima specie, in quanto obbediscono alla seguente legge di trasformazione:

$$\varepsilon'^{iklm} = \varepsilon^{iklm} = \text{Det } \Lambda \cdot \Lambda_r^i \Lambda_s^k \Lambda_t^l \Lambda_u^m \varepsilon^{rstu}.$$

La dimostrazione è immediata, basta infatti riconoscere che

$$\text{Det } \Lambda \cdot \varepsilon^{iklm} = \Lambda_r^i \Lambda_s^k \Lambda_t^l \Lambda_u^m \varepsilon^{rstu}$$

è la regola per calcolare il determinante di una matrice 4×4 . Si ottiene la legge di trasformazione per ε^{iklm} moltiplicando la precedente relazione per $\text{Det } \Lambda$ e ricordando che $\text{Det}^2 \Lambda = 1$. ε^{iklm} viene detto *pseudotensore di Ricci di quarto rango*.

2.3.5 Le leggi di trasformazione dei campi

In relatività dovremo considerare i campi tensoriali, ossia tensori che sono funzioni delle coordinate dello spazio quadridimensionale pseudoeuclideo.

Indichiamo ora con x il quarivettore (x^0, x^1, x^2, x^3) . Il più semplice esempio di campo tensoriale è il campo scalare. Vediamo ora come si trasforma un campo scalare $\phi(x)$ in seguito al passaggio da un sistema di coordinate inerziale ad un altro, con la legge $x' = \Lambda x + a$. Trattandosi di uno scalare, dobbiamo imporre che

$$\phi'(x') = \phi(x).$$

Per cui, osservato che $x = \Lambda^{-1}(x' - a)$, si ha

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}(x' - a)).$$

Stabilito ora di chiamare genericamente x le nuove coordinate (invece della notazione più corretta x'), abbiamo

$$\phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}(x - a)). \quad (2.20)$$

Per quanto riguarda un campo vettoriale di componenti $A^i(x)$, dovrà invece essere

$$A'^i(x') = \Lambda_j^i A^j(x),$$

ossia

$$A'^i(x) = \Lambda_j^i A^j(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (2.21)$$

e in modo analogo si ricavano le leggi di trasformazione dei campi tensoriali di ordine più elevato.

2.3.6 Il quadrigradiente e la sua legge di trasformazione

Dato un campo scalare $\phi(x)$, possiamo considerarne il quadrigradiente di componenti covarianti:

$$\partial_i \phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^i}. \quad (2.22)$$

Vogliamo ora dimostrare che il quadrigradiente ∂_i si trasforma come un campo vettoriale. In corrispondenza di una trasformazione $x'^i = \Lambda_j^i x^j + a^i$ possiamo scrivere

$$\phi'(x') = \phi(x);$$

derivando allora $\phi'(x')$ e utilizzando questa relazione otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial'_i \phi'(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^i} \phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} = \Lambda^{-T_i} \partial_j \phi(x) \\ &= \hat{\Lambda}_j^i \partial_j \phi(x). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\partial'_i \phi'(x') = \hat{\Lambda}_j^i \partial_j \phi(x), \quad (2.23)$$

e questa è la *legge di trasformazione del quadrigradiente*.

Capitolo 3

Meccanica relativistica di un punto materiale

Ci proponiamo ora di affrontare il problema di modificare le leggi della meccanica Newtoniana per ottenere quelle in forma covariante a vista della meccanica relativistica di un punto materiale. Nel generalizzare i concetti classici di velocità e di accelerazione cercheremo di soddisfare le condizioni che, per velocità piccole rispetto a c , si ottengano le note espressioni non relativistiche e che, unendo alle tre componenti della velocità e dell'accelerazione generalizzate una quarta componente, si possa formare un quadrivettore.

3.1 Quadrivelocità

Consideriamo dapprima una particella con velocità in modulo sempre minore di c per la quale, istante per istante, se ne può considerare il sistema a riposo, che viene detto *sistema proprio*. Il moto di tale particella può essere descritto dalle equazioni parametriche della traiettoria e del tempo $x^i = x^i(\tau)$, cioè $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tau)$ e $ct = ct(\tau)$.

In fisica non relativistica la velocità è definita come $\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$, ma in fisica relativistica non conviene utilizzare tale relazione, perchè non si trasforma linearmente e di conseguenza non è parte di un tensore. Ricordando invece che ds^2 è un invariante, poiché $dx^i = x^i(\tau + d\tau) - x^i(\tau)$ riguarda due eventi che definiscono posizione e tempo di una particella, allora l'intervallo infinitesimo $ds^2 = dx^i dx_i$ è sempre di tipo tempo, come si vede subito calcolandolo nel sistema a riposo della particella. Quindi possiamo considerarne la radice quadrata e scrivere

$$ds = \sqrt{dx^i dx_i} = \sqrt{c^2 dt^2 - dx^2} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

In particolare, nel sistema a riposo abbiamo $ds = c d\tau$. Si conclude allora che l'ente di componenti dx^i/ds deve essere un quadrivettore, in quanto rapporto di un quadrivettore e di un invariante. Si osservi inoltre che, a meno di un fattore c , per velocità piccole rispetto a quella della luce, le quantità dx^α/ds , con $\alpha = 1, 2, 3$, non sono altro che le componenti dell'ordinaria velocità

tridimensionale. Introduciamo pertanto il *quadrivettore velocità* o *quadrivelocità*, definito da

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}. \quad (3.1)$$

Per sottolineare il suo significato fisico osserviamo che

$$\begin{cases} c\mathbf{u} = \gamma \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \gamma \mathbf{v} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 0 \\ u^0 = \gamma \frac{c dt}{c dt} = \gamma \end{cases}.$$

Le quattro componenti della velocità non sono però indipendenti, anzi si dimostra che esse soddisfano la relazione

$$u^i u_i = 1; \quad (3.2)$$

infatti, deve essere

$$u^i u_i = \frac{dx^i}{ds} \frac{dx_i}{ds} = \frac{dx^i dx_i}{ds^2} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1.$$

3.2 Quadriaccelerazione

Definiamo ora il *quadrivettore accelerazione* o *quadriaccelerazione* nel modo seguente:

$$\omega^i = \frac{du^i}{ds}. \quad (3.3)$$

Anche per questo quadrivettore, per meglio capire il suo significato fisico, osserviamo che

$$\begin{cases} c^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{c^2 d\mathbf{u}}{ds} = \gamma \frac{d}{dt} [\gamma \mathbf{v}] \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} \\ c\omega^0 = \frac{c du^0}{ds} = \gamma \frac{d\gamma}{dt} \end{cases}.$$

Anche in questo caso le quattro componenti della quadriaccelerazione non sono indipendenti, ma devono soddisfare una precisa limitazione: per determinare tale restrizione si deriva rispetto a ds la condizione per le componenti della quadrivelocità $u^i u_i = 1$, e si ottiene

$$\frac{du^i}{ds} u_i + u^i \frac{du_i}{ds} = 0,$$

e quindi

$$\omega^i u_i + u^i \omega_i = \omega^i u_i + g^{ki} u_k g_{ik} \omega^k = 2\omega^i u_i = 0,$$

e cioè

$$\omega^i u_i = 0. \quad (3.4)$$

In altre parole, nella metrica pseudoeuclidea, la quadriaccelerazione risulta sempre ortogonale alla quadrivelocità.

3.3 Quadrimpulso

Vogliamo ora costruire un quadrivettore da associare a quello che in fisica classica era l'impulso $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$. Per fare ciò, facciamo innanzitutto un'assunzione: supponiamo che esista un parametro m non nullo detto *massa a riposo*, che caratterizzi ciascuna particella e che sia un invariante relativistico, ossia uno scalare. Possiamo allora definire il *quadrimpulso* come il quadrivettore caratterizzato dalla quaterna

$$p^i = mcu^i. \quad (3.5)$$

Per caratterizzare il significato fisico di tale quadrivettore, vediamo come si comportano le sue componenti per velocità piccole rispetto a c :

$$\begin{cases} \mathbf{p} = m\mathbf{c}\mathbf{u} = \gamma m\mathbf{v} \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} m\mathbf{v} \\ p^0 = mcu^0 = \gamma mc \end{cases}.$$

Nell'approssimazione non relativistica le tre componenti spaziali del quadrimpulso danno proprio l'impulso tridimensionale della meccanica classica. Anche per il quadrimpulso le quattro componenti non sono indipendenti, ma sono legate dalla seguente relazione di immediata verifica:

$$p^i p_i = m^2 c^2. \quad (3.6)$$

Esplicitando tale relazione, otteniamo $p^{02} - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2$, cioè

$$p^{02} = m^2 c^2 + |\mathbf{p}|^2.$$

Cerchiamo ora di capire il significato della componente temporale del quadrimpulso. Osserviamo che

$$cp^0 = \gamma mc^2 \xrightarrow{\beta \rightarrow 1} mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots \right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \dots$$

Per cui, a meno di termini $O(\beta^2)$, la quantità cp^0 differisce dall'energia cinetica della particella per il termine costante mc^2 . Conveniamo allora di chiamare la quantità $\mathcal{E} = cp^0$ *energia della particella*: il quadrimpulso si potrà allora scrivere come

$$p^i \equiv \frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p}, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Si noti come la relazione $\mathbf{v}/c = \mathbf{p}/p^0$ fornisca l'usuale velocità \mathbf{v} in termini dell'impulso e dell'energia relativistici. Poiché se $m \neq 0$, si ha $p < p^0$, allora la velocità di una particella con massa è sempre minore di c . La relazione (3.6) ha senso anche se $m = 0$ e in tale caso $v/c = p/p^0 = 1$, per cui una particella di massa nulla si muove sempre con velocità in modulo uguale a c .

3.3.1 Osservazione: energia a riposo

In fisica classica, l'energia è sempre definita a meno di una costante additiva arbitraria. Perchè allora non poniamo $\mathcal{E} = cp^0 - mc^2$, invece che $\mathcal{E} = cp^0$? La risposta è che dal punto di vista relativistico, aggiungere e togliere una costante significa modificare le proprietà di trasformazione di un quadrivettore. La costante $\mathcal{E}_0 = mc^2$ è detta *energia a riposo* della particella.

Vedremo nel seguito che questa scelta non è solo un fatto formale: negli urti ad alte energie o nei decadimenti, ciò che si conserva è l'intero quadrivettore, e in particolare la massa-energia, ma non la massa e l'energia separatamente.

3.3.2 Osservazione: $E = mc^2$

Facciamo ora una considerazione sul significato che in certi testi viene dato all'equazione $\mathcal{E} = mc^2$. Infatti, posto

$$m(v) = \gamma m ,$$

è possibile scrivere $\mathbf{p} = m(v)\mathbf{v}$ ed $\mathcal{E} = m(v)c^2$. Sotto un certo punto di vista ciò ha significato, ma è meglio non introdurre la quantità $m(v)$, in quanto non trasformandosi linearmente, essa non ha significato fisico rilevante.

3.4 Quadriforza

Consideriamo l'equazione di Newton

$$\mathbf{F}_{nr} = \frac{d\mathbf{p}_{nr}}{dt} ,$$

dove il pedice nr mette in evidenza il fatto di non essere una relazione relativistica; essa ci suggerisce di scrivere l'equazione relativistica del moto di una particella nella forma

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} , \tag{3.7}$$

che chiaramente è covariante a vista perché g^i è un quadrivettore che viene detto *quadriforza*.

Considerando le componenti spaziali di tale equazione e ponendo

$$\mathbf{g} = \frac{\gamma}{c} \mathbf{F} ,$$

con ovvie semplificazioni otteniamo l'*equazione fondamentale della meccanica relativistica* nella forma

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}[\gamma\mathbf{p}_{nr}] ,$$

che, come si vede, è una modifica della legge non relativistica e coincide con essa per $v \ll c$.

Cerchiamo ora di determinare il significato fisico della componente temporale della (3.7). A tale scopo, osserviamo che anche le componenti del vettore non sono indipendenti infatti, da $g^i = mc \frac{du^i}{ds} = mc\omega^i$, e utilizzando $\omega^i u_i = 0$, otteniamo:

$$g^i u_i = 0 . \tag{3.8}$$

Esplicitamente possiamo scrivere

$$g^0 u_0 = \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} ,$$

ovvero

$$\gamma g^0 = \frac{\gamma^2}{c} \frac{dp^0}{dt} = \frac{\gamma^2}{c^2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} ,$$

che, con ovvie semplificazioni, diventa

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} . \tag{3.9}$$

Abbiamo ottenuto quindi la *legge della potenza*. In altre parole, la definizione delle tre componenti spaziali del quadrivettore forza fornisce la generalizzazione della legge di Newton. La definizione della quarta componente fornisce poi il teorema della potenza che, così come in meccanica classica, si può riguardare come conseguenza delle prime tre componenti.

Capitolo 4

Forma covariante a vista delle leggi dell'elettromagnetismo

Ci proponiamo ora di porre le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo in forma covariante a vista mediante un procedimento euristico. I risultati sono comunque validi in quanto ad essi si può giungere anche in forma rigorosa, come vedremo nel capitolo introduttivo alla teoria dei campi.

4.1 L'equazione di Lorentz e il tensore elettromagnetico

Indichiamo con F^{ij} un tensore doppio antisimmetrico, cioè tale che $F^{ij} = -F^{ji}$. A partire da tale tensore e dal quadrivettore u^i possiamo costruire per contrazione il quadrivettore $F^{ij}u_j$. Questo quadrivettore soddisfa la proprietà che $F^{ij}u_ju_i = 0$, il che è evidente, essendo F^{ij} un tensore antisimmetrico e u_ju_i un tensore simmetrico, per cui $F^{ij}u_ju_i = -F^{ji}u_iu_j$; per rendersene conto si può anche vedere che

$$\begin{aligned} F^{ij}u_ju_i &\equiv \sum_{ij} F^{ij}u_ju_i = \sum_{i<j} F^{ij}u_ju_i + \sum_{i>j} F^{ij}u_ju_i \\ &= \sum_{i<j} F^{ij}u_iu_j - \sum_{i<j} F^{ji}u_ju_i = 0, \end{aligned}$$

dove si sono omissi i termini F^{ii} in quanto tutti nulli. Allora il quadrivettore $g^i = kF^{ij}u_j$ è un possibile esempio di quadriforza, risultando automaticamente soddisfatta la condizione $g^i u_i = 0$. Pertanto in questo caso l'equazione del moto relativistico è

$$\frac{dp^i}{ds} = kF^{ij}u_j. \quad (4.1)$$

Concentriamoci dapprima sulle componenti spaziali della precedente equazione quadrivettoriale:

$$\frac{dp^\alpha}{ds} = kF^{\alpha j}u_j, \quad (4.2)$$

dove il secondo membro può essere riscritto come

$$kF^{\alpha j}u_j = \gamma kF^{\alpha 0} - \frac{\gamma}{c}kF^{\alpha\beta}v^\beta .$$

Qui e nel seguito, useremo la convenzione di indicare con le lettere greche gli indici che denotano le componenti di un trivettore; per esempio, se identifichiamo le componenti spaziali di un quadrivettore controvariante A^i con quelle di un trivettore \mathbf{A} , avremo

$$A_0 = A^0, \quad A^\alpha = -A_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

e per il gradiente

$$\partial_0 \equiv \frac{\partial}{\partial x^0} = \partial^0 \equiv \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \partial^\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

per cui per esso avremo $\partial_i = (\partial_0, \nabla)$ e $\partial^i = (\partial^0, -\nabla)$.

Essendo F^{ij} un quadritensore doppio antisimmetrico, le sue componenti spaziali formano un tensore doppio tridimensionale antisimmetrico rispetto alle trasformazioni puramente spaziali; le sue componenti si possono esprimere mediante le componenti di un vettore assiale \mathbf{H} tridimensionale nel modo seguente:

$$F^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}H^\gamma .$$

Ritornando allora alla (4.2), le componenti $F^{\alpha 0}$ di un 4-tensore doppio antisimmetrico si possono identificare, rispetto alle trasformazioni puramente spaziali, con le componenti di un vettore tridimensionale polare \mathbf{E} :

$$F^{\alpha 0} = E^\alpha .$$

Pertanto le componenti del quadrivettore doppio antisimmetrico F^{ij} si potranno rappresentare nella tabella seguente, che in seguito vedremo essere il *tensore elettromagnetico*:

$$[F^{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -E^x & -E^y & -E^z \\ E^x & 0 & -H^z & H^y \\ E^y & H^z & 0 & -H^x \\ E^z & -H^y & H^x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

o, più brevemente

$$\begin{cases} F^{ij} = (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \\ F_{ij} = (-\mathbf{E}, \mathbf{H}) \end{cases} . \quad (4.4)$$

Sostituendo questi risultati nell'equazione alla quale eravamo rimasti, otteniamo

$$kF^{\alpha j}u_j = \gamma k \left(E^\alpha + \frac{1}{c}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}v^\beta H^\gamma \right) .$$

Ora riconosciamo che

$$(\mathbf{v} \times \mathbf{H})^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}v^\beta H^\gamma ,$$

e quindi

$$kF^{\alpha j}u_j = \gamma k \left[E^\alpha + \frac{1}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{H})^\alpha \right] .$$

In conclusione possiamo scrivere la (4.2) nel seguente modo:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{d\mathbf{p}^\alpha}{dt} = \gamma k \left[E^\alpha + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})^\alpha \right]$$

per cui, unificando tutto in notazione trivettoriale, abbiamo

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = ck \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right).$$

Se ora poniamo $k = e/c$, l'equazione precedente diviene

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}; \quad (4.5)$$

ma tale equazione non è altro che l'equazione di Lorentz dell'elettromagnetismo, a patto di identificare e , \mathbf{E} e \mathbf{H} rispettivamente con la carica, il campo elettrico e il campo magnetico. A titolo di verifica, possiamo esaminare la componente temporale dell'equazione quadrivettoriale dalla quale eravamo partiti:

$$\frac{dp^0}{ds} = kF^{0j}u_j.$$

Calcoliamo separatamente ciascun membro:

$$\frac{dp^0}{ds} = \frac{\gamma}{c} \frac{d\mathcal{E}}{c dt} = \frac{\gamma}{c^2} \frac{d\mathcal{E}}{dt},$$

$$\begin{aligned} kF^{0j}u_j &= \frac{e}{c} F^{0\alpha}u_\alpha = \frac{e}{c} (-E^\alpha) \frac{-v^\alpha}{\gamma c} \\ &= \frac{\gamma}{c^2} e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Per cui uguagliandoli otteniamo

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

che non è altro che la legge della potenza per il campo elettromagnetico, diretta conseguenza dell'equazione di Lorentz.

In conclusione, abbiamo visto che, associando al campo elettromagnetico il tensore F^{ij} , siamo riusciti a porre l'equazione di Lorentz e quella della potenza in forma covariante a vista. Naturalmente, per poter parlare di covarianza a vista è implicita la richiesta che F^{ij} si trasformi come un quadritensore controvariante doppio:

$$F'^{ij} = \Lambda_l^i \Lambda_m^j F^{lm}.$$

4.2 Trasformazioni speciali del campo elettromagnetico

Dalle proprietà di trasformazione del tensore doppio antisimmetrico F^{ij} possiamo dedurre le leggi di trasformazione per i campi elettrico e magnetico per trasformazioni di Lorentz speciali, che sappiamo essere caratterizzate dalla seguente matrice:

$$[\Lambda_j^i] = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per cui, considerando ciascuna componente dei campi, scriviamo:

$$\begin{aligned}
E^x = F^{10}, \quad E'^x = F'^{10} &= \Lambda_l^1 \Lambda_m^0 F^{lm} \\
&= \Lambda_l^1 \Lambda_0^0 F^{l0} + \Lambda_l^1 \Lambda_1^0 F^{l1} + \Lambda_l^1 \Lambda_2^0 F^{l2} + \Lambda_l^1 \Lambda_3^0 F^{l3} \\
&= \gamma \Lambda_l^1 F^{l0} - \beta \gamma \Lambda_l^1 F^{l1} = \gamma \Lambda_0^1 F^{00} + \gamma \Lambda_1^1 F^{10} - \beta \gamma \Lambda_0^1 F^{01} - \beta \gamma \Lambda_1^1 F^{11} \\
&= \gamma(-\beta \gamma) F^{00} + \gamma \gamma F^{10} - \beta \gamma(-\beta \gamma) F^{01} - \beta \gamma \gamma F^{11} \\
&= \gamma^2 E^x + \beta^2 \gamma^2 (-E^x) = \gamma^2 (1 - \beta^2) E^x \\
&= E^x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^y = F^{20}, \quad E'^y = F'^{20} &= \Lambda_l^2 \Lambda_m^0 F^{lm} = \Lambda_l^2 \Lambda_0^0 F^{l0} + \Lambda_l^2 \Lambda_1^0 F^{l1} = \gamma \Lambda_l^2 F^{l0} - \beta \gamma \Lambda_l^2 F^{l1} \\
&= \gamma \Lambda_1^2 F^{10} + \gamma \Lambda_2^2 F^{20} - \beta \gamma \Lambda_1^2 F^{11} - \beta \gamma \Lambda_2^2 F^{21} = \gamma F^{20} - \beta \gamma F^{21} \\
&= \gamma(E^y - \beta H^z);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^z = F^{30}, \quad E'^z = F'^{30} &= \Lambda_l^3 \Lambda_m^0 F^{lm} = \gamma \Lambda_l^3 F^{l0} - \beta \gamma \Lambda_l^3 F^{l1} \\
&= \gamma F^{30} - \beta \gamma F^{31} = \gamma E^z + \beta \gamma H^y \\
&= \gamma(E^z + \beta H^y).
\end{aligned}$$

Analogamente, per le componenti del campo magnetico si ha:

$$\begin{aligned}
H^x = F^{32}, \quad H'^x = F'^{32} &= H^x; \\
H^y = F^{13}, \quad H'^y = F'^{13} &= \gamma(H^y + \beta E^z); \\
H^z = F^{21}, \quad H'^z = F'^{21} &= \gamma(H^z - \beta E^y).
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto le leggi di trasformazione dei campi elettrico e magnetico in corrispondenza della trasformazione speciale di Lorentz delle coordinate spazio-temporali. Si ricordi che le formule scritte sono espressioni concise: in tali equazioni i campi \mathbf{E}' ed \mathbf{H}' sono valutati nel punto $x' = \Lambda x + a$, mentre i campi \mathbf{E} ed \mathbf{H} sono valutati in x .

4.3 Le equazioni di Maxwell

Ci proponiamo ora di scrivere le equazioni di Maxwell in termini del tensore elettromagnetico F^{ij} , in modo da renderle covarianti a vista. Nel sistema CGS, le equazioni di Maxwell si scrivono

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho \\
\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Il primo gruppo è costituito da quattro equazioni (una scalare e l'altra trivettoriale) che uguagliano a zero delle funzioni dei soli campi elettrico e magnetico, determinando così le proprietà intrinseche di questi. Il secondo gruppo è invece costituito da quattro equazioni che collegano i campi elettrico e magnetico alla densità di carica ρ e alla densità di corrente \mathbf{j} .

Dalla discussione fatta nel primo capitolo, c'è da aspettarsi che le equazioni di Maxwell siano covarianti, e cioè che mantengono la stessa forma in tutti i sistemi di riferimento. Per poter dare una forma covariante a vista anche alle equazioni del secondo gruppo, definiamo la grandezza a quattro componenti detta *quadriceorrente*

$$j = (c\rho, \mathbf{j}) .$$

Verificheremo più avanti che le j^i sono le componenti di un campo quadrivettoriale: per il momento consideriamo buono tale risultato. A questo punto, un modo per verificare la covarianza delle equazioni di Maxwell potrebbe essere quello di sostituire ai campi elettrico e magnetico la loro espressione in termini del tensore elettromagnetico F^{ij} , alle densità di carica e di corrente le componenti della quadriceorrente j e manipolare le espressioni risultanti in modo da ottenere equazioni in forma covariante. Poichè all'inizio di questo capitolo abbiamo premesso che ricaveremo la forma covariante delle equazioni di Maxwell con un procedimento euristico, ora faremo proprio il contrario del metodo appena enunciato: giungeremo al risultato in modo euristico e ne verificheremo l'esattezza a posteriori. Le equazioni di Maxwell sono otto equazioni, per cui ci si può aspettare che esse possano essere riscritte come due equazioni quadrivettoriali. D'altronde, esse a primo membro sono lineari nelle derivate prime spazio-temporali dei campi elettrico e magnetico, cioè del tensore F^{ij} . Con il tensore triplo $\partial_k F_{ij}$ si possono poi costruire i due campi quadrivettoriali

$$\begin{aligned} \partial_j F^{ij} , \\ \varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} . \end{aligned}$$

Notiamo che il primo è un campo quadrivettoriale, mentre il secondo è un campo pseudovettoriale di prima specie. Proviamo allora a scrivere le seguenti due equazioni quadrivettoriali:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} = 0 , \\ \partial_j F^{ij} = qj^i , \end{aligned} \tag{4.7}$$

dove q è una costante. Ora verificheremo che se si pone

$$q = -\frac{4\pi}{c} ,$$

le due equazioni quadrivettoriali (4.7) non sono altro che le equazioni di Maxwell poste in forma covariante a vista. Cominciando con la prima equazione, abbiamo

$$\begin{aligned} \varepsilon^{0jkl} \partial_j F_{kl} &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\alpha F^{\beta\gamma} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon^{\beta\gamma\delta} \partial_\alpha H^\delta \\ &= -2\partial_\alpha H^\alpha = -2\nabla \cdot \mathbf{H} , \end{aligned}$$

per cui

$$\varepsilon^{0jkl} \partial_j F_{kl} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 .$$

Per le componenti spaziali di tale equazione, abbiamo:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\alpha jkl} \partial_j F_{kl} &= \varepsilon^{\alpha 0\beta\gamma} \partial_0 F_{\beta\gamma} + 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma 0} \partial_\beta F_{\gamma 0} \\ &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{\beta\gamma\delta} H^\delta + 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta E^\gamma \\ &= 2 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial H^\alpha}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{E})^\alpha \right] , \end{aligned}$$

per cui

$$\varepsilon^{\alpha jkl} \partial_j F_{kl} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Per quanto riguarda la seconda equazione, abbiamo

$$\partial_j F^{0j} = \partial_\alpha F^{0\alpha} = -\partial_\alpha E^\alpha = -\nabla \cdot \mathbf{E};$$

per cui, se $qj^0 = -4\pi\rho$, abbiamo

$$\partial_j F^{0j} = qj^0 \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho.$$

Non rimane che la verifica per le componenti spaziali della seconda equazione:

$$\begin{aligned} \partial_j F^{\alpha j} &= \partial_\alpha F^{\alpha 0} + \partial_\beta F^{\alpha\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial E^\alpha}{\partial t} - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta H^\gamma \\ &= -(\nabla \times \mathbf{H})^\alpha + \frac{1}{c} \frac{\partial E^\alpha}{\partial t}; \end{aligned}$$

e se $qj^\alpha = -\frac{4\pi}{c} j^\alpha$ abbiamo

$$\partial_j F^{\alpha j} = qj^\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}.$$

La verifica ha dato quindi il risultato previsto: abbiamo scritto proprio le equazioni di Maxwell in forma covariante a vista. Pertanto le equazioni di Maxwell soddisfano il terzo principio di relatività.

4.4 Il quadrivettore corrente e l'equazione di continuità

Per la covarianza delle equazioni di Maxwell è essenziale che le quantità $j^i = c\rho, \mathbf{j}$ si trasformino come le componenti di un campo quadrivettoriale, avendo assunto che F^{ik} si trasformi come un campo quadritensoriale doppio, per assicurare la covarianza a vista delle equazioni di Lorentz. Ma ρ e \mathbf{j} dipendono dal sistema materiale interagente con il campo elettromagnetico. Per esempio, nel caso di un sistema di particelle cariche puntiformi (in relatività non ha senso parlare di corpo rigido in quanto tale nozione presuppone la propagazione istantanea delle interazioni), ρ e \mathbf{j} dipendono dalle coordinate e dalla velocità delle cariche per le quali le leggi di trasformazione sono già state definite. Dobbiamo pertanto verificare se le $j^i(x)$ si trasformano come un campo quadrivettoriale, ossia che, per trasformazioni di Poincaré delle coordinate spazio-temporali, si ha

$$j'^i(x') = \Lambda^i_k j^k(x).$$

Una volta constatato che le j^i sono le componenti di un quadrivettore, dal secondo gruppo delle equazioni di Maxwell in forma covariante, otteniamo $\partial_j F^{ij} = qj^i$, e quindi

$$\partial_i \partial_j F^{ij} = q \partial_i j^i.$$

Poiché $\partial_i \partial_j$ si comporta come un tensore doppio simmetrico, mentre F^{ij} è un tensore doppio antisimmetrico, deve poi essere $\partial_i \partial_j F^{ij} = 0$; pertanto il quadrivettore corrente dovrà soddisfare la condizione

$$\partial_i j^i = 0, \quad (4.8)$$

che viene detta *equazione di continuità della corrente* in forma covariante a vista. Esplicitando tale equazione otteniamo

$$\partial_i j^i = \partial_0 j^0 + \partial_\alpha j^\alpha = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0$$

che, come si nota facilmente, è l'equazione di continuità nel formalismo tridimensionale.

Integrando poi entrambi i membri sul volume V racchiuso dalla superficie chiusa S orientata verso l'esterno, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} \right) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} dV \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV + \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\partial Q}{\partial t} + \Phi_S(t) \end{aligned}$$

dove Q indica la carica totale contenuta nel volume V e $\Phi_S(t)$ indica il flusso uscente nell'unità di tempo dalla superficie S ; si ottiene quindi la *legge di conservazione della carica*:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\Phi_S,$$

che fornisce significato fisico all'equazione di continuità. Come secondo punto dobbiamo allora verificare che la nostra quadricorrente j^i soddisfi l'equazione di continuità.

4.5 Quadricorrente di un sistema di cariche puntiformi

Ci proponiamo ora di ricavare esplicitamente le componenti della quadricorrente j^i nel caso di un sistema di N cariche puntiformi, in modo da vedere come si trasforma e quali relazioni soddisfa.

Quando si cerca descrivere le densità di carica e di corrente dovute ad un sistema di N cariche puntiformi sorgono subito delle difficoltà. Consideriamo infatti una particella di carica e_1 e di coordinate x_1^i ; se esistesse una funzione ordinaria $\rho(x)$ che descrive la densità di carica, essa dovrebbe godere delle seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \rho(x) = 0 & \text{per } x^i \neq x_1^i \\ \rho(x) = \infty & \text{per } x^i = x_1^i \\ \int \rho(x) d^3x = e_1 \end{cases}.$$

È evidente che non esiste una funzione ordinaria dotata di queste proprietà. Siamo pertanto costretti a ricorrere alla teoria delle distribuzioni e a descrivere le densità di carica e di corrente tramite funzioni simboliche.

Condieriamo allora un sistema di N cariche puntiformi. Conveniamo indicare con $\mathbf{x}_r(t)$ le coordinate spaziali dell' r -esima particella all'istante t e con e_r la sua carica. Poniamo infine $\delta^3(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Ricordiamo che in generale il prodotto di distribuzioni non ha senso, ma qui tali distribuzioni sono relative a diverse variabili, per cui si tratta di una specie di prodotto diretto. La *densità di carica* si può allora esprimere come

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N e_r \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)); \quad (4.9)$$

detto V il volume tridimensionale finito contenente tutte le particelle in un intervallo di tempo t , possiamo scrivere

$$\int_V \rho(\mathbf{x}, t) d^3x = \sum_{r=1}^N e_r.$$

Ricordando che $\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}$, dall'espressione della densità di carica possiamo ricavare quella della *densità di corrente*:

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = \sum_{r=1}^N e_r \mathbf{v}_r \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)). \quad (4.10)$$

Osserviamo quindi che la densità di carica e la densità di corrente dipendono sia dalle coordinate che dal tempo.

Abbiamo già detto che non possiamo assumere che $c\rho$ e \mathbf{j} si trasformino come le componenti di un quadrivettore, infatti le leggi di trasformazione delle coordinate delle particelle, da cui ρ e \mathbf{j} dipendono, sono già state date. Si tratta invece di esprimere $j^i = c\rho, \mathbf{j}$ in modo tale che si possa facilmente verificare che si tratta di un quadrivettore. A tale proposito poniamoci nello spazio quadridimensionale e indichiamo con $x_r^i(\tau_r)$ le equazioni parametriche della linea di universo relativa all' r -esima particella. In particolare, essendo il parametro τ_r completamente arbitrario, possiamo fare in modo che sia $\tau_r \equiv x_r^0$. Poniamo per definizione

$$j^i(x) \equiv c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i \delta^4(x - x_r), \quad (4.11)$$

dove

$$\delta^4(x - x_r) = \delta(x^0 - x_r^0) \delta(x^1 - x_r^1) \delta(x^2 - x_r^2) \delta(x^3 - x_r^3).$$

Verifichiamo innanzitutto che $j^0(x) = c\rho(x)$ e che $j^\alpha(x) = j^\alpha$. Ricordando che abbiamo supposto $x_r^i = x_r^i(x_r^0)$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} j^i(x) &= c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i \delta^4(x - x_r) \\ &= c \sum_{r=1}^N e_r \int_{-\infty}^{+\infty} dx_r^0 \frac{dx_r^i(x_r^0)}{dx_r^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)) \delta(x^0 - x_r^0) \\ &= c \sum_{r=1}^N e_r \frac{dx_r^i(x_r^0)}{dx_r^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x^0 - x_r^0) dx_r^0 \\ &= c \sum_{r=1}^N e_r \frac{dx_r^i}{dx_r^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)). \end{aligned}$$

In particolare abbiamo

$$\begin{aligned}
 j^0(x) &= c \sum_{r=1}^N e_r \frac{dx_r^0(x_r^0)}{dx_r^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)) \\
 &= c \sum_{r=1}^N e_r \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)) = c\rho(x) \\
 j^\alpha(x) &= c \sum_{r=1}^N e_r \frac{dx_r^\alpha(x_r^0)}{dx_r^0} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)) \\
 &= \sum_{r=1}^N e_r v_r^\alpha(x_r^0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(x_r^0)) = j^\alpha(x).
 \end{aligned}$$

Ora possiamo finalmente dimostrare il primo punto. Dalla teoria delle distribuzioni abbiamo che

$$\delta^4(\Lambda x) = |\text{Det } \Lambda|^{-1} \delta^4(x).$$

In particolare, per trasformazioni proprie di Lorentz abbiamo $\delta^4(\Lambda x) = \delta^4(x)$. Allora, presa la generica trasformazione del gruppo di Poincaré $x' = \Lambda x + a$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
 j'^i(x) &= c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r'} \delta^4(x' - x_r') dx_r'^i \\
 &= c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} \delta^4(\Lambda(x - x_r)) \Lambda_k^i dx_r^k \\
 &= \Lambda_k^i c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) dx_r^k \\
 &= \Lambda_k^i j^k(x),
 \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Passiamo ora alla verifica del secondo punto, cioè a vedere se è soddisfatta l'equazione di continuità. A tal fine osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{r=1}^N e_r \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) \right] = \sum_{r=1}^N e_r \frac{d}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) \\
 &= - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{r=1}^N e_r \frac{\partial}{\partial x_r^\alpha} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) \frac{dx_r^\alpha}{dt} = - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{r=1}^N e_r \frac{\partial}{\partial x_r^\alpha} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) v_r^\alpha \\
 &= - \nabla \cdot \sum_{r=1}^N e_r \mathbf{v}_r \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) = - \nabla \cdot \mathbf{j},
 \end{aligned}$$

da cui si ricava immediatamente l'equazione di continuità cercata:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

4.6 Le equazioni di Maxwell in termini di quadripotenziale

Ricordiamo il primo gruppo di equazioni di Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0;$$

per le proprietà dei campi vettoriali nello spazio fisico, sappiamo che la prima equazione implica che deve essere

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Sostituendo tale risultato nella seconda equazione otteniamo:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} [\nabla \times \mathbf{A}] = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0,$$

da cui

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi,$$

e quindi

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

In definitiva, il primo gruppo di equazioni di Maxwell può essere sostituito dalle equazioni

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

che esprimono i campi elettrico e magnetico in termini dei potenziali vettore e scalare.

Cerchiamo ora di trasportare questo risultato nel formalismo quadridimensionale. Introduciamo la seguente grandezza a quattro componenti, detta *quadripotenziale*:

$$A^i = \phi, \mathbf{A}. \quad (4.12)$$

Osservando che $(\nabla \phi)^\alpha = \partial_\alpha \phi$, le due equazioni precedenti si possono quindi scrivere

$$\begin{aligned} H^\alpha &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial_\beta A^\gamma = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \partial^\beta A^\gamma, \\ E^\alpha &= -\partial_\alpha A^0 - \partial_0 A^\alpha = \partial^\alpha A^0 - \partial^0 A^\alpha. \end{aligned}$$

A questo punto siamo in grado di esprimere le componenti del tensore elettromagnetico in termini del quadripotenziale. Ricordando che

$$F^{\alpha 0} = E^\alpha, \quad F^{\alpha\beta} = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} F^{\alpha 0} &= E^\alpha = \partial^\alpha A^0 - \partial^0 A^\alpha, \\ F^{\alpha\beta} &= -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma = -\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\delta\varepsilon} \partial^\delta A^\varepsilon \\ &= (\delta_\delta^\alpha \delta_\varepsilon^\beta \partial^\delta A^\varepsilon - \delta_\varepsilon^\alpha \delta_\delta^\beta \partial^\delta A^\varepsilon) = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha. \end{aligned}$$

Essendo F^{ij} un tensore antisimmetrico, possiamo sinteticamente scrivere

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i. \quad (4.13)$$

In conclusione, una volta definito il quadripotenziale (4.12), le seguenti relazioni sono equivalenti, nel senso che una vale se e solo se vale almeno una delle altre:

i.

$$\varepsilon^{ijkl} \partial_j F^{kl} = 0$$

ii.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \nabla \times \mathbf{A} \\ \mathbf{E} &= -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \end{aligned}$$

iv.

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i .$$

La conseguenza più importante di tutto ciò è che l'equazione (4.13), che esprime il tensore elettromagnetico nei termini del quadripotenziale, è equivalente al primo gruppo delle equazioni di Maxwell.

Naturalmente, dobbiamo anche assumere che in seguito ad una trasformazione di Poincaré delle coordinate spazio-temporali, il quadripotenziale $A^i(x)$ si trasformi come un campo quadri-vettoriale, cioè che

$$A'^i(x') = \Lambda_j^i A^j(x) ; \quad (4.14)$$

ma ciò è perfettamente equivalente al richiedere che F^{ij} si trasformi come un tensore doppio antisimmetrico:

$$F'^{ij}(x') = \Lambda_l^i \Lambda_m^j F^{lm}(x) . \quad (4.15)$$

Pertanto possiamo dimenticarci del primo gruppo di equazioni di Maxwell non appena pensiamo il tensore elettromagnetico espresso in termini del quadripotenziale.

L'equivalenza dell'equazioni $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$ e dell'equazione $\varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} = 0$ si poteva dimostrare anche per via diretta, infatti $F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$ implica

$$\varepsilon^{ijkl} \partial_j (\partial_k A_l - \partial_l A_k) = 2\varepsilon^{ijkl} \partial_j \partial_k A_l = 0 .$$

Il viceversa è invece una diretta conseguenza del teorema di Stokes applicato questa volta ai quadri-vettori.

4.7 L'invarianza di gauge

Nel precedente paragrafo abbiamo dimostrato l'equivalenza delle equazioni $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$ e $\varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} = 0$. Osserviamo poi che quando vengono dati i potenziali, risultano univocamente determinati i campi e quindi il tensore elettromagnetico. Il viceversa non è però vero. Infatti, sia $F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i$ e poniamo

$$\hat{A}_i(x) = A_i(x) + \partial_i f(x),$$

dove $f(x)$ è un arbitrario campo scalare. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \hat{F}^{ij} &= \partial_i \hat{A}_j - \partial_j \hat{A}_i \\ &= \partial_i A_j + \partial_i \partial_j f - \partial_j A_i - \partial_j \partial_i f \\ &= \partial_i A_j - \partial_j A_i = F_{ij}. \end{aligned}$$

Possiamo dunque affermare che le equazioni dell'elettromagnetismo sono invarianti se sui potenziali eseguiamo la *trasformazione di gauge*

$$\hat{A}_i = A_i + \partial_i f. \quad (4.16)$$

Questa proprietà dei campi è detta *invarianza di gauge*. L'indeterminazione ora evidenziata nella scelta dei potenziali consente sempre di sceglierli in modo tale da soddisfare una condizione arbitraria supplementare determinata da ragioni di comodità.

Una particolare condizione di gauge può essere $\hat{A}_0 = 0$; un'altra, detta *gauge di Coulomb* è $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Si osservi che entrambe queste gauge rompono la covarianza. Una gauge covariante a vista è invece la *gauge di Lorentz* che è data da

$$\partial_i \hat{A}^i = 0. \quad (4.17)$$

Verifichiamo per esempio che è sempre possibile imporre la (4.17): dalla trasformazione di gauge (4.16) si ha

$$\partial_i \hat{A}^i = \partial_i A^i + \partial_i \partial^i f = \partial_i A^i + \square f,$$

dove

$$\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$$

è l'operatore di D'alambert. Basta allora scegliere f tale che

$$\square f = -\partial_i A^i$$

per ottenere la (4.17).

4.8 Seconda forma del primo gruppo di equazioni di Maxwell

In termini del tensore elettromagnetico, il primo gruppo delle equazioni di Maxwell è stato scritto come

$$\varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} = 0.$$

Ora dimostriamo che tale scrittura è equivalente alla seguente:

$$\partial_l F_{ik} + \partial_j F_{kl} + \partial_k F_{lj} = 0.$$

Sia allora $\partial_l F_{jk} + \partial_j F_{kl} + \partial_k F_{lj} = 0$; si ha

$$\begin{aligned} 0 &= \varepsilon^{ijkl} (\partial_l F_{jk} + \partial_j F_{kl} + \partial_k F_{lj}) \\ &= \varepsilon^{ijkl} \partial_l F_{jk} + \varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} + \varepsilon^{ijkl} \partial_k F_{lj} \\ &= 3\varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl}. \end{aligned}$$

Sia $\varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} = 0$, per cui

$$\varepsilon_{irst} \varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} = 0$$

da cui, ricordando che

$$\varepsilon_{irst} \varepsilon^{ijkl} = - \begin{vmatrix} \delta_r^j & \delta_s^j & \delta_t^j \\ \delta_r^k & \delta_s^k & \delta_t^k \\ \delta_r^l & \delta_s^l & \delta_t^l \end{vmatrix} = -\delta_r^j (\delta_s^k \delta_t^l - \delta_s^l \delta_t^k) + \delta_s^j (\delta_r^k \delta_t^l - \delta_r^l \delta_t^k) - \delta_t^j (\delta_r^k \delta_s^l - \delta_r^l \delta_s^k),$$

possiamo scrivere

$$\partial_r F_{ts} + \partial_s F_{rt} + \partial_t F_{sr} - \partial_r F_{st} - \partial_s F_{tr} - \partial_t F_{rs} = 0$$

cioè, per l'antisimmetria del tensore elettromagnetico,

$$\partial_l F_{jk} + \partial_j F_{kl} + \partial_k F_{lj} = 0.$$

4.9 Invarianti del campo elettromagnetico

Partendo dal tensore doppio antisimmetrico F^{ij} è possibile costruire alcune quantità invarianti per trasformazioni proprie di Poincaré. Consideriamo ad esempio le seguenti quantità:

$$F^{ij} F_{ij}, \quad \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl};$$

si vede subito che la prima di esse è uno scalare, mentre la seconda è uno pseudoscalare di prima specie. Ora cercheremo di esprimere questi due invarianti in termini dei campi elettrico e magnetico. Se F^{ij} è il tensore elettromagnetico, per il primo invariante si ha

$$\begin{aligned} F^{ij} F_{ij} &= 2F^{0\alpha} F_{0\alpha} + F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \\ &= -2F^{0\alpha} F_{0\alpha} + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} H^\gamma \varepsilon^{\alpha\beta\delta} H^\delta \\ &= 2(H^2 - E^2), \end{aligned}$$

e quindi risulta che la quantità $H^2 - E^2$ è un invariante scalare. Per la seconda quantità si ha:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} &= 4\varepsilon^{0\alpha\beta\gamma} F_{0\alpha} F_{\beta\gamma} = -4\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} E^\alpha \varepsilon^{\beta\gamma\delta} H^\delta \\ &= -8E^\alpha H^\alpha = -8\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}, \end{aligned}$$

per cui $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ è un invariante pseudovettoriale perché cambia segno per una riflessione degli assi spaziali.

Capitolo 5

Principi di conservazione del campo elettromagnetico

In questo capitolo vedremo i vari principi di conservazione per un sistema di N cariche puntiformi immerse in un campo elettromagnetico.

5.1 Bilancio energetico nel formalismo tridimensionale

Consideriamo le seguenti due equazioni di Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = 0.$$

Moltiplicando scalarmente entrambi i membri della prima equazione per \mathbf{E} ed entrambi i membri della seconda per \mathbf{H} otteniamo

$$\mathbf{E} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \cdot \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = 0$$

da cui, sottraendo membro a membro la prima equazione dalla seconda, otteniamo

$$\frac{1}{c} \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

Utilizzando la relazione generale

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \nabla \times \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{A},$$

possiamo scrivere

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} [E^2 + H^2] + \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E},$$

e cioè

$$\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial t} [E^2 + H^2] + \frac{c}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}.$$

Ponendo ora

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2), \tag{5.1}$$

detta *densità di energia*, e

$$\mathbf{s} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H}, \quad (5.2)$$

detto *vettore di Poynting*, la precedente relazione diventa

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{s} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \quad (5.3)$$

che, come vedremo in seguito, rappresenta il *bilancio energetico*.

Per meglio comprendere il significato fisico dell'equazione (5.3), consideriamola dapprima nel caso semplice in cui non ci sono cariche: otteniamo la seguente *equazione di continuità*:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{s} = 0. \quad (5.4)$$

Consideriamo ora un volume tridimensionale Ω racchiuso dalla superficie chiusa Σ , e poniamo per definizione

$$W = \int_{\Omega} w \, d\Omega.$$

Integrando allora sul volume Ω entrambi i membri dell'equazione e ricordando il teorema di Gauss, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{s} \, d\Omega = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} w \, d\Omega + \int_{\Sigma} \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \, d\Sigma \\ &= \frac{\partial W}{\partial t} + \Phi_{\Sigma}(t). \end{aligned}$$

Abbiamo cioè un'equazione di continuità in forma integrale:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \Phi_{\Sigma} = 0, \quad (5.5)$$

dove W si può pensare come l'energia totale racchiusa nel volume Ω e Φ_{Σ} rappresenta il flusso di energia uscente nell'unità di tempo dalla superficie Σ .

Prendiamo ora in considerazione anche il caso più complicato in cui siano presenti N cariche puntiformi. Abbiamo già visto che in tal caso la densità di corrente è espressa da

$$\mathbf{j} = \sum_{r=1}^N e_r \mathbf{v}_r \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r).$$

Pertanto possiamo scrivere

$$-\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = - \sum_{r=1}^N e_r \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{E} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \quad (5.6)$$

da cui, ricordando la legge della potenza

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = e \mathbf{E} \cdot \mathbf{v},$$

ed integrando la (5.6) su un volume Ω contenente tutte le cariche, otteniamo

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, d\Omega &= - \sum_{r=1}^N e_r \mathbf{v}_r \cdot \int_{\Omega} d^3x \mathbf{E}(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \\ &= - \sum_{r=1}^N e_r \mathbf{v}_r \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}_r, t) = - \sum_{r=1}^N \frac{d\mathcal{E}_r}{dt}. \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere la seguente equazione in forma integrale:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \sum_{r=1}^N \frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\phi_r. \quad (5.7)$$

In conclusione, ha senso interpretare W come l'energia del campo elettromagnetico nel volume Ω e w come la densità di energia. L'equazione (5.7) rappresenta quindi in forma integrale l'*equazione di continuità dell'energia* per un sistema di N cariche puntiformi interagenti con il campo elettromagnetico, e ci fornisce nel contempo il bilancio energetico per tale sistema. In modo simile è possibile ricavare la legge di conservazione dell'impulso.

5.2 Il tensore energia-impulso e la conservazione dell'impulso

Ora ci proponiamo di trovare in modo analogo delle equazioni di continuità partendo dalle equazioni di Maxwell in forma covariante a vista. Così facendo otterremo nello stesso tempo non solo il bilancio energetico, ma anche il bilancio dell'intero *quadrivettore energia-impulso* del campo elettromagnetico.

Ricordiamo allora come si scrivono le equazioni di Maxwell in forma covariante a vista:

$$\partial_l F_{jk} + \partial_j F_{kl} + \partial_k F_{jl} = 0, \quad \partial_j F^{ij} = -\frac{4\pi}{c} j^i.$$

Dal secondo gruppo di equazioni ricaviamo

$$-\frac{4\pi}{c} F^k{}_i j^i = F^k{}_i \partial_j F^{ij}$$

che, in base alla regola di derivazione per parti possiamo riscrivere come

$$-\frac{4\pi}{c} F^k{}_i j^i = \partial_j [F^k{}_i F^{ij}] - (\partial_j F^k{}_i) F^{ij}.$$

Essendo poi $(\partial_j F^k{}_i) F^{ij} = g^{hk} (\partial_j F_{hi}) F^{ij}$, abbiamo

$$-\frac{4\pi}{c} F^k{}_i j^i = \partial_j [F^k{}_i F^{ij}] - g^{hk} (\partial_j F_{hi}) F^{ij}.$$

Osserviamo ora che, tenendo conto dell'antisimmetria di F_{hi} (che comporta le uguaglianze $(\partial_j F_{ki}) F^{ij} = (\partial_i F_{kj}) F^{ji} = -(\partial_i F_{kj}) F^{ij}$) e del primo gruppo delle equazioni di Maxwell, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} (\partial_j F_{hi}) F^{ij} &= \frac{1}{2} (\partial_j F_{hi}) F^{ij} + \frac{1}{2} (\partial_i F_{hj}) F^{ji} = \frac{1}{2} (\partial_j F_{hi}) F^{ij} - \frac{1}{2} (\partial_i F_{hj}) F^{ij} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_j F_{hi} - \partial_i F_{hj}) F^{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j F_{hi} + \partial_i F_{jh}) F^{ij} \\ &= -\frac{1}{2} (\partial_h F_{ij}) F^{ij} = -\frac{1}{4} \partial_h [F_{ij} F^{ij}]. \end{aligned}$$

Pertanto sarà

$$\begin{aligned} -\frac{4\pi}{c}F^k{}_{;j}{}^i &= \partial_j[F^k{}_i F^{ij}] + \frac{1}{4}\partial_h[g^{hk}F_{ij}F^{ij}] \\ &= \partial_h \left[F^k{}_i F^{ih} + \frac{1}{4}g^{hk}F_{ij}F^{ij} \right]. \end{aligned}$$

Poniamo ora

$$T^{hk} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{ih}F^k{}_i + \frac{1}{4}g^{hk}F_{ij}F^{ij} \right), \quad (5.8)$$

che si vede subito essere un tensore doppio simmetrico e viene detto *tensore energia-impulso* del campo elettromagnetico. Sostituendolo nell'espressione alla quale eravamo rimasti abbiamo:

$$\partial_h T^{hk} = \frac{1}{c}j_i F^{ik}. \quad (5.9)$$

Siamo pertanto riusciti a dedurre dalle equazioni di Maxwell in forma covariante un'equazione quadrivettoriale che, come vedremo in seguito, ci fornisce i bilanci dell'energia e dell'impulso spaziale. Esprimiamo ora le componenti del tensore energia-impulso mediante i campi elettrico e magnetico: per la componente T^{00} abbiamo

$$\begin{aligned} T^{00} &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{i0}F^0{}_i + \frac{1}{4}g^{00}F_{ij}F^{ji} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[E^2 + \frac{1}{4}2(H^2 - E^2) \right] \\ &= \frac{1}{8\pi} [2E^2 + H^2 - E^2] = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) \\ &= w, \end{aligned}$$

dove w è la densità di energia; per la componenti $T^{0\alpha}$ si ha

$$\begin{aligned} cT^{0\alpha} &= cT^{\alpha 0} = \frac{c}{4\pi} [F^{i0}F^\alpha{}_i] = -\frac{c}{4\pi} F^{\beta 0} F^{\alpha\beta} \\ &= \frac{c}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} E^\beta H^\gamma = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^\alpha \\ &= s^\alpha, \end{aligned}$$

dove \mathbf{s} è il vettore di Poynting. Abbiamo poi

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi} \left[F^{i\alpha}F^\beta{}_i + \frac{1}{4}g^{\alpha\beta}(F^i F_{ij}) \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[E^\alpha E^\beta + H^\alpha H^\beta - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(E^2 - H^2) \right], \end{aligned}$$

che viene detto *tensore degli sforzi di Maxwell*.

Cerchiamo ora di esplicitare il secondo membro dell'equazione (5.9) nel caso di un sistema di N cariche puntiformi. Abbiamo

$$\begin{aligned} j_i &= c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_{ri} \delta^4(x - x_r) \\ &= c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) u_{ri} ds_r, \end{aligned}$$

dove x_{ri} indica l' i -esima coordinata dell' r -esima particella e u_{ri} l' i -esima componente della velocità dell' r -esima particella; per cui abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} j_i(x) F^{ik}(x) &= F^{ik}(x) \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) u_{ri} ds_r \\ &= \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) u_{ri} F^{ik}(x_r) ds_r, \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio è reso possibile dalle proprietà di $\delta^4(x - x_r)$.

Ricordando l'equazione di Lorentz possiamo scrivere

$$u_{ri} F^{ik}(x_r) = -\frac{c}{e_r} \frac{dp_r^k}{ds_r},$$

e quindi

$$\frac{1}{c} j_i F^{ik} = -c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^k}{ds_r} ds_r.$$

Pertanto nel nostro caso l'equazione (5.9) si potrà porre nella forma seguente:

$$\partial_h T^{hk} + c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^k}{ds_r} ds_r = 0. \quad (5.10)$$

Questa equazione può essere poi riscritta in forma più elegante, dopo aver osservato che, mediante un'integrazione per parti, si ha

$$\int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{dr_r^k}{ds_r} ds_r = [\delta^4(x - x_r) p_r^k]_{a_r}^{b_r} - \int_{\gamma_r} p_r^k \frac{d}{ds_r} \delta^4(x - x_r) ds_r;$$

poichè si può considerare che gli estremi a_r e b_r della linea di universo γ_r siano a $t = \infty$, a causa di $\delta^4(x - x_r)$ il primo termine a secondo membro è nullo per ogni x finito. D'altra parte

$$\begin{aligned} p_r^k \frac{d}{ds_r} \delta^4(x - x_r) &= p_r^k \frac{\partial}{\partial x_r^h} \delta^4(x - x_r) \frac{dx_r^h}{ds_r} = -\frac{\partial}{\partial x_r^h} \delta^4(x - x_r) p_r^k u_r^h \\ &= -\partial_h \left[\delta^4(x - x_r) \frac{1}{m_r c} p_r^k p_r^h \right], \end{aligned}$$

e quindi, posto per l' r -esima particella

$$T_{(r)}^{hk} = \int_{\gamma_r} ds_r \delta^4(x - x_r) p_r^h \frac{1}{m_r} p_r^k,$$

abbiamo che la (5.9) è equivalente alla seguente equazione di continuità:

$$\partial_h \left[T^{hk} + \sum_{r=1}^N \tau_{(r)}^{hk} \right] = 0. \quad (5.11)$$

Per evidenziare il significato fisico di tale equazione, ricordiamo la (5.10) e sostituiamo al parametro ds_r il parametro dx_r^0 per ottenere

$$c \sum_{r=1}^N \int \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^k}{c dt} dx_r^0 = - \sum_{r=1}^N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \frac{dp_r^k}{dt},$$

e quindi possiamo scrivere la (5.10) nella forma

$$\partial_h T^{hk} + \sum_{r=1}^N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \frac{dp_r^k}{dt} = 0,$$

oppure nella forma

$$\partial_0 T^0 + \partial_\alpha T^{\alpha k} + \sum_{r=1}^N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \frac{dp_r^k}{dt} = 0.$$

Da questa equazione possiamo finalmente ottenere il bilancio del quadrimpulso integrandola su un certo volume Ω racchiuso dalla superficie chiusa Σ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} d^3 x T^{0k} + \sum_{r=1}^M \frac{dp_r^k}{dt} = - \int_{\Sigma} n_\alpha T^{\alpha k} d\Sigma, \quad (5.12)$$

dove M è il numero di particelle racchiuse nel volume V ed \mathbf{n} è la normale esterna di S . Per $k = 0$ otteniamo il bilancio energetico, mentre per $k = \beta$ otteniamo il bilancio dell'impulso spaziale.

L'equazione (5.12), però, non ha carattere quadrivettoriale in quanto in essa compare il volume Ω . Consideriamo allora il caso in cui Ω coincide con tutto lo spazio, per cui Σ può essere pensata all'infinito; è ragionevole supporre che le componenti del tensore energia-impulso siano nulle all'infinito e quindi, posto

$$P^k = \frac{1}{c} \int d^3 x T^{0k},$$

possiamo scrivere la seguente equazione

$$\frac{d}{dt} P^k + \frac{d}{dt} \sum_{r=1}^N p_r^k = 0,$$

cioè

$$P^k + \sum_{r=1}^N p_r^k = \text{cost}.$$

Abbiamo così ottenuto la *legge di conservazione del quadrimpulso totale del campo elettromagnetico e delle particelle*.

Concludiamo con un'osservazione sul calcolo che abbiamo svolto. Nell'ultima parte del nostro ragionamento abbiamo posto uguale a zero un integrale sulla superficie dello spazio all'infinito. Lo stato iniziale di un sistema fisico come il nostro è dato dalle coordinate, dagli impulsi iniziali delle particelle e dai campi iniziali. È allora logico pensare che inizialmente i campi siano diversi da zero solo in una regione finita dello spazio. Ma allora, poiché la velocità di propagazione delle interazioni è finita, per ogni tempo finito i campi saranno sempre nulli all'infinito e ciò giustifica i nostri calcoli.

5.3 Conservazione del momento angolare

Torniamo ancora all'equazione (5.9), che qui ricordiamo:

$$\partial_h T^{hk} = -\frac{1}{c} j_i F^{ki},$$

e che per il nostro sistema si può scrivere

$$R^k \equiv \partial_h T^{hk} + c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^k}{ds_r} ds_r = 0.$$

Ora cercheremo di ricavare da questa equazione un altro principio di conservazione, quello relativo al momento angolare. Dall'equazione precedente $R^k = 0$ si deduce immediatamente le seguente:

$$x^i R^k - x^k R^i = 0,$$

cioè

$$\begin{aligned} 0 = & x^i \partial_h T^{hk} - x^k \partial_h T^{hi} + x^i c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^k}{ds_r} ds_r - \\ & - x^k c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^i}{ds_r} ds_r. \end{aligned}$$

Valutiamo ora i singoli termini di questa equazione:

$$\begin{aligned} x^i \partial_h T^{hk} &= \partial_h [x^i T^{hk}] - T^{ik}, \\ x^k \partial_h T^{hi} &= \partial_h [x^k T^{hi}] - T^{ki}, \end{aligned}$$

e quindi

$$x^i \partial_h T^{hk} - x^k \partial_h T^{hi} = \partial_h [x^i T^{hk} - x^k T^{hi}].$$

Inoltre abbiamo

$$x^i \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^k}{ds_r} = x_r^i \frac{dp_r^k}{ds_r} \delta^4(x - x_r) = \delta^4(x - x_r) \left(\frac{d}{ds_r} [x_r^i p_r^k] - u_r^i u_r^k m_r c \right)$$

e, analogamente

$$x^k \delta^4(x - x_r) \frac{dp_r^i}{ds_r} = \delta^4(x - x_r) \left(\frac{d}{ds_r} [x_r^k p_r^i] - u_r^k u_r^i m_r c \right),$$

per cui

$$c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \left[x^i \frac{dp_r^k}{ds_r} - x^k \frac{dp_r^i}{ds_r} \right] ds_r = \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{d}{ds_r} [x_r^i p_r^k - x_r^k p_r^i] ds_r.$$

In definitiva, abbiamo:

$$\partial_h [x^i T^{hk} - x^k T^{hi}] + c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{d}{ds_r} [x_r^i p_r^k - x_r^k p_r^i] ds_r = 0.$$

Posto allora

$$\begin{aligned} M^{hik} &= x^i T^{hk} - x^k T^{hi}, \\ \mathcal{L}_r^{ik} &= x_r^i p_r^k - x_r^k p_r^i, \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$\partial_h M^{hik} + c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{d\mathcal{L}_r^{ik}}{ds_r} ds_r = 0.$$

L'esperienza acquisita discutendo la conservazione del quadrimpulso ci fa prevedere che anche in questo caso vi siano delle quantità conservate. Passando dal parametro ds_r a quello dx_r^0 , il secondo addendo diventa

$$\begin{aligned} c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^4(x - x_r) \frac{d\mathcal{L}_r^{ik}}{ds_r} ds_r &= c \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \delta(x^0 - x_r^0) \frac{d\mathcal{L}_r^{ik}}{c dt_r} dx_r^0 \\ &= \sum_{r=1}^N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \frac{d\mathcal{L}_r^{ik}}{dt}. \end{aligned}$$

Per cui, l'equazione diventa

$$\partial_0 M^{0ik} + \partial_\alpha M^{\alpha ik} + \sum_{r=1}^N \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \frac{d\mathcal{L}_r^{ik}}{dt} = 0.$$

Integrando allora su tutto lo spazio, con un ragionamento analogo a quello utilizzato per il quadrimpulso, otteniamo:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int M^{0ik} d^3x + \sum_{r=1}^N \frac{d\mathcal{L}_r^{ik}}{dt} = 0.$$

Posto ora

$$L^{ik} = \frac{1}{c} \int M^{0ik} d^3x,$$

otteniamo

$$\frac{d}{dt} L^{ik} + \frac{d}{dt} \sum_{r=1}^N \mathcal{L}_r^{ik} = 0,$$

cioè

$$L^{ik} + \sum_{r=1}^N \mathcal{L}_r^{ik} = \text{cost}. \quad (5.13)$$

Abbiamo allora sei quantità conservate. In totale, dall'equazione fondamentale $\partial_h T^{hk} = \frac{1}{c} j_i F^{ik}$, siamo riusciti a dedurre dieci principi di conservazione. Ora non resta che esaminare il significato fisico di queste ultime sei quantità conservate. È evidente che, ponendo $i = \alpha$ e $k = \beta$ otteniamo il *principio di conservazione della componente γ del momento angolare totale, cioè del campo e delle particelle*.

Più complicato è determinare il significato fisico delle tre quantità conservate corrispondenti ad $i = 0$ e $k = \alpha$, che chiameremo *spinta* o *boost*. In questo caso, tralasciando, per semplificare le cose, la parte dovuta al campo, otteniamo

$$\sum_{r=1}^N \mathcal{L}_r^{0\alpha} = \sum_{1=r}^N (x_r^0 p_r^\alpha - x_r^\alpha p_r^0) = \text{cost}.$$

Poniamoci ora in un sistema di riferimento in cui $x_r^0 = ct$. Otteniamo

$$ct \sum_{r=1}^N p_r^\alpha - \sum_{r=1}^N x_r^\alpha \frac{\mathcal{E}_r}{c} = cost;$$

per cui, posto

$$\mathcal{E} = \sum_{r=1}^N \mathcal{E}_r, \quad \mathbf{p} = \sum_{r=1}^N \mathbf{p}_r,$$

abbiamo

$$t \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}} = \frac{\sum_{r=1}^N \mathcal{E}_r \mathbf{x}_r}{\sum_{r=1}^N \mathcal{E}_r} = cost.$$

Osserviamo poi che il rapporto tra \mathbf{p} ed \mathcal{E}/c^2 ha le dimensioni di una velocità per cui, ponendo

$$\mathbf{v}_{CM} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{\mathcal{E}}, \quad \mathbf{x}_{CM} = \frac{\sum_{r=1}^N \mathcal{E}_r \mathbf{x}_r}{\sum_{r=1}^N \mathcal{E}_r},$$

ad indicare rispettivamente la velocità e la posizione del baricentro, otteniamo:

$$\mathbf{x}_{CM} = \mathbf{v}_{CM} t + cost, \tag{5.14}$$

che esprime il *teorema del baricentro*.

Osserviamo che per velocità piccole rispetto a quella della luce, quando le energie \mathcal{E}_r tendono ad mc^2 , otteniamo l'usuale definizione di baricentro. Notiamo poi che le componenti di \mathbf{x}_{CM} non costituiscono le componenti di un quadrivettore e non si trasformano come le coordinate di un punto per trasformazioni di Poincaré. In altri termini, il baricentro di un sistema di particelle è rappresentato da punti diversi in diversi sistemi di riferimento.

In definitiva, dalle leggi dell'elettromagnetismo siamo riusciti ad estrarre dieci quantità conservate. Ma il numero di parametri che caratterizzano una trasformazione di Poincaré è proprio dieci: in un prossimo capitolo vedremo quale legame c'è tra questi due fatti.

Capitolo 6

Elementi di teoria dei campi

6.1 L'azione e il principio di minima azione

In questa parte del corso cercheremo di ottenere nuovamente le equazioni del moto, e cioè le equazioni di Lorentz e di Maxwell, e le leggi di conservazione per un sistema relativistico di particelle puntiformi cariche e di campi elettromagnetici, utilizzando però i metodi lagrangiani.

L'approccio lagrangiano o hamiltoniano, come si sa si passa da uno all'altro mediante una trasformata di Legendre, è vantaggioso per almeno due motivi. Innanzitutto per la sua eleganza formale e l'economia di pensiero che realizza: in questi formalismi, infatti, un sistema fisico è completamente individuato dal punto di vista dinamico dando un'unica funzione delle variabili dinamiche del sistema, detta *lagrangiana* o *hamiltoniana* a seconda dell'ambito nel quale ci si trova. Equivalentemente, si può dire che l'azione che si ottiene dalla lagrangiana o dall'hamiltoniana è un funzionale delle variabili dinamiche del sistema. Data l'azione, si possono poi ottenere le equazioni del moto mediante il principio di minima azione e i teoremi di conservazione mediante il teorema di Noether. Considerazioni di carattere generale limitano drasticamente la forma dell'azione e spesso permettono di individuarla completamente. Ciò è tanto più vero per i sistemi relativistici isolati: essi infatti devono soddisfare il principio di relatività di Einstein, cioè le loro equazioni del moto devono esse covarianti a vista. Vedremo che equazioni del moto covarianti a vista si ottengono automaticamente se l'azione è un invariante relativistico, cioè un quadriscalare.

Noi dunque richiederemo che per i sistemi fisici che incontreremo l'azione sia uno scalare. Ciò non basterà a determinare univocamente l'azione, ma ci guiderà nella scelta di essa e, con l'aggiunta di ulteriori requisiti di carattere generale, ci permetterà di ottenerla in modo euristico. Va anche detto che per un sistema relativistico l'approccio lagrangiano è preferibile a quello hamiltoniano perché l'azione è uno scalare, mentre l'hamiltoniano no. Il secondo vantaggio dello schema lagrangiano o hamiltoniano è che esso ci permette di capire una profonda connessione esistente tra i principi di simmetria e le leggi di conservazione.

Nel precedente capitolo abbiamo visto come dalle equazioni dell'elettromagnetismo, quelle di Maxwell e di Lorentz, sia possibile dedurre dieci principi di conservazione. Ricordiamo poi che anche le trasformazioni del gruppo di Poincaré sono caratterizzate da dieci parametri indipendenti. Questo fatto non è casuale: ai *quattro* parametri che descrivono le *traslazioni* nello

spazio e nel tempo corrispondono le quattro quantità che caratterizzano il *quadrimpulso totale*. Ai sei parametri che caratterizzano le *rotazioni* dello spazio quadridimensionale pseudoeuclideo corrispondono le sei quantità che caratterizzano il tensore antisimmetrico del *momento angolare totale*. C'è dunque una profonda connessione tra i principi di simmetria e le leggi di conservazione. È difficile dare una spiegazione intuitiva di ciò ma, come vedremo tra breve, la connessione diviene evidente se il sistema viene descritto da un hamiltoniano o da un lagrangiano.

Prima di concludere questa introduzione, consideriamo un altro punto importante. Abbiamo già detto che in relatività non esistono corpi rigidi ma solo particelle puntiformi e campi. Osserviamo ora che le componenti g^i della quadriforza che agisce su una particella puntiforme non possono dipendere, nell'ambito della teoria della relatività, dalla distanza tra la particella e le altre con cui interagisce (*azione a distanza*) perché le interazioni non possono propagarsi a velocità infinita. La quadriforza deve invece dipendere dal valore di un campo creato dalle altre particelle nel punto dello spazio-tempo in cui si trova la particella in esame (*azione a contatto*). In fisica non relativistica il concetto di campo è utile, in relatività è essenziale. In relatività i campi sono delle variabili dinamiche come le coordinate delle particelle puntiformi, e un sistema fisico relativistico (ad eccezione del caso banale delle particelle libere) è sempre descritto, non da una lagrangiana ad un numero finito di gradi di libertà, ma da una teoria lagrangiana di campo, eventualmente in interazione con un sistema lagrangiano ad N gradi di libertà.

Come vedremo, le teorie lagrangiane di campo corrispondono a sistemi lagrangiani con infiniti gradi di libertà. Premettiamo poi che le teorie lagrangiane di campo sono particolarmente adatte ad essere descritte in un formalismo covariante a vista.

Nel trattare i sistemi costituiti da cariche puntiformi e campi elettromagnetici, procederemo dapprima determinando l'espressione dell'azione, poi determinando le equazioni del moto e infine, utilizzando il teorema di Noether, determinando le quantità conservate. Tuttavia, prima di sviluppare tale programma, faremo una premessa per ricordare in che cosa consiste il principio di minima azione, sia per un sistema lagrangiano ad N gradi di libertà che per un sistema lagrangiano di campi.

6.1.1 Sistemi conservativi ad N gradi di libertà

Consideriamo ora un sistema fisico ad N gradi di libertà: il suo stato dinamico sarà descritto in funzione del tempo dalle $2N$ quantità $q_r(t), \dot{q}_r(t)$, con $r = 1, \dots, N$. Supponiamo che il sistema sia individuato da una certa funzione $L(q_r, \dot{q}_r)$ (eventualmente indipendente dal tempo), detta *lagrangiana*, nel senso che i moti dinamicamente possibili per esso siano quelli soddisfacenti alle seguenti equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \dots, N. \quad (6.1)$$

Consideriamo ora due diverse configurazioni assunte dal sistema negli istanti t_1 e t_2 :

$$q_{r1} = q_r(t_1), \quad q_{r2} = q_r(t_2).$$

Una qualsiasi N -pla di funzioni $q_r(t)$ soddisfacenti queste condizioni agli estremi rappresenta un moto cinematicamente possibile per il sistema nell'intervallo (t_1, t_2) e individua una traiettoria di

estremi $q_r(t_1)$ e $q_r(t_2)$ nello spazio delle configurazioni ad N dimensioni. Nelle nostre trattazioni supporremo poi che le traiettorie siano dotate di sufficienti proprietà di regolarità da consentire tutte le operazioni che effettueremo.

Se consideriamo il seguente funzionale della traiettoria che viene detto *azione*:

$$I[q_r] = \int_{t_1}^{t_2} L[q_r(t), \dot{q}_r(t)] dt. \quad (6.2)$$

allora vale il seguente *principio di minima azione* (o di Hamilton o variazionale):

Teorema 6.1 (principio di minima azione). *Tra tutte la traiettorie possibili e sincrone soddisfacenti delle condizioni agli estremi date, quella effettivamente realizzata è quella che rende minima (o almeno stazionaria) l'azione.*

In altre parole, posto $q'_r(t) = q_r(t) + \delta q_r(t)$, con $\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0$, si deve avere

$$\delta I = I[q'_r] - I[q_r] = 0.$$

È immediato mostrare l'equivalenza tra le equazioni di Lagrange e il principio di minima azione, infatti

$$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = 0,$$

dove

$$\delta L = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \frac{d}{dt} \delta q_r \right) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_r} \delta q_r + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right] - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right);$$

per cui abbiamo

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_{r=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial q_r} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) \delta q_r + \left[\sum_{r=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \delta q_r \right]_{t_1}^{t_2},$$

ed essendo $\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0$, l'ultimo termine a secondo membro è nullo e quindi

$$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0, \quad r = 1, \dots, N.$$

Osserviamo che nel supporre $t = 0$ e nello scambiare il segno di variazione con quello di integrale, abbiamo tenuto presente che il principio da noi enunciato si riferisce a variazioni che rispettano gli estremi e sincrone nello stesso tempo.

Notiamo poi che nel principio di minima azione non è essenziale che il parametro rispetto al quale si integra per ottenere l'azione e rispetto al quale si fanno le variazioni sincrone sia il tempo, si può infatti utilizzare una qualsiasi funzione monotona di t .

6.1.2 Il principio di minima azione per i campi

Il principio di minima azione si può estendere ad un sistema di campi, pensando un campo come un sistema continuo ad infiniti gradi di libertà:

$$\phi_r(\mathbf{x}, t) = \phi_{r,\mathbf{x}}(t), \quad r = 1, \dots, N;$$

i campi si presentano allora come dei sistemi ad $N \cdot \infty^3$ gradi di libertà.

Per i sistemi relativistici è in pratica indispensabile, come abbiamo visto, che le interazioni siano azioni a contatto, ed è per questo motivo che richiederemo che la lagrangiana sia una funzione locale dei campi. Ciò significa che dovrà dipendere dai prodotti dei campi e delle loro derivate spazio-temporali di ordine finito presi nello stesso punto dello spazio-tempo. Quindi, utilizzando la notazione covariante

$$\partial_i \equiv \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

la lagrangiana L potrà essere pensata come un integrale su tutto lo spazio tridimensionale della funzione

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_r(\mathbf{x}, t), \partial_i \phi_r(\mathbf{x}, t)),$$

detta *densità di lagrangiana*; avremo allora

$$L = \int \mathcal{L} d^3x.$$

L'azione pertanto assumerà la forma

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int \mathcal{L}(\phi_r(\mathbf{x}, t), \partial_i \phi_r(\mathbf{x}, t)) d^4x, \quad (6.3)$$

e in tal modo potremo estendere anche ai campi il principio di minima azione considerando, al posto delle traiettorie ad estremi fissi $q_r(t)$, i campi $\phi_r(\mathbf{x}, t)$ a estremi fissi. Analogamente a quanto visto nel caso di N gradi di libertà, dal principio di minima azione per i campi possiamo dedurre le seguenti le seguenti *equazioni di Eulero-Lagrange*:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r(x)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r(x))} = 0. \quad (6.4)$$

Dimostriamo che queste sono proprio il corrispondente per i campi delle equazioni di Lagrange per un sistema ad N gradi di libertà: la variazione dell'azione (6.3) è

$$\delta I = \frac{1}{c} \delta \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int \mathcal{L} d^4x = \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int \delta \mathcal{L} d^4x,$$

dove

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \delta (\partial_i \phi_r) \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \partial_i \delta \phi_r \\ &= \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \right) \delta \phi_r + \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \delta \phi_r \right]. \end{aligned} \quad (6.5)$$

allora possiamo scrivere

$$\delta I = \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \right) \delta \phi_r d^4 x + \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int \partial_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \delta \phi \right] d^4 x. \quad (6.6)$$

A questo punto non è difficile dimostrare che il secondo addendo è identicamente nullo. Per il teorema di Gauss a quattro dimensioni, infatti, l'integrale che vi compare non è altro che l'integrale del quadrivettore $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j \phi_r)} \delta \phi_r$ esteso all'ipersuperficie delimitata dai due iperpiani di equazione $x^0 = ct_1$ e $x^0 = ct_2$. Per il tipo di variazione da noi considerata, però, sui due iperpiani risulta $\delta \phi_r = 0$. Inoltre all'infinito spaziale i campi sono nulli.

In definitiva, abbiamo

$$\delta I = \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r)} \right] \delta \phi_r d^4 x. \quad (6.7)$$

Pertanto, per l'arbitrarietà di $\delta \phi_r$ tra i due iperpiani, la condizione $\delta I = 0$ per ogni variazione nulla agli estremi risulta equivalente alla seguente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r(x)} - \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi_r(x))} = 0,$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Notiamo che se i campi ϕ_r hanno proprietà di covarianza ben definite (cioè sono o campi scalari o campi quadrivettoriali, ecc) e I (cioè \mathcal{L}) è uno scalare, allora le equazioni di Eulero-Lagrange sono covarianti a vista.

È necessario a questo punto una precisazione a proposito della notazione usata nell'espressione (6.3) dell'azione. Infatti, assunta scalare la densità della lagrangiana \mathcal{L} , questa notazione può creare dubbi sul carattere scalare dell'azione in quanto l'integrazione è estesa a tutto lo spazio per le variabili spaziali e solo all'intervallo (ct_1, ct_2) per quella temporale. In effetti, tale notazione è imprecisa ma è facile ovviare tale inconveniente.

Diamo ora a seguente definizione:

Definizione 6.1. *Un'ipersuperficie tridimensionale Σ dello spazio-tempo quadridimensionale si dice di tipo spazio se l'intervallo tra ogni coppia di punti di Σ è sempre di tipo spazio.*

Come nel caso dell'intervallo, è chiaro che il carattere di tipo spazio di un'ipersuperficie non dipende dal sistema inerziale di riferimento.

La condizione $x_0 = ct_1$ e $x_0 = ct_2$ individua due iperpiani di tipo spazio Σ_1 e Σ_2 . Infatti, dati due punti x^i e y^i su uno di essi, risulta sempre

$$(x^i - y^i)(x_i - y_i) = -|x - y|^2 < 0.$$

In seguito a trasformazioni di Lorentz gli iperpiani Σ_1 e Σ_2 non saranno più, in generale, iperpiani del tipo $x_0 = cost$, ma resteranno pur sempre iperpiani di tipo spazio. Si ottiene allora una notazione più precisa operando nella (6.3) la sostituzione $\int_{t_1}^{t_2} \mapsto \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}$, per cui l'azione diventa

$$I = \frac{1}{c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_i \phi_r(x)),$$

che chiaramente è uno scalare.

Cerchiamo ora di precisare meglio l'argomento svolto prima dell'equazione (6.7), che ci ha permesso di trascurare l'ultimo termine nella (6.6). Il teorema di Gauss in quattro dimensioni ci dice che, se R è un campo quadrivettoriale, allora

$$\int_{\Omega} d^4x \partial_i R^i = \int_{\Sigma} d\Sigma n_i R^i,$$

dove Σ è l'ipersuperficie tridimensionale che racchiude l'ipervolume Ω , $d\Sigma$ è l'elemento di superficie e n_i sono le componenti della normale esterna all'ipersuperficie Σ . Se Σ è costituita dai due iperpiani Σ_1 e Σ_2 , risulta

$$\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \partial_i R^i = \int_{\Sigma_2} d\Sigma n_{2i} R^i - \int_{\Sigma_1} d\Sigma n_{1i} R^i, \quad (6.8)$$

dove n_{2i} e n_{1i} indicano le componenti delle normali esterne rispettivamente di Σ_1 e di Σ_2 . Nello scrivere questa equazione si è trascurato il contributo dell'ipersuperficie posta all'infinito spaziale compresa tra i due iperpiani Σ_1 e Σ_2 , assumendo che $n_i R^i$ si annulli all'infinito spaziale. Nella (6.7) e nelle applicazioni che faremo tale ipotesi è assunta valida. Per l'iperpiano $x_0 = cost$, $d\Sigma = d^3x$ e $n_i = (1, 0, 0, 0)$ la (6.8) diventa

$$\int_{t_1}^{t_2} d^4x \partial_i R^i = \int_{t_2} d^3x R^0(\mathbf{x}, t_2) - \int_{t_1} d^3x R^0(\mathbf{x}, t).$$

Un'altra osservazione interessante è la seguente: ai fini della determinazione delle equazioni di Eulero-Lagrange, la densità di lagrangiana \mathcal{L} non è univocamente determinata, nel senso che se al posto di \mathcal{L} si prende

$$\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \partial_i \mathcal{K}^i(\phi_r, \partial_j \phi_r),$$

si ottengono le stesse equazioni di Eulero-Lagrange. Infatti risulta

$$\hat{I} = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \hat{\mathcal{L}} = I + \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \partial_i \mathcal{K}^i,$$

cioè

$$\hat{I} = I + \int_{\Sigma_2} d\Sigma n_{2i} \mathcal{K}^i - \int_{\Sigma_1} d\Sigma n_{1i} \mathcal{K}^i,$$

dove nell'ultimo passaggio si è applicato il teorema di Gauss.

Ora, nella variazione degli ultimi due termini a secondo membro della (6.6) intervengono solo le variazioni dei campi sul contorno ma, allo stesso tempo, nel principio di minima azione queste sono nulle. Dunque da I e da \hat{I} si ottengono le stesse equazioni del moto.

6.2 Metodo dell'azione per una particella libera

Vediamo ora con un esempio concreto come la richiesta che l'azione sia un invariante relativistico ci permetta di individuarla in modo euristico. Quindi, applicando il principio di minima azione, dedurremo da questa le equazioni del moto. Infine, con il teorema di Noether, metteremo

in luce il legame tra le simmetrie e le leggi di conservazione. L'esempio in questione è quello più semplice possibile, quello di una *particella libera*.

Sappiamo già a quali risultati dovremo arrivare:

$$\frac{dp^i}{dt} = 0, \quad p^i = \text{cost}, \quad x^i p^j - p^j x^i = \text{cost},$$

concentriamoci allora su come raggiungerli. Considerata una particella libera e stabilito di indicare con $x^i = x^i(z)$ la sua linea di universo $\Gamma_{a,b}$ nell'arbitrario parametro z , cerchiamo di determinarne l'azione imponendo che questa sia un funzionale della traiettoria e inoltre uno scalare.

Per aiutarci, ricordiamo che l'azione si deve poter mettere nella forma

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

A partire dalle coordinate della particella siamo in grado di costruire solo lo scalare ds^2 . D'altra parte, come si vede dall'espressione precedente, l'azione è l'integrale di una quantità infinitesima del primo ordine in dt . Ciò ci suggerisce di provare per l'azione di una particella libera un'espressione del tipo

$$I = \alpha \int_{\Gamma_{a,b}} ds, \quad (6.9)$$

dove α è una costante da determinarsi.

Postuliamo allora che l'azione di una particella libera abbia l'espressione (6.9) e cerchiamo di determinare α . A tale scopo sfruttiamo il *principio di corrispondenza*: cioè per velocità piccole rispetto a c , i risultati relativistici devono essere approssimati da quelli non relativistici. Ricordiamo allora l'espressione non relativistica dell'azione:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2} v^2 dt + I_0,$$

dove I_0 è una costante. Ricordiamo poi che per $v/c \rightarrow 0$, possiamo scrivere lo sviluppo asintotico

$$ds = \gamma c dt \simeq \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots\right) c dt.$$

Per cui, per $v/c \rightarrow 0$, avremo

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_{a,b}} \alpha \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) c dt = \int_{\Gamma_{a,b}} \left(\alpha c - \frac{\alpha v^2}{2c}\right) dt \\ &= - \int_{\Gamma_{a,b}} \frac{\alpha}{2c} v^2 dt + \int_{\Gamma_{a,b}} \alpha c dt. \end{aligned}$$

Il secondo termine non contribuisce al principio di minima azione perchè non dipende dalle variabili dinamiche. Affinchè vi sia una corrispondenza tra le due espressioni bisognerà porre $\alpha = -mc$ per cui, l'espressione corretta dell'azione è

$$I = -mc \int_{\Gamma_{a,b}} ds. \quad (6.10)$$

Il metodo variazionale consente di ottenere dall'integrale dell'azione (la cui esistenza è stata postulata) non solo le equazioni del moto in forma covariante a vista, ma anche di individuare un insieme di costanti del moto la cui esistenza è conseguenza, come dimostreremo, delle proprietà di invarianza della teoria.

Nello spazio della quaterna di numeri reali (x^0, x^1, x^2, x^3) denotiamo con Γ_{ab} una varietà unidimensionale, detta *linea di universo*, che connette i punti $a = (a^0, a^1, a^2, a^3)$ e $b = (b^0, b^1, b^2, b^3)$ ed è dotata di sufficienti proprietà di regolarità da consentire le operazioni che faremo. L'azione è poi un funzionale di tale linea di universo $I = I[\Gamma_{ab}]$ e una sua variazione può essere definita come

$$\delta I[\hat{\Gamma}_{ab}] = I[\hat{\Gamma}_{ab}] - I[\Gamma_{ab}], \quad (6.11)$$

dove $\hat{\Gamma}_{ab}$ è una linea di universo che differisce da Γ_{ab} o perchè è cambiata la linea che connette i punti $a = \hat{a}$ e $b = \hat{b}$, oppure perchè sono cambiati anche gli estremi a e b .

Siano $x^i = x^i(z)$ e $\hat{x}^i = \hat{x}^i(z)$, con $0 \leq z = z(s) \leq 1$ monotona crescente nel parametro d'arco s , le equazioni parametriche di Γ_{ab} e di $\hat{\Gamma}_{ab}$. Per cominciare calcoleremo la variazione dell'azione in corrispondenza di una generica variazione della linea di universo, preoccupandoci solo degli aspetti analitici del problema. Successivamente, particolarizzando opportunamente la scelta della variazioni e da una loro coerente interpretazione fisica, deriveremo i risultati che abbiamo anticipato. Poniamo ora

$$\delta x^i(z) = \hat{x}^i(z) - x^i(z), \quad (6.12)$$

in modo che

$$\delta \frac{x^i(z)}{dz} = \frac{d\hat{x}^i(z)}{dz} - \frac{dx^i(z)}{dz} = \frac{d}{dx} \delta x^i(z), \quad (6.13)$$

e calcoliamo S come funzionale di δx^i , pensando δx^i come un infinitesimo e trascurando le potenze di ordine superiore al primo. Da $ds = \sqrt{dx^i dx_i}$ segue che

$$I[\Gamma_{ab}] = -mc \int_0^1 dz \sqrt{\frac{dx^i(z)}{dz} \frac{dx_i(z)}{dz}}, \quad (6.14)$$

ed un'analogha espressione per $I[\hat{\Gamma}_{ab}]$. Quindi, in base alla (6.11), otteniamo:

$$\delta I = -mc \int_0^1 dz \delta \left(\frac{dx^i}{dz} \frac{dx_i}{dz} \right)^{\frac{1}{2}} = -mc \int_0^1 dz \left(\frac{dx^i}{dz} \frac{dx_i}{dz} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx^j}{dz} \delta \frac{dx_j}{dz};$$

da cui, utilizzando la (6.13) e da una successiva integrazione per parti segue:

$$\delta I[\Gamma_{ab}] = -mc \left[\left(\frac{dx^i}{dz} \frac{dx_i}{dz} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx^j}{dz} \delta x_j \right]_0^1 + mc \int_0^1 dz \frac{d}{dz} \left[\left(\frac{dx^i}{dz} \frac{dx_i}{dz} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx^j}{dz} \right] \delta x_j.$$

Tornando quindi alla parametrizzazione canonica, si ottiene:

$$\delta I[\Gamma_{ab}] = -mc [u^j dx_j]_a^b + mc \int_{\Gamma_{ab}} \frac{du^j}{ds} dx_j ds. \quad (6.15)$$

6.2.1 Derivazione delle equazioni del moto

Mettiamoci ora dal punto di vista di un osservatore O_K arbitrario ma fissato e solidale con il sistema di riferimento inerziale K ; consideriamo poi tutte le possibili linee di universo (con tutte le proprietà di regolarità necessarie) che uniscono due punti fissi a e b . Nello spazio tridimensionale ordinario ciò significa fissare i punti iniziale e finale della traiettoria e gli istanti in cui la particella vi si trova e, compatibilmente con queste condizioni, considerare tutte le possibili traiettorie ed equazioni orarie.

Abbiamo visto che la linea di universo fisica si ottiene in corrispondenza ad un minimo di $I[\Gamma_{ab}]$, e quindi per $[\delta x^i]_a = [\delta x^i]_b = 0$ e per $\delta I[\Gamma_{ab}] = 0$. Il primo addendo della (6.15) è allora nullo e affinché risulti $\delta I = 0$ per qualunque scelta di δx^i compatibile con i vincoli di regolarità, dovrà essere

$$\frac{du^j}{ds} = 0. \quad (6.16)$$

6.2.2 Le costanti del moto

Consideriamo ora il moto effettivo di una particella fra due punti fissi assegnati: sappiamo allora che $\frac{du^i}{ds} = 0$. Siano Γ_{ab} e $\Gamma_{\hat{a}\hat{b}}$ le linee di universo viste rispettivamente da due osservatori inerziali O_K e \hat{O}_K . Abbiamo

$$\hat{x}^i(z) = \Lambda^i_j x^j(z) + a^i, \quad (6.17)$$

dove Λ è la matrice di una trasformazione di Lorentz infinitesima e gli a^i sono quattro parametri indipendenti che caratterizzano una traslazione infinitesima.

Come sappiamo dal primo capitolo, i sedici elementi della matrice Λ non sono indipendenti, in quanto tale matrice deve soddisfare la relazione $\Lambda^T G \Lambda = G$. Come vedremo più avanti, essi sono esprimibili in termini di solo sei parametri indipendenti w^{ij} tali che $w^{ij} = -w^{ji}$. La trasformazione (6.17) dipende allora da 4+6 parametri infinitesimi indipendenti e, a meno di infinitesimi di ordine superiore abbiamo

$$\delta x^i = w^i_j x^j + a^i. \quad (6.18)$$

L'integrale di azione I è stato costruito in modo da essere invariante per trasformazioni di Poincaré, per cui $\delta I = 0$. Inserendo allora le equazioni (6.16) e (6.18) nell'equazione (6.15) si trova:

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= [m c u^i (w^i_j x^j + a^i)]_a^b \\ &= m c \left[\sum_{i < j} (u^i x^j - w^j x^i) w_{ij} + u^i a_i \right]_a^b \end{aligned} \quad (6.19)$$

Posto ora

$$p^i = m c u^i, \quad (6.20)$$

$$M^{ij} = x^i p^j - p^i x^j, \quad (6.21)$$

per l'arbitrarietà dei parametri w^{ij} (per $i < j$) e degli a^i , dall'equazione (6.19) segue che i valori del quadrimpulso p^i e del momento angolare M^{ij} nel punto a della linea di universo sono rispettivamente uguali ai valori che le stesse quantità assumono nel punto b della linea di universo. La conclusione è indipendente dalla scelta dei punti a e b .

Se ne deduce allora che, in corrispondenza ad ognuno dei parametri indipendenti che caratterizzano le trasformazioni infinitesime del gruppo di simmetria della teoria, esiste una costante del moto, che per questo motivo sarà detta *generatrice della trasformazione infinitesima* stessa. Se si pensa di tenere fisso un solo punto, allora le trasformazioni infinitesime del gruppo di simmetria generano le traiettorie fisicamente possibili. Ogni traiettoria indipendente corrisponde poi ad una costante del moto.

La validità della conclusione trascende i limiti della relatività ristretta: si ottiene un risultato analogo sia in teorie classiche, sia in teorie quantistiche, sia per sistemi ad infiniti gradi di libertà come i campi. La conclusione conferma poi che la scelta di p^i e di M^{ij} come generalizzazioni relativistiche dell'energia-impulso e del momento angolare è la scelta corretta.

Mostriamo allora che per una trasformazione di Lorentz infinitesima si ha

$$\delta x^i = w^i_j x^j \quad (6.22)$$

e che $w_{ij} = g_{ik} w^k_j$ è una matrice antisimmetrica:

$$w_{ij} = -w_{ji}. \quad (6.23)$$

Per una trasformazione di Lorentz infinitesima molto prossima alla trasformazione identica $\Lambda = \mathcal{I}$, si può scrivere

$$\Lambda^i_j = \delta^i_j + w^i_j, \quad (6.24)$$

con le w^i_j quantità infinitesime; in forma matriciale essa diventa poi $\Lambda = \mathcal{I} + w$. Dal fatto che $\Lambda^T G \Lambda = G$ segue che, trascurando termini infinitesimi di ordine superiore al primo nelle w , si ottiene

$$0 = (\mathcal{I} + w^T)G(\mathcal{I} + w) - G \simeq G + w^T G + Gw - G,$$

e quindi $w_i^k g_{kj} + g_{ik} w_j^k = 0$, da cui la relazione (6.23).

6.3 Principi di conservazione

Dalla (6.5) risulta che per n campi $\phi_r(x)$, soddisfacenti alle equazioni di Eulero-Lagrange, la variazione della densità di lagrangiana dovuta alle variazioni $\delta\phi_r$ dei campi è data da

$$\delta\mathcal{L} = \partial_i \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi_r)} \delta\phi_r \right]. \quad (6.25)$$

Se la densità di lagrangiana è invariante rispetto ad un certo gruppo di trasformazioni che producono delle variazioni $\delta\phi_r$ delle funzioni di campo, allora, dovendo essere $\delta\mathcal{L} = 0$ si ha che

$$\partial_i j^i = 0,$$

dove

$$j^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \phi_r)} \delta \phi_r$$

è un quadrivettore di divergenza nulla.

Considerando quindi delle particolari variazioni φ_r dalla (6.25) si possono ottenere delle leggi di conservazione.

6.3.1 Conservazione dell'energia e della quantità di moto

Consideriamo il caso di un solo campo scalare scarico $\phi(x)$ i cui \mathcal{L} non dipende esplicitamente dalle coordinate spazio-temporali. Supponiamo dapprima che la variazione $\delta\phi$ sia prodotta dalla trasformazione infinitesima

$$x' = x + da .$$

La funzione di campo diviene quindi

$$\phi'(x') = \phi(x + da) = \phi(x) + \delta\phi(x)$$

per cui, al primo ordine in da , si ottiene

$$\delta\phi(x) = \phi'(x') - \phi(x) = \partial_i \phi(x) da^i + O(da^i da_i) .$$

Allo stesso modo la variazione di \mathcal{L} sarà

$$\delta\mathcal{L} = \mathcal{L}'(\phi(x'), \partial_k \phi(x')) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_k \phi(x)) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} da^i = \partial_i \mathcal{L} da^i .$$

Sostituendo questi due ultimi risultati nell'equazione $\delta\mathcal{L} = \partial_j \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi)} \delta\phi \right]$ (equazione (6.25)) si ottiene:

$$\left(\partial_i \mathcal{L} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi)} \partial_i \phi \right) da^i = 0$$

che, per l'arbitrarietà dei da^i , implica

$$\partial_i \mathcal{L} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi)} \partial_i \phi = 0$$

e quindi, posto

$$T_{ij} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_j \phi)} \partial_i \phi - \delta_{ij} \mathcal{L} , \quad (6.26)$$

che rappresenta la scrittura in forma canonica del tensore energia impulso, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial x^j} T_{ij} = 0 , \quad (6.27)$$

che rappresenta la legge di conservazione di questo tensore.

Integrando ora questa equazione su un volume Ω sufficientemente grande dello spazio ordinario si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{\Omega} T_{j0} d^3x - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int_{\Omega} T_{j\alpha} d^3x = 0 .$$

Se $T_{j\alpha}$ tende a zero a grandi distanze, il secondo termine si annulla in quanto, usando il teorema di Gauss, è possibile trasformarlo in un integrale sulla superficie che racchiude il volume Ω . Per cui si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \int_{\Omega} T_{j0} d^3x = 0;$$

cioè

$$\frac{\partial p_j}{\partial t} = 0, \quad p_j = \int T_{j0} d^3x.$$

Si sono allora trovate quattro costanti del moto; la componente temporale del quadrivettore p_j è

$$p_0 = \int T_{00} d^3x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial_0\phi - \mathcal{L} \right) d^3x = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \right) d^3x = \int \mathcal{H} d^3x = H,$$

che rappresenta allora l'hamiltoniana del campo e dove \mathcal{H} è la densità di hamiltoniana, per cui $\frac{\partial p_0}{\partial t} = 0$ rappresenta la conservazione dell'energia. Per le componenti spaziali abbiamo:

$$p_\alpha = \int T_{\alpha 0} d^3x = \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} \partial_\alpha\phi d^3x = \frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} d^3x,$$

che si identificano con le tre componenti della quantità di moto del campo. Le componenti T_{j0} del tensore rappresentano allora la *densità di energia-impulso*.

6.3.2 Conservazione del momento angolare

Per analogia, la naturale definizione della *densità di momento angolare* del campo rispetto all'origine è data da

$$m_{\alpha\beta 0} = x_\alpha T_{\beta 0} - x_\beta T_{\alpha 0}, \quad (6.28)$$

per cui le componenti del momento angolare orbitale sono

$$M_{\alpha\beta} = \int m_{\alpha\beta 0} d^3x.$$

Queste sono le componenti spaziali del *tensore momento angolare*

$$M_{ij} = \int m_{ij0} d^3x = \int (x_i T_{j0} - x_j T_{i0}) d^3x, \quad (6.29)$$

la cui conservazione può essere ricavata dalla (6.27). Infatti, derivando m_{ijk} si ottiene:

$$\begin{aligned} \partial^k m_{ijk} &= \partial^k [x_i T_{jk} - x_j T_{ik}] = \partial^k x_i T_{jk} + x_i \partial^k T_{jk} - \partial^k x_j T_{ik} - x_j \partial^k T_{ik} \\ &= \delta_i^k T_{jk} + x_i \partial^k T_{jk} - \delta_j^k T_{ik} - x_j \partial^k T_{ik} = T_{ij} - T_{ji} = 0. \end{aligned}$$

Poichè T_{ij} è un tensore doppio simmetrico, allora

$$\partial^k m_{ijk} = 0.$$

In generale questa simmetria non è una diretta conseguenza della definizione (6.26). Essa infatti è dovuta al fatto che è sempre possibile aggiungere alla densità di lagrangiana una quadridivergenza senza alterare i contenuti fisici della teoria, cioè tale fatto rende sempre possibile simmetrizzare T_{ij} . Quindi, in generale, sebbene le densità di energia, di impulso e di momento angolare non siano quantità completamente definite, lo sono l'energia totale, la quantità di moto totale e il momento angolare totale.

6.3.3 Conservazione della corrente

Consideriamo un campo scalare scarico definito dalle due funzioni di campo reali $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$, oppure dalla funzione complessa $\phi(x) = \phi_1(x) + i\phi_2(x)$. Poiché \mathcal{L} è una funzione reale, in essa devono comparire solo le combinazioni di $\phi^*(x)\phi(x)$, con $\phi^*(x) = \phi_1(x) - i\phi_2(x)$, e di $\partial^i\phi^*(x)\partial_i\phi(x)$. Quindi \mathcal{L} deve essere invariante rispetto alla *trasformazione di gauge globale*

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= e^{i\varepsilon e}\phi(x) = (1 + i\varepsilon e)\phi(x) \\ \phi'^*(x) &= e^{-i\varepsilon e}\phi^*(x) = (1 - i\varepsilon e)\phi^*(x) \end{aligned} \quad ,$$

dove ε è una costante infinitesima. Da queste equazioni, calcolandone le variazioni

$$\begin{aligned}\delta\phi &= \phi' - \phi = i\varepsilon e\phi \\ \delta\phi^* &= \phi'^* - \phi^* = -i\varepsilon e\phi^*\end{aligned}$$

e sostituendole nella (6.25) si ottiene:

$$\delta\mathcal{L} = i\varepsilon e\partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi^*)}\phi^* \right) = 0,$$

e più precisamente $\partial_i j^i = 0$, dove

$$j^i = ie \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi)}\phi - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i\phi^*)}\phi^* \right) \quad (6.30)$$

rappresenta la *densità di corrente conservata*.

6.4 Metodo dell'azione per N cariche interagenti con un campo elettromagnetico

6.4.1 L'azione per N cariche interagenti con un campo elettromagnetico

Consideriamo ora il caso di un sistema di N particelle cariche interagenti con il campo elettromagnetico e proponiamoci di determinare l'azione di tale sistema, allo scopo di dedurre le equazioni del moto e le leggi di conservazione, sfruttando rispettivamente il principio di minima azione e il teorema di Noether. Nella ricerca dell'azione imporremo naturalmente la condizione che essa sia un invariante per trasformazioni di Poincarè. Per il resto procederemo in modo euristico.

È logico aspettarsi che l'azione sia composta dalla somma di tre termini:

$$I = I_1 + I_2 + I_3,$$

dove I_1 è la parte dell'azione che dipende solo dalle proprietà delle particelle, cioè l'azione per le particelle libere, I_2 è la parte che dipende esclusivamente dalle proprietà del campo stesso in assenza di cariche, cioè è l'azione relativa al campo da solo senza sorgenti, infine I_3 è la parte dell'azione relativa all'interazione delle particelle con il campo.

Sappiamo che per una particella libera l'azione è data da $-mc \int_{\Gamma_{a,b}} ds$, per cui il termine dell'azione relativo alle N particelle sarà dato da

$$I_1 = - \sum_{r=1}^N m_r c \int_{\Gamma_r} ds_r ,$$

dove Γ_r è l'arco di linea di universo dell' r -esima particella compreso tra gli eventi a_r e b_r . Cerchiamo ora di determinare la parte dell'azione relativa al campo elettromagnetico in assenza di cariche. Poiché i campi sono univocamente determinati dal quadripotenziale $A_i(x)$, cerchiamo per l'azione un'espressione del tipo

$$I_2 = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \mathcal{L}(A_i(x), \partial_j A_h(x)) ,$$

dove, come si è detto, \mathcal{L} deve trasformarsi come un campo scalare e Σ_1 e Σ_2 sono due iperpiani di tipo spazio paralleli. Ricordiamo poi che, in assenza di cariche, il campo elettromagnetico obbedisce al *principio di sovrapposizione*, e così pure il quadripotenziale. Come sappiamo, ciò comporta la linearità delle equazioni che coinvolgono il quadripotenziale $A_i(x)$ e di conseguenza la funzione integranda nell'espressione dell'azione deve risultare quadratica nel quadripotenziale $A_i(x)$. Solo così, infatti, risulteranno lineari le equazioni in $A_i(x)$ che si ottengono facendo la variazione dell'azione. Dal principio di minima azione poi si ottengono le equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_i} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j A_i)} = 0$$

e, affinché tali equazioni siano lineari in $A_i(x)$, la densità di lagrangiana \mathcal{L} dovrà essere quadratica nel quadripotenziale. Dati allora i campi elettrico e magnetico ad un certo istante di tempo, dato cioè un iperpiano $t = cost$, le equazioni di Eulero-Lagrange devono essere in grado di determinare i campi \mathbf{E} e \mathbf{H} in tutti gli istanti successivi. In termini del quadripotenziale ciò significa che dati $A_i(\mathbf{x}, t_0)$ e $\partial_0 A^i(\mathbf{x}, t_0)$ sull'iperpiano $t = t_0$, le equazioni di campo devono essere in grado di determinare $A_i(\mathbf{x}, t)$ dappertutto. Dunque, le equazioni di campo di Eulero-Lagrange devono essere equazioni differenziali del secondo ordine nella derivata temporale e quindi, per la covarianza, del secondo ordine anche nelle derivate parziali. Ne segue che \mathcal{K} deve contenere termini quadratici in $\partial_i A_j$. Dunque \mathcal{L} sarà una combinazione lineare dei termini:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \partial_i A^i \partial_j A^j , \\ \mathcal{L}_2 &= \partial_i A^j \partial_j A^i , \\ \mathcal{L}_3 &= \partial_j A^i \partial^j A_i , \\ \mathcal{L}_4 &= \partial^j A_i \partial^i A_j , \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ricordiamo ora che, ai fini della determinazione delle equazioni del moto, la densità di lagrangiana è determinata a meno di quadridivergenze. L'osservazione precedente permette di semplificare l'espressione di \mathcal{L} . Ad esempio, possiamo eliminare il termine

$$A_i \partial_j \partial^j A^i = \partial_j [A_i \partial^j A^i] - \partial_j A_i \partial^j A^i ,$$

a vantaggio di $\partial_j A_i \partial_j A^i$. Procedendo così, di tutti i termini che costituiscono \mathcal{L} , di indipendenti ne rimangono solo tre:

$$F_{ij} F^{ij} = (\partial_i A_j - \partial_j A_i)(\partial^i A^j - \partial^j A^i - \partial^j A^i), \quad \partial_i A^i \partial_j A^j, \quad A_i A^i.$$

Pertanto possiamo avere

$$\mathcal{L} = a F_{ij} F^{ij} + b \partial_i A^i \partial_j A^j + c A_i A^i.$$

A questo punto introduciamo una considerazione fisica: l'invarianza di gauge delle equazioni di campo per trasformazioni di gauge del quadripotenziale:

$$\hat{A}^i = A^i + \partial^i f.$$

Tale invarianza è automatica se la densità di lagrangiana è essa stessa invariante per trasformazioni di gauge. Ora, il termine $F_{ij} F^{ij}$ di \mathcal{L} è invariante per trasformazioni di gauge, mentre gli altri termini ed ogni loro combinazione lineare non sono invarianti di gauge. Ciò implica che nell'espressione scritta per \mathcal{L} dovrà essere $b = 0$ e $c = 0$. Tutte le considerazioni svolte finora rendono naturale il seguente postulato:

$$I_2 = a \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x F_{ij}(x) F^{ij}(x).$$

Vedremo poi che per ottenere le equazioni di Maxwell e l'equazione di Lorentz con i giusti coefficienti dovremo scegliere $a = -1/(16\pi c)$, per cui porremo

$$I_2 = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x F_{ij}(x) F^{ij}(x).$$

Resta allora da determinare la parte dell'azione relativa all'interazione tra cariche e campo elettromagnetico. Anche in questo caso richiederemo che I sia uno scalare e inoltre che sia invariante per trasformazioni di gauge del quadripotenziale a meno dell'integrale di una quadridivergenza. Proviamo allora a prendere

$$I_3 = -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) A_i(x),$$

dove il fattore moltiplicativo $1/c^2$ è stato già scelto in modo da poter ottenere le equazioni di Lorentz e di Maxwell con i coefficienti giusti. A rigore, I_3 non è un invariante per trasformazioni di gauge, ma la variazione di I_3 sotto tali trasformazioni è una quadridivergenza, per cui non contribuisce alle equazioni del moto. Infatti, se $\hat{A}_i(x) = A_i(x) + \partial_i f(x)$, abbiamo

$$\begin{aligned} \hat{I}_3 &= -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) \hat{A}_i(x) = -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) [A_i(x) + \partial_i f(x)] \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) A_i(x) - \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) \partial_i f(x) \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i [j^i(x) f(x)] + \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x f(x) \partial_i j^i(x). \end{aligned}$$

Il secondo addendo è identicamente nullo, in quanto per l'equazione di continuità $\partial_i j^i(x) = 0$; pertanto possiamo scrivere

$$\hat{I}_3 = I_3 - \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \partial_i [j^i(x) f(x)],$$

dove si riconosce che l'integrale a secondo membro è una quadridivergenza.

Possiamo poi esprimere I_3 in un'altra forma utile: ricordando l'espressione della quadricorrente per un sistema di N cariche puntiformi

$$j^i(x) = c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i \delta(x - x_r)$$

e sostituendola nell'espressione dell'azione, otteniamo:

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x c \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i \delta^4(x - x_r) A_i(x) \\ &= -\frac{1}{c} \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \delta^4(x - x_r) A_i(x) \\ &= -\frac{1}{c} \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i A_i(x_r). \end{aligned}$$

Risulta così che

$$I_3 = -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x j^i(x) A_i(x) = -\frac{1}{c} \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^i A_i(x_r).$$

Per concludere questo paragrafo, riassumiamo e commentiamo i risultati cui siamo pervenuti. Abbiamo visto che l'azione per un sistema di N particelle cariche interagenti con il campo elettromagnetico è data dalla somma di tre termini: $I = I_1 + I_2 + I_3$, dove

$$I_1 = -\sum_{r=1}^N m_r c \int_{\gamma_r} ds_r$$

è l'azione della particella libera,

$$I_2 = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x F^{ij}(x) F_{ij}(x)$$

è l'azione dei campi liberi e

$$I_3 = -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x j^i(x) A_i(x) = -\sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} \int_{\gamma_r} A_i(x_r) dx_r^i,$$

è il termine dell'azione relativo all'interazione campi-particelle. Le variabili dinamiche sono in questo caso le variabili discrete x_r^i e le coordinate continue di campo $A_i(x)$. È importante notare che l'espressione ottenuta per I è uno scalare e che è invariante per trasformazioni di gauge del quadripotenziale, a meno di una quadridivergenza nel termine I_3 .

6.4.2 Le equazioni del moto e le equazioni di campo

Ora che abbiamo determinato l'azione del nostro sistema, basterà imporre il principio dell'azione stazionaria in corrispondenza ad una variazione delle coordinate x_r^i e $A^i(x)$ che si annulli agli estremi per ottenere le equazioni del moto. Ritrovando le note equazioni dell'elettromagnetismo ci si renderà conto della giustezza dell'espressione dell'azione da noi scelta. La trattazione di questo argomento va fatta in due casi: il primo caso è quello in cui le variazioni δx_r^i sono arbitrarie ma nulle agli estremi, mentre le variazioni $\delta A_i(x)$ sono identicamente nulle; il secondo caso è l'inverso del precedente: le variazioni $\delta A_i(x)$ sono arbitrarie purché nulle agli estremi, mentre invece le variazioni δx_r^i sono identicamente nulle.

Consideriamo allora il primo caso. Naturalmente sarà $\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 + \delta I_3$. Per il calcolo di δI_1 possiamo ripetere il procedimento già visto nel caso della particella libera:

$$\delta I_1 = \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \frac{dp_r^i}{ds_r} \delta x_{ri} ds_r .$$

Ed essendo poi $\delta A_i = 0$ potremo scrivere immediatamente $\delta I_2 = 0$. Per calcolare δI_3 , serviamoci della sua seconda espressione:

$$\begin{aligned} \delta I_3 &= - \sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} \delta \int_{\gamma_r} dx_r^i A_i(x_r) \\ &= - \sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} \delta \int_{\gamma_r} \delta [dx_r^i A_i(x_r)] . \end{aligned}$$

Calcoliamo ora $\delta [dx_r^i A_i(x_r)]$ tenendo conto che c'è anche una variazione $\delta A_i(x_r)$ indotta dalla δx_r^i .

$$\begin{aligned} \delta [A_i(x_r) dx_r^i] &= \delta A_i(x_r) dx_r^i + A_i(x_r) \delta dx_r^i = \partial_k A_i(x_r) \delta x_r^k dx_r^i + A_i(x_r) d[\delta x_r^i] \\ &= \partial_k A_i(x_r) \delta x_r^k dx_r^i + d[A_i(x_r) \delta x_r^i] - \partial_k A_i(x_r) dx_r^k \delta x_r^i \\ &= [\partial_k A_i - \partial_i A_k](x_r) \delta x_r^k dx_r^i + d[A_i(x_r) \delta x_r^i] . \end{aligned}$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\delta I_3 = - \sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} \delta \int_{\gamma_r} [\partial_k A_i - \partial_i A_k](x_r) \delta x_r^k dx_r^i - \sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} [A_i(x_r) \delta x_r^i]_{a_r} . \quad (6.31)$$

Poichè consideriamo variazioni δx_r^i nulle agli estremi, l'ultimo termine è identicamente nullo e, ricordando che

$$F_{ki}(x_r) = [\partial_k A_i - \partial_i A_k](x_r) , \quad dx_r^i = u_r^i ds_r ,$$

abbiamo

$$\delta I_3 = - \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} F_{ki}(x_r) u_r^i \delta x_r^k ds_r .$$

In definitiva, riordinando opportunamente gli indici otteniamo che

$$\delta I = \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \left[\frac{dp_r^i}{ds_r} - \frac{e_r}{c} F^{ik}(x_r) u_{rk} \right] \delta x_{ri} ds_r ,$$

dove u_{rj} indica la j -esima componente di u_r . Uguagliando poi a zero tale quantità e ricordando che le δx_{ri} sono arbitrarie, purché nulle agli estremi, otteniamo la nota *equazione di Lorentz*:

$$\frac{dp_r^i}{ds_r} = \frac{e_r}{c} F^{ik}(x_r) u_{rk}, \quad r = 1, \dots, N.$$

Condieriamo ora il secondo caso, che ricordiamo essere quello in cui le variazioni $\delta A_i(x)$ sono arbitrarie purché nulle agli estremi, mentre le δx_r^i sono identicamente nulle. Questa volta, essendo $\delta x_r^i = 0$, avremo $\delta I_1 = 0$. Inoltre abbiamo:

$$\delta I_2 = -\frac{1}{16\pi c} \delta \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x F_{ik}(x) F^{ik}(x) = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \delta [F_{ik}(x) F^{ik}(x)],$$

dove

$$\delta [F_{ik}(x) F^{ik}(x)] = 2F_{ik}(x) \delta F^{ik}(x),$$

e dove, a sua volta,

$$\delta F^{ik} = \delta [\partial^i A^k - \partial^k A^i] = \partial^i \delta A^k - \partial^k \delta A^i.$$

Quindi, sfruttando l'antisimmetria di F_{ik} , otteniamo:

$$\delta [F_{ik} F^{ik}] = 4\partial^i [F_{ik} \delta A^k] - 4\partial^i F_{ik} \delta A^i.$$

Pertanto possiamo scrivere

$$\delta I_2 = \frac{4}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \partial^i F_{ik} \delta A^k - \frac{4}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \partial^i [F_{ik} \delta A^k].$$

Applicando al secondo integrale il teorema di Gauss a quattro dimensioni, esso può essere ricondotto ad un integrale sulle ipersuperfici, dove la variazione $\delta A^k(x)$ è identicamente nulla, e quindi porlo identicamente uguale a zero. Pertanto abbiamo:

$$\delta I_2 = \frac{1}{4\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x (\partial^i F_{ik}) dA^k. \quad (6.32)$$

Per calcolare la variazione di I_3 serviamoci della sua prima espressione:

$$\begin{aligned} \delta I_3 &= \frac{1}{c^2} \delta \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x j^i(x) A_i(x) = \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \delta [j^i(x) A_i(x)] \\ &= -\frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x j^i(x) A_i(x). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Abbiamo allora che

$$\delta I = -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \delta A_i(x) \left(\partial_k F^{ik} + \frac{4\pi}{c} j^i \right).$$

Il principio di azione e reazione ci dice che deve essere $\delta I = 0$ per ogni arbitraria variazione $\delta A_i(x)$ soddisfacente le condizioni agli estremi. Ciò significa che deve identicamente essere

$$\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i,$$

che si riconosce subito essere il secondo gruppo di equazioni di Maxwell. Per quanto riguarda il primo gruppo di tali equazioni, ricordiamo che esso è automaticamente soddisfatto perché in questa trattazione abbiamo espresso i campi elettromagnetici mediante il quadripotenziale A^i .

6.4.3 Il teorema di Noether e le costanti del moto

Attraverso il teorema di Noether ora vogliamo vedere, nel nostro sistema di cariche puntiformi interagenti con il campo elettromagnetico, la connessione esistente tra le proprietà di invarianza del sistema (in questo caso invarianza per trasformazioni di Poincaré) e i principi di conservazione; alla fine determineremo anche l'espressione delle costanti del moto. Concettualmente il procedimento è identico a quello già visto nel caso della particella libera: l'invarianza per trasformazioni di Poincaré è espressa dal fatto che l'azione del sistema è uno scalare relativistico; allora, se I è l'azione del sistema in un riferimento inerziale K e \hat{I} è la stessa azione vista nel sistema di riferimento inerziale \hat{K} infinitamente vicino a K , la variazione $\delta I = \hat{I} - I$ dell'azione è nulla, cioè

$$\delta I = 0 .$$

Infatti δI è la variazione dell'azione corrispondente ad una trasformazione infinitesima di Poincaré. L'equazione $\delta I = 0$, considerata per il moto effettivo del sistema, fornisce i principi di conservazione.

Sappiamo che l'espressione completa del nostro sistema è $I = I_1 + I_2 + I_3$, dove

$$I_1 = - \sum_{r=1}^N m_r c \int_{\gamma_r} ds_r , \quad (6.34)$$

$$I_2 = - \frac{1}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x F^{ik}(x) F_{ik}(x) , \quad (6.35)$$

$$I_3 = - \sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} \int_{\gamma_r} ds_r^i A_i(x_r) , \quad (6.36)$$

dove, al solito, Σ_1 e Σ_2 sono due iperpiani di tipo spazio che non si intersecano e γ_r è la linea di universo dell' r -esima particella con estremi a_r e b_r su Σ_1 e Σ_2 rispettivamente.

Una trasformazione infinitesima di Poincaré implica non solo variazioni infinitesime non nulle agli estremi delle variabili dinamiche $x_r^i(\xi_r)$ e $A^i(x)$, ma (a causa dei termini di azione espressi da integrali nello spazio-tempo tra Σ_1 e Σ_2) anche variazioni delle variabili di integrazione x^i , e quindi degli iperpiani estremi Σ_1 ed Σ_2 .

Determiniamo allora la più generale variazione dell'azione I , risultante da una generica variazione sincrona infinitesima delle variabili dinamiche, non necessariamente nulla agli estremi, e una variazione degli iperpiani estremi Σ_1 e Σ_2 . La generica variazione sincrona delle variabili dinamiche è

$$\begin{aligned} \delta x_r^i &= \hat{x}_r^i(\xi_r) - x_r^i(\xi_r) , \\ \delta A^i(x) &= \hat{A}^i(x) - A^i(x) . \end{aligned}$$

Le variazioni di Σ_1 e Σ_2 corrispondono alla variazione

$$x^i \mapsto \hat{x}^i = x^i + \delta x^i \quad (6.37)$$

delle variabili di integrazione. Procediamo allora con il calcolo di δI . I_1 dipende dalle coordinate x_r^i delle N particelle e la sua generica variazione è già stata calcolata ed è data da

$$\delta I_1 = \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \frac{dp_r^i}{ds} \delta x_{ri} ds_r .$$

Risulta allora

$$\delta I_1 = \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} \delta x_r^i ds_r - \sum_{r=1}^N [p_{ri} \delta x_r^i]_a^b.$$

Anche I_3 , data dalla (6.36), dipende solo dalle variabili dinamiche del sistema, ma nel calcolo di I_3 dobbiamo ricordare che la variazione dei campi $A_i(x_r)$ è la risultante della variazione prodotta dalla variazione δx_r^i delle x_r^i e dalla variazione intrinseca $\delta A_i(x)$ dei campi A_i . Pertanto alla (6.31) dobbiamo aggiungere il termine

$$\delta' I_3 = - \sum_{r=1}^N \frac{e_r}{c} \int_{\gamma_r} dx_r^i \delta A^i(x)$$

che, ricordando l'espressione della quadricorrente j^i possiamo anche scrivere nella forma

$$\delta' I_3 = - \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) \delta A_i(x),$$

riottenendo così la (6.33). δI_3 è allora data dalla somma della (6.31) e della (6.33), cioè

$$\delta I_3 = - \frac{1}{c} \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} F_{ki}(x_r) u_{ri} \delta x_r^k ds_r - \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) \delta A_i(x) - \frac{1}{c} \sum_{r=1}^N [e_r A_i(x_r) \delta x_r^i]_{a_r}^{b_r}.$$

L'ultimo termine si può riscrivere in una forma più conveniente utilizzando l'identità

$$\sum_{r=1}^N [e_r A_i(x_r) \delta x_r^i]_{c_r} = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} d\Sigma n_k j^k(x) A_i(x) \delta x^i,$$

dove i c_r sono i punti dell'iperpiano di tipo spazio Σ . Questa identità è di immediata verifica se la si considera nel sistema di riferimento in cui Σ è l'iperpiano $ct = cost$. In tal caso, $d\Sigma = d^3 x$ e $n_i = (1, 0, 0, 0)$, per cui l'identità diventa

$$\sum_{r=1}^N [e_r A_i(x_r) \delta x_r^i]_{c_r} = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} d^3 x j^0(x) A_i(x) \delta x^i,$$

che è evidente ricordando l'espressione di $j^0(x)$. Allora δI_3 diventa

$$\begin{aligned} \delta I_3 = & - \frac{1}{c} \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} F_{ki}(x_r) u_{ri} \delta x_r^k ds_r - \frac{1}{c^2} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x j^i(x) \delta A_i(x) - \\ & - \frac{1}{c^2} \int d\Sigma [(n_i \delta x^i) F^{lm}(x) F_{lm}(x)]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}. \end{aligned}$$

Infine, si ottiene δI_2 sommando alla variazione di I_2 dovuta alla variazione sincrona dei campi $A_i(x)$, ed espressa dall'equazione (6.32), il contributo δI_2 dovuto alla variazione di Σ_1 e Σ_2 . Quest'ultimo contributo è dato da

$$\delta' I_2 = - \frac{1}{16\pi c} \int d\Sigma [(n_i dx^i) F^{lm}(x) F_{lm}(x)]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}. \quad (6.38)$$

Si comprende il significato di questa quantità osservando che $n_i \delta x^i$ è lo spostamento normale degli iperpiani Σ_1 e Σ_2 dovuto alla variazione (6.37) delle variabili di integrazione x^i .

C'è anche un altro modo per ricavare la (6.38): partendo da

$$\delta' I_2 = -\frac{1}{16\pi c} \left(\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 \hat{x} F^{lm}(\hat{x}) F_{lm}(\hat{x}) - \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x F^{lm}(x) F_{lm}(x) \right)$$

cioè, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\delta' I_2 = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x (\Delta[F^{lm}(x) F_{lm}(x)] + \partial_i[F^{lm}(x) F_{lm}(x)] \delta x^i - F^{lm}(x) F_{lm}(x)),$$

dove $\Delta = 1 + \partial_i[\delta x^i]$ è lo jacobiano della trasformazione (6.37). Per cui, sempre a meno di infinitesimi di ordine superiore, abbiamo

$$\delta' I_2 = -\frac{1}{16\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i[F^{lm}(x) F_{lm}(x) \delta x^i],$$

che si riduce alla (6.38) usando il teorema di Gauss a quattro dimensioni. Si può utilizzare il teorema di Gauss per ricondurre anche l'ultimo integrale della (6.32) ad un integrale sugli iperpiani Σ_1 e Σ_2 e quindi, in conclusione, per la variazione totale di I_2 si ottiene

$$\delta I_2 = \frac{1}{4\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i F^{ik} \delta A_k - \frac{1}{4\pi c} \int d\Sigma n_i \left[F^{ik} \delta A_k + \frac{1}{4} g^{ik} F^{lm} F_{lm} \delta x_k \right]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2}.$$

La variazione totale dell'equazione si ottiene sommando le variazioni parziali δI_1 , δI_2 e δI_3 ma, per ottenere un'espressione di δI più conveniente, usiamo il trucco di aggiungere la variazione identicamente nulla

$$\delta' I = \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i \partial_k H^{[ik]}, \quad (6.39)$$

dove $H^{[ik]}$ è un arbitrario campo tensoriale antisimmetrico, cioè tale che $H^{ik} = -H^{ki}$. Scegliendo poi tale campo come

$$H^{[ik]} = -\frac{1}{4\pi c} F^{ik} A^l \delta x_l,$$

risulta

$$\begin{aligned} \delta' I &= - \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i \partial_k \left[\frac{1}{4\pi c} F^{ik} A_l \delta x^l \right] \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i [\partial_k F^{ik} A_l \delta x^l + F^{ik} \partial_k A_l \delta x^l + F^{ik} A_l \partial_k \delta x^l] \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i [\partial_k F^{ik} A_l \delta x^l + F^{ik} F_{kl} \delta x^l + F^{ik} \partial_l A_k \delta x^l + A_l \partial_k \delta x^l], \end{aligned}$$

che per il teorema di Gauss diventa

$$\delta' I = -\frac{1}{4\pi c} \int d\Sigma n_i (\partial_k F^{ik} A_l \delta x^l + F^{ik} F_{kl} \delta x^l + F^{ik} (\partial_l A_k \delta x^l + A_l \partial_k \delta x^l)). \quad (6.40)$$

Sommando allora i quattro termini δI_1 , δI_2 , δI_3 e $\delta' I$ e riordinando opportunamente gli indici si ottiene finalmente l'espressione generale della variazione dell'azione I :

$$\begin{aligned}
\delta I = & \sum_{r=1}^N \int_{\gamma_r} ds_r \left(\frac{dp_r^i}{ds_r} - \frac{e_r}{c} F^{ik}(x_r) u_{rk} \right) \delta x_{ri} + \\
& + \frac{1}{4\pi c} \int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4x \left(\partial_i F^{ik} - \frac{4\pi}{c} j^k \right) \delta A_k + \\
& + \frac{1}{4\pi c} \int d\Sigma n_i \left[\left(\partial_k F^{ki} - \frac{4\pi}{c} j^i \right) A^l \delta x_l \right]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} - \\
& - \frac{1}{4\pi c} \int d\Sigma n_i F^{ik} [\delta A_k + \partial_l A_k \delta x^l + A_l \partial_k \delta x^l]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} - \\
& - \sum_{r=1}^N [p_r^k \delta x_{rk}]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} - \frac{1}{c} \int d\Sigma n_i [T^{ik} \delta x_k]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2},
\end{aligned} \tag{6.41}$$

dove si è introdotto il tensore doppio simmetrico

$$T^{ik} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{il} F_l^k + \frac{1}{4} g^{ik} F^{lm} F_{lm} \right]$$

già incontrato nel capitolo sulla forma covariante a vista delle leggi dell'elettromagnetismo.

La (6.41) contiene naturalmente i risultati del paragrafo precedente in quanto, se non variano le variabili di integrazione x^i e consideriamo variazioni delle variabili dinamiche nulle agli estremi, solo i primi due termini sopravvivono nella (6.41); applicando poi il principio di minima azione, si ottengono le equazioni di Lorentz e di Maxwell.

Passiamo quindi a ricavare i principi di conservazione attraverso il teorema di Noether. A tale scopo consideriamo la δI corrispondente alla trasformazione infinitesima di Poincaré

$$\delta x^i = \omega^{ik} x_k + a^i, \tag{6.42}$$

dove a^i e ω^{ik} sono costanti infinitesime e $\omega^{ik} = -\omega^{ki}$. Le coordinate x_r^i delle particelle si trasformano come le x^i , cioè

$$\delta x_r^i = \hat{x}_r^i - x_r^i = \omega^{ik} x_r^k + a^i \tag{6.43}$$

e i quadripotenziali $A^i(x)$ si trasformano come un campo quadrivettoriale:

$$\hat{A}(x - \delta x) - A^i(x) = \omega^{ik} A_k(x),$$

cioè

$$\delta A^i(x) = \hat{A}^i(x) - A^i(x) = -\partial_l A^i(x) \delta x^l + \omega^{ik} A_k(x). \tag{6.44}$$

Notando che dalla (6.42) si ha $\partial_k [\delta x_i] = \omega_{ik}$, si ha anche che

$$\delta A_k + \partial_l A_k \delta x^l + \partial_k [\delta x_l] A^l = 0. \tag{6.45}$$

Allora il quarto termine nella (6.41) è nullo perché è proporzionale alla (6.45). Se consideriamo il moto reale delle cariche e dei campi, anche i primi tre termini della (6.41), che sono proporzionali alle equazioni del moto, si annullano.

D'altra parte, poiché I è uno scalare, δI si annulla per una trasformazione di Poincaré, anche infinitesima, per cui

$$0 = \delta I = - \sum_{r=1}^N [p_r^k \delta x_{rk}]_{a_r}^{b_r} - \frac{1}{c} \int d\Sigma n_i [T^{ik} \delta x_k]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} .$$

ovvero

$$\sum_{r=1}^N p_r^k \delta x_{rk} + \frac{1}{c} \int_{\Sigma} d\Sigma n_i T^{ik} \delta x_k = cost . \quad (6.46)$$

Quest'ultima equazione esprime tanti principi di conservazione quanti sono i parametri indipendenti che compaiono nell δx_k e δx_{rk} , che nel nostro caso sono dieci. Infatti, utilizzando la (6.42), la (6.43) e l'antisimmetria di ω_{ij} , dalla (6.46) si ha:

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{r=1}^N p_r^k + \frac{1}{c} \int_{\Sigma} d\Sigma n_i T^{ik} \right) a_k + \\ & + \sum_{h < k} \left(\sum_{r=1}^N (p_{rh} x_{rk} - p_{rk} x_{rh}) + \frac{1}{c} \int d\Sigma n_i (T^{ih} x^k - T^{ik} x^h) \right) \omega_{hk} = cost . \end{aligned} \quad (6.47)$$

Scegliendo di volta in volta i parametri indipendenti a_k e ω_{hk} , con $h < k$, tutti non nulli tranne uno, dalla (6.47) si ottengono i principi di conservazione dell'energia-impulso e del momento angolare-spinta.

L'ambiguità contenuta nella (6.39) implica che la densità di impulso-energia e la densità del momento angolare del campo elettromagnetico non siano definite univocamente. Solo l'energia e l'impulso totali e il momento angolare totale sono definiti univocamente. Il fatto è che, mentre $\partial_i \partial_k H^{[ik]}$ è nullo in ogni punto della regione di integrazione compresa tra i due iperpiani Σ_1 e Σ_2 , abbiamo, mettendoci per semplicità nel sistema di riferimento nel quale Σ_1 e Σ_2 sono rispettivamente gli iperpiani di equazione $ct_1 = cost$ e $ct_2 = cost$,

$$\int_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^4 x \partial_i \partial_k H^{[ik]} = \int_{\Sigma} [\partial_{\alpha} H^{[0\alpha]}]_{\Sigma_1}^{\Sigma_2} d^3 x ,$$

e $\partial_{\alpha} H^{[0\alpha]}$ non si annulla in ogni punto di Σ . Tuttavia

$$\sum_{\alpha=1}^3 \int_{\Sigma} d^3 x \partial_{\alpha} H^{[0\alpha]} = 0 ,$$

come si verifica utilizzando il teorema di Gauss tridimensionale e l'assunzione che $H^{[0\alpha]}$ si annulli con sufficiente rapidità all'infinito spaziale.

6.5 Cenni alle particelle con massa quantistiche

6.5.1 Il campo scalare scarico e l'equazione di Klein-Gordon

È noto dalla meccanica quantistica che l'energia e la quantità di moto di una particella sono rappresentate rispettivamente dagli operatori

$$\mathcal{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p_\alpha = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\alpha}$$

cioè

$$p_i = i\hbar \partial_i.$$

Quindi l'operatore di D'Alembert diventa:

$$\square = -\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 \right).$$

Tenuto conto dell'equazione $\mathcal{E}^2 = (mc^2)^2 + c^2|\mathbf{p}|^2$, l'equazione $\square A = 0$ di propagazione del quadripotenziale è allora conseguenza della massa nulla dei fotoni.

Consideriamo ora un campo scalare neutro $\phi(x)$ (e cioè nel quale non ci sono cariche) ad un solo grado di libertà e i cui quanti abbiamo massa a riposo m . La logica generalizzazione dell'equazione $\square A = 0$ è allora:

$$\square \phi(x) = -\frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 \right) \phi(x) = -\frac{1}{\hbar^2} m^2 c^2 \phi(x),$$

cioè

$$[\square + \mu^2] \phi(x) = 0, \quad (6.48)$$

dove $\mu = mc/\hbar$. Questa equazione viene detta *equazione di Klein-Gordon*. Essa può essere ricavata anche dalle equazioni di Eulero-Lagrange mediante la densità di lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2} (\partial^i \phi(x) \partial_i \phi(x) + \mu^2 \phi^2(x)). \quad (6.49)$$

Nel caso di un campo scalare statico con massa generato da una carica puntiforme g ferma nell'origine del sistema di riferimento, l'equazione che generalizza $\nabla^2 A^0(\mathbf{r}) = 4\pi \rho(\mathbf{r})$ è

$$[\nabla^2 + \mu^2] \phi(x) = g \delta(\mathbf{r}).$$

Utilizzando lo sviluppo integrale di Fourier della $\delta(\mathbf{r})$ e della $\phi(x)$ si può giungere all'equazione

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{r}\cdot\mathbf{k}}}{|\mathbf{k}|^2 + m^2} d\mathbf{k} = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}, \quad (6.50)$$

dove $r_0 = \hbar/mc$ rappresenta il *raggio di interazione* o *range* del campo.

Secondo la teoria quantistica dei campi, l'interazione tra particelle avviene tramite lo scambio dei quanti del campo stesso e nel caso dell'interazione elettromagnetica i quanti sono i fotoni, che hanno massa nulla. Si noti che, a causa della presenza del fattore esponenziale nella (6.50), il

potenziale statico generato dallo scambio di particelle con massa diversa da zero decresce molto più rapidamente del potenziale coulombiano e che per $r > r_0$ il potenziale di questi campi diviene praticamente trascurabile. Inoltre, dalla relazione $r_0 = \hbar/mc$, si vede che quanto più grande è la massa della particella scambiata in un processo di interazione, tanto minore è il range delle forze in gioco. Tale risultato, anche se ricavato in un caso semplice, ha validità generale.

6.5.2 Le particelle a spin semintero e l'equazione di Dirac

Nel caso non relativistico, lo spazio di Hilbert per le particelle a spin $\frac{1}{2}$ è uno spazio di coppie di funzioni rappresentato dalla seguente matrice a due righe ed una colonna

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} \psi_1(\mathbf{x}, t) \\ \psi_2(\mathbf{x}, t) \end{bmatrix}, \quad (6.51)$$

detto *spinore a due componenti*. Esso è definito dalle seguenti proprietà di trasformazione rispetto alle rotazioni U di un angolo ϑ attorno alla direzione definita dal versore \mathbf{n} :

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = U\psi(\mathbf{x}, t), \quad U = e^{i\frac{\vartheta}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n}}, \quad (6.52)$$

dove $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ e

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.53)$$

sono le *matrici di Pauli*, che assieme alla matrice unità formano una base per tutte le matrici 2×2 . $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ soddisfano poi le proprietà di commutazione:

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \mathcal{I}, \\ \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 &= 2i\sigma_3 \quad \text{e cicliche,} \\ \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_1 &= 0 \quad \text{e cicliche,} \\ \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 \quad \text{e cicliche.} \end{aligned}$$

Se indichiamo con

$$\chi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \chi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

una base per gli spinori, allora possiamo scrivere

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_1(\mathbf{x}, t)\chi_1 + \psi_2(\mathbf{x}, t)\chi_2. \quad (6.54)$$

Si può verificare facilmente che la nostra base per gli spinori è un autostato di $|\boldsymbol{\sigma}|^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2$ e σ_3 , cioè

$$|\boldsymbol{\sigma}|^2\chi_{1,2} = 3\chi_{1,2}, \quad \sigma_3\chi_1 = \chi_1, \quad \sigma_3\chi_2 = -\chi_2.$$

Poiché U è un operatore unitario, la quantità $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)\psi(\mathbf{x}, t)$ è uno scalare e quindi un invariante per rotazioni. Si può anche dimostrare che $\psi^\dagger(\mathbf{x}, t)\boldsymbol{\sigma}\psi(\mathbf{x}, t)$ si trasforma come un vettore nello spazio tridimensionale.

Nel caso relativistico le cose sono più complicate: innanzitutto, $\psi^+\psi$ rappresenta una densità di probabilità o di carica e quindi non può essere un invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz. Si può dimostrare che, nella teoria della relatività, si possono definire due tipi di spinori a due componenti che si differenziano per il modo di trasformarsi rispetto ad una trasformazione di Lorentz nella quale $v \ll 1$. Se indichiamo tali spinori con φ_1 e φ_2 , più precisamente abbiamo che

$$\begin{aligned}\varphi'_1 &= \left(1 + \frac{1}{2}v\sigma_1\right) \varphi_1 \\ \varphi'_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}v\sigma_1\right) \varphi_2\end{aligned}\quad (6.55)$$

allora non è difficile dimostrare che $q_1 = (\varphi_1^+\varphi_1, \varphi_1^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_1)$ e $q_2 = (\varphi_2^+\varphi_2, \varphi_2^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_2)$ si trasformano come quadrivettori.

Tramite gli spinori a due componenti φ_1 e φ_2 è ora possibile costruirsi della quantità invariante per trasformazioni di Lorentz. Infatti, utilizzando le (6.55) si ottiene:

$$\varphi_2'^+\varphi_1' = \varphi_2^+ \left(1 - \frac{1}{2}v\sigma_1\right) \left(1 + \frac{1}{2}v\sigma_1\right) \varphi_1 = \varphi_2^+\varphi_1 + O(v^2),$$

e un risultato analogo per $\varphi_1^+\varphi_2$. Quindi, per costruire degli invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz, sono necessari due spinori a due componenti. Tramite φ_1 e φ_2 si possono costruire anche invarianti del tipo

$$\begin{aligned}q_2^1 B_i &= \varphi_2^+\varphi_2 B_0 - \varphi_2^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_2 \cdot \mathbf{B}, \\ q_1^i B_i &= \varphi_1^+\varphi_1 B_0 - \varphi_1^+\boldsymbol{\sigma}\varphi_1 \cdot \mathbf{B},\end{aligned}$$

dove B^i sono le componenti di un quadrivettore. Se, per esempio, consideriamo il quadrivettore energia-impulso p^i , allora dovrà essere

$$\varphi_2^+ \left(\frac{\mathcal{E}}{c} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\right) \varphi_2 = -mc\varphi_2^+\varphi_1,$$

e tale quantità è un invariante e dove la massa m è una costante scalare ed è la massa della particella rappresentata dagli spinori φ_1 e φ_2 . Da quest'ultima relazione si ottiene l'equazione

$$(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{E})\varphi_2 = mc^2\varphi_1. \quad (6.56)$$

Moltiplicando entrambi i membri di quest'ultima per $c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{E}$ e tenendo conto delle proprietà delle σ_α risulta che

$$(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{E})\varphi_1 = -mc^2\varphi_2. \quad (6.57)$$

Queste due ultime equazioni formano un sistema di equazioni accoppiate negli spinori a due componenti φ_1 e φ_2 . È interessante vedere come si comportano tali equazioni rispetto alle trasformazioni spaziali. Per far ciò definiamo l'operatore di parità P mediante le condizioni:

$$P^{-1}\mathbf{x}P = -\mathbf{x}, \quad P^{-1}\mathbf{f}(\mathbf{x})P = \mathbf{f}(-\mathbf{x}), \quad (6.58)$$

dove $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è una qualunque funzione. Allora, tenuto conto delle definizioni classiche di quantità di moto e di momento angolare, si ha:

$$P^{-1}\boldsymbol{\sigma}P = \boldsymbol{\sigma}, \quad P^{-1}\mathbf{p}P = -\mathbf{p}. \quad (6.59)$$

Rispetto alle trasformazioni spaziali la (6.56) si trasforma nel modo seguente:

$$P^{-1}(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{E})PP^{-1}\varphi_2P = -(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{E})P^{-1}\varphi_2P = mc^2P^{-1}\varphi_1P,$$

e analogamente per la (6.57). Quindi

$$P^{-1}\varphi_2P = \pm\varphi_1, \quad P^{-1}\varphi_1P = \pm\varphi_2; \quad (6.60)$$

cioè i due spinori φ_1 e φ_2 non sono autostati di P in quanto non hanno parità definita e si trasformano l'uno nell'altro. Per definire degli spinori a due componenti che siano anche autostati di P basta porre

$$\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - \varphi_1), \quad \psi_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 + \varphi_1).$$

Utilizzando le (6.60) si verifica facilmente che

$$P^{-1}\psi_aP = \pm\psi_a, \quad P^{-1}\psi_bP = \mp\psi_b. \quad (6.61)$$

Inoltre, dalla (6.56) e dalla (6.57) si ricava che ψ_a e ψ_b soddisfano alle equazioni accoppiate

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_a &= (\mathcal{E} + mc^2)\psi_b \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}\psi_b &= (\mathcal{E} - mc^2)\psi_a \end{aligned} \quad (6.62)$$

Se ora consideriamo \mathbf{p} ed \mathcal{E} come degli operatori quantistici abbiamo che queste equazioni rappresentano le equazioni d'onda relativistiche di particelle cariche di spin $\frac{1}{2}$ e sono dette *equazioni di Dirac*. Nel caso di elettroni di carica $-e$ in un campo magnetico di quadripotenziale $A^i = \varphi, \mathbf{A}$, con la sostituzione classica

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\mapsto \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}, \\ \mathcal{E} &\mapsto \mathcal{E} + e\varphi, \end{aligned}$$

le equazioni di Dirac diventano

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_a &= (\mathcal{E} + e\varphi + mc^2)\psi_b \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)\psi_b &= (\mathcal{E} + e\varphi - mc^2)\psi_a \end{aligned} \quad (6.63)$$

Ora però si ha che le equazioni di Dirac e le (6.63) ammettono un numero di soluzioni doppio di quello che dovrebbero avere. Infatti, ricordando che $\mathcal{E} = \pm\sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$, metà di esse si riferiscono a stati con valori di energia negativi, mentre l'altra metà si riferisce ai valori positivi di \mathcal{E} . Questa difficoltà si presenta anche nella teoria relativistica classica. A causa della variazione continua delle variabili dinamiche classiche, una particella di energia positiva non può mai passare ad uno stato di energia negativa. Nella meccanica quantistica

invece, potendo avvenire variazioni discontinue di energia, un elettrone inizialmente in uno stato di energia cinetica positiva può compiere una transizione ad uno stato di energia negativa e quindi in meccanica quantistica gli stati con $\mathcal{E} < 0$ non possono essere ignorati. Per dare un'interpretazione fisica a tali stati supponiamo che $\mathcal{E} = -|\mathcal{E}| < 0$, allora le (6.63) diventano

$$\begin{aligned} c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(-\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \psi_a &= (|\mathcal{E}| - e\varphi - mc^2)\psi_b \\ c\boldsymbol{\sigma} \cdot \left(-\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right) \psi_b &= (|\mathcal{E}| - e\varphi - mc^2)\psi_a \end{aligned} \quad (6.64)$$

ma queste equazioni coincidono con quelle che si ottengono con la sostituzione

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &\mapsto -\mathbf{p} \\ e &\mapsto -e \end{aligned} .$$

Le soluzioni con energia negativa delle (6.64) coincidono allora con le soluzioni ad energia positiva per particelle che hanno la stessa massa dell'elettrone, carica positiva $e > 0$ e che in un campo elettrico esterno viaggiano nella direzione opposta a quella degli elettroni. Tali particelle, previste teoricamente da Dirac nel 1928 sulla base delle equazioni (6.64) e osservate sperimentalmente da Anderson nel 1932 sono dette *positroni*. Secondo Dirac, però, “non possiamo tuttavia asserire semplicemente che le soluzioni con energia negativa rappresentino positroni, perché ciò renderebbe errate tutte le soluzioni dinamiche. Per esempio, non è affatto vero che un positrone ha un'energia cinetica negativa. Pertanto dobbiamo stabilire la teoria del positrone su linee alquanto diverse. Supporremo allora che quasi tutti gli stati di energia negativa siano occupati con un elettrone in ciascuno di essi in accordo con il principio di Pauli. Uno stato di energia negativa non occupato apparirà allora come qualcosa dotato di energia positiva poiché, per farlo scomparire, cioè per riempirlo, dovremmo aggiungere ad esso un elettrone con energia positiva. Supporremo quindi che questi stati di energia negativa non occupati rappresentino i positroni.

Queste ipotesi richiedono che nell'universo vi sia dunque una distribuzione di elettroni con densità infinita. Un vuoto perfetto è rappresentato da una regione in cui tutti gli stati di energia positiva non sono occupati, mentre sono occupati tutti gli stati con energia negativa. In un vuoto perfetto deve valere l'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$: ciò significa che la distribuzione infinita di elettroni con energia negativa non porta alcun contributo al campo elettrico. Solo scostamenti dalla distribuzione del vuoto porteranno un contributo alla densità di carica ρ nell'equazione di Maxwell $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$. Vi sarà allora un contributo $-e$ per ogni stato occupato di energia positiva e un contributo e per ogni stato non occupato di energia negativa.

Il principio di esclusione impedisce ordinariamente che un elettrone di energia positiva compia delle transizioni a stati di energia negativa occupati. Sarà tuttavia ancora possibile per un tale elettrone pervenire in uno stato di energia negativa non occupato. In tal caso avremo che un elettrone e un positrone scompaiono simultaneamente mentre la loro energia viene emessa sotto forma di quanti di radiazione. Il processo inverso consiste nella creazione di un elettrone e di un positrone da parte della radiazione elettromagnetica. Per la simmetria imposta dal principio di Pauli tra stati occupati e non occupati, la presente teoria è essenzialmente simmetrica tra elettroni e positroni. Otterremo una teoria equivalente se supponessimo che i positroni sono particelle fondamentali e che quasi tutti gli stati di energia negativa per i positroni risultassero occupati interpretando perciò un buco nella distribuzione dei positroni come un elettrone ordinario.

Lo stesso tipo di teoria vale anche per qualunque tipo di particella di spin $\frac{1}{2}$ soddisfacente l'equazione di Dirac (6.62). A tutti i fermioni con una certa carica q è quindi associata una particella della stessa massa e di carica opposta detta anche *antiparticella* (oppure, nel generico caso di spin semintero, *antifermione*).

Le equazioni di Dirac hanno quattro soluzioni indipendenti, due di energia positiva (che indichiamo con u_a e u_b) e due di energia negativa (v_a e v_b). Poichè dalle (6.62) si ha

$$u_b = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\mathcal{E} + mc^2} u_a,$$

al limite per $\mathbf{p} \rightarrow 0$ le due componenti dello spinore u_b sono nulle. Analogamente, per $\mathcal{E} < 0$ si ha:

$$v_a = \frac{c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{\mathcal{E} - mc^2} v_b,$$

e quindi, al limite per $\mathbf{p} \rightarrow 0$ sopravvivono solo le due componenti di tipo b . Se rappresentiamo le particelle mediante gli spinori a quattro componenti

$$u = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \end{bmatrix},$$

allora, ricordando le definizioni di χ_1 e di χ_2 e il fatto che una funzione d'onda si può scomporre in $\psi(\mathbf{x}, t) = \psi_1(\mathbf{x}, t)\chi_1 + \psi_2(\mathbf{x}, t)\chi_2$, possiamo scrivere per le particelle ($\mathcal{E} > 0$):

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{per } m_s = \frac{1}{2}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{per } m_s = -\frac{1}{2},$$

e per le antiparticelle ($\mathcal{E} < 0$):

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{per } m_s = \frac{1}{2}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{per } m_s = -\frac{1}{2},$$

Indichiamo ora genericamente

$$\psi = \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}$$

lo spinore a quattro componenti (sia di energia positiva che negativa). Poiché dalle definizioni di χ_1 e χ_2 si ha che le componenti ψ_a e di ψ_b si trasformano in modo opposto rispetto alle riflessioni, introducendo la matrice

$$\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

le (6.61) possono essere scritte sinteticamente

$$P^{-1}\psi P = \beta\psi. \quad (6.65)$$

Poiché per uno stato ad energia negativa al limite per $\mathbf{p} \rightarrow 0$ le due componenti inferiori sono le uniche diverse da zero, è evidente che l'antifermione ha parità opposta a quella del fermione. Ricordando che $\psi_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 - \varphi_1)$ e che $\psi_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_2 + \varphi_1)$ si può scrivere

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varphi_2 - \varphi_1 \\ \varphi_2 + \varphi_1 \end{bmatrix},$$

e quindi

$$\beta\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \varphi_2 - \varphi_1 \\ -(\varphi_2 + \varphi_1) \end{bmatrix},$$

per cui

$$\psi^+ \beta\psi - (\varphi_2^+ \varphi_1 + \varphi_1^+ \varphi_2) = \psi_a^+ \psi_a - \psi_b^+ \psi_b.$$

tale quantità è quindi invariante rispetto alle trasformazioni di Lorentz, mentre $\psi^+ \psi$ non è invariante in quanto contiene termini del tipo $\varphi_2^+ \varphi_2$ e $\varphi_1^+ \varphi_1$. Inoltre $\psi^+ \beta\psi$ è anche invariante rispetto alle riflessioni in quanto $\psi_a^+ \psi_a$ e $\psi_b^+ \psi_b$ hanno la stessa parità.

È poi possibile costruire invarianti che cambiano segno rispetto alle riflessioni (pseudoscalari) introducendo la matrice

$$\gamma_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

che, avendo elementi diversi da zero solo lungo la diagonale secondaria ha la proprietà di invertire la posizione delle quattro componenti dello spinore. Infatti

$$\gamma_5 \psi = - \begin{bmatrix} \psi_4 \\ \psi_3 \\ \psi_2 \\ \psi_1 \end{bmatrix},$$

e quindi la quantità

$$\psi^+ \beta \gamma_5 \psi = -[\psi_1^+ \psi_4 + \psi_2^+ \psi_3 - \psi_3^+ \psi_2 - \psi_4^+ \psi_1]$$

cambia segno rispetto alle riflessioni in quanto ψ_1 e ψ_2 si trasformano in modo opposto rispetto a ψ_3 e ψ_4 . Lo spinore $\psi^+ \beta$ spesso viene indicato con $\bar{\psi}$.

Le equazioni di Dirac si possono poi scrivere nella forma di un'unica equazione nello spinore e quattro componenti ψ . Tenuto conto che

$$\mathcal{E} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \mathcal{E}\psi$$

e che

$$-m \begin{bmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{bmatrix} = -m\beta\psi,$$

dopo aver introdotto le matrici

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$\alpha^\nu \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \alpha^\nu \psi, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Per cui le equazioni di Dirac si possono porre nella forma

$$(c\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + mc^2\beta)\psi = \mathcal{E}\psi. \quad (6.66)$$

Moltiplicando quest'ultima equazione a destra per $-i\beta$ e, tenuto conto che $\mathcal{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ e che $p^\alpha = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$, si ottiene:

$$\left[-i \left(\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \beta \frac{\partial}{\partial(ct)} \right) + \mu \right] \psi = 0.$$

E infine, introducendo le quattro matrici

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^\nu = \beta\alpha^\nu, \quad \nu = 1, 2, 3$$

si giunge all'equazione di Dirac in forma covariante:

$$(-i\gamma^i\partial_i + \mu)\psi = 0.$$

Come l'equazione di Klein-Gordon, anche questa equazione può essere ricavata anche dalle equazioni di Eulero tramite la densità di lagrangiana del campo di Dirac

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{2}\bar{\psi}(-i\gamma^i\partial_i + \mu)\psi - \frac{1}{2}(-i\gamma^i\partial_i\bar{\psi} + \mu\bar{\psi})\psi. \quad (6.67)$$

Notiamo che essendo $\bar{\psi}\gamma^i\partial_i\psi$ una quantità invariante, allora $\bar{\psi}\gamma^i\psi$ si trasforma come un quadri-vettore, mentre $\bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi$ si trasforma come un quadri-vettore assiale. Da ciò che è stato detto, con gli spinori a quattro componenti e con le matrici γ è possibile formare le seguenti correnti:

$$\begin{aligned} j_s &= \bar{\psi}\psi && \text{scalare,} \\ i_{ps} &= \bar{\psi}\gamma_5\psi && \text{pseudoscalare,} \\ j_v^i &= \bar{\psi}\gamma^i\psi && \text{vettoriale,} \\ j_a^i &= \bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi && \text{assiale,} \\ j_t^{ij} &= \bar{\psi}\gamma^i\gamma^j\psi && \text{tensoriale.} \end{aligned}$$

Concludiamo questa breve discussione sulla rappresentazione spinoriale dei fermioni osservando che, nel caso dei fermioni di massa nulla, si ha:

$$(c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} - \mathcal{E})\varphi_2 = (c\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + \mathcal{E})\varphi_1 = 0.$$

Tenuto conto che $\mathcal{E} = \pm c|\mathbf{p}|$, a seconda che si tratti di una particella o di una antiparticella, queste equivalgono all'unica equazione

$$\epsilon\phi = \pm\phi,$$

dove

$$\epsilon = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$$

rappresenta l'operatore *elicità*, cioè la componente dello spin nella direzione della quantità di moto. Quindi i fermioni di massa nulla sono in uno stato di elicità definita e inoltre particella e antiparticella hanno elicità opposta e in questo caso possono essere rappresentate da spinori a due sole componenti. Formalmente si può continuare ad utilizzare gli spinori a quattro componenti osservando che per $m = 0$ la (6.66) si riduce a:

$$\frac{\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi = \begin{cases} \psi & \text{per } \mathcal{E} > 0 \\ -\psi & \text{per } \mathcal{E} < 0 \end{cases} . \quad (6.68)$$

Poiché, come si verifica facilmente, γ_5 commuta con le α^μ (ma non con β), allora nel caso $m = 0$ essa è una costante del moto. Essendo inoltre $\gamma_5^2 = \mathcal{I}$, i suoi autovalori sono ± 1 . Se si spezza la ψ in due parti tramite l'identità

$$\psi = \psi_L + \psi_R ,$$

dove

$$\begin{aligned} \psi_L &= \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi , \\ \psi_R &= \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi , \end{aligned}$$

allora gli autovalori γ_5 sono dati dalle

$$\begin{aligned} \gamma_5 \psi_L &= \psi_L . \\ \gamma_5 \psi_R &= -\psi_R . \end{aligned}$$

Questi due autostati di γ_5 rappresentano anche stati di elicità definita e opposta all'autovalore di γ_5 : infatti, l'equazione (6.68) diventa:

$$-\gamma_5 \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_{L,R} = -\gamma_5 \psi_{L,R} = \pm \psi_{L,R} . \quad (6.69)$$

Poiché si ha che

$$\gamma_5 \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} ,$$

la (6.69) diventa

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{bmatrix} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \psi_{L,R} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix} \psi_{L,R} = \mp \psi_{L,R}$$

che rappresenta due equazioni identiche all'equazione $\epsilon\phi = \pm\phi$. Per stabilire se un dato fermione di massa nulla è destro o sinistro (se cioè è rappresentato da ψ_R o ψ_L), bisogna misurare la componente del suo spin nella direzione del moto. Notiamo infine che P anticommuta con ϵ e quindi i fermioni di massa nulla non hanno parità definita. In tutte le reazioni in cui intervengono tali particelle la parità non può allora essere un buon numero quantico (cioè non si conserva sempre).

6.5.3 Il campo scalare carico

Consideriamo un campo scalare carico a due gradi di libertà interni costituiti dalle funzioni reali di campo $\phi_1(x)$ e $\phi_2(x)$. La lagrangiana del campo libero in questo caso è

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^2 (\partial^j \phi_\nu \partial_j \phi_\nu + \mu^2 \phi_\nu^2). \quad (6.70)$$

Introducendo il campo scalare complesso

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \phi_1(x) + i\phi_2(x) \\ \phi^*(x) &= \phi_1(x) - i\phi_2(x) \end{aligned}$$

la densità di lagrangiana diventa:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (\partial^i \phi^* \partial_i \phi + \mu^2 \phi^* \phi). \quad (6.71)$$

Le equazioni di campo possono essere dedotte dalle equazioni di Eulero-Lagrange e sono:

$$\begin{aligned} [\square + \mu^2] \phi(x) &= 0 \\ [\square + \mu^2] \phi^*(x) &= 0 \end{aligned} \quad (6.72)$$

La lagrangiana di campo è chiaramente invariante per la *trasformazione di gauge globale*

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= e^{i\epsilon e} \phi(x) = (1 + i\epsilon e) \phi(x) \\ \phi'^*(x) &= e^{-i\epsilon e} \phi^*(x) = (1 - i\epsilon e) \phi^*(x) \end{aligned} \quad (6.73)$$

e la conseguente corrente conservata, che si ricava dalla (6.71) e dalla (6.30), che ricordiamo essere

$$j^i = ie \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} \phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi^*)} \phi^* \right),$$

è

$$j^i(x) = ie (\phi^*(x) \partial^i \phi(x) - \phi(x) \partial^i \phi^*(x)). \quad (6.74)$$

Per ricavare le equazioni del campo elettromagnetico in interazione con il campo scalare carico, è necessario scrivere la densità di lagrangiana totale nella forma

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_s(x) + \mathcal{L}_{int}(x),$$

dove $\mathcal{L}_{em}(x) = -\frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}$, $\mathcal{L}_s(x)$ è la densità di lagrangiana del campo libero data dalla (6.71) e $\mathcal{L}_{int}(x)$ è la lagrangiana di interazione dipendente da entrambi i campi.

Osserviamo innanzitutto che, mentre \mathcal{L}_{em} è invariante rispetto alla trasformazione di gauge $A'_i(x) = A_i(x) + \partial_i g(x)$, con $g(x)$ campo scalare arbitrario, \mathcal{L}_s è invariante rispetto alla trasformazione di gauge globale ma non rispetto alla *trasformazione di gauge locale*

$$\phi'(x) = \phi(x) e^{ie\lambda(x)}. \quad (6.75)$$

Un metodo per costruirsi $\mathcal{L}_{int}(x)$ è quello di imporre che la lagrangiana totale sia invariante rispetto alle trasformazioni

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \phi(x)e^{ie\lambda(x)} \\ A'^i(x) &= A^i(x) + \partial^i\lambda(x)\end{aligned}\quad (6.76)$$

Inoltre, \mathcal{L}_{em} e il termine di massa $\mu^2\phi^*\phi$ che compare nella (6.71) sono chiaramente invarianti rispetto alle (6.76); il termine che non è invariante è il primo della (6.71), infatti:

$$\begin{aligned}\partial_i\phi'(x) &= e^{ie\lambda(x)}\partial_i\phi(x) + ie\phi(x)e^{ie\lambda(x)}\partial_i\lambda(x) \\ &= e^{ie\lambda(x)}[\partial_i + ie\partial_i\lambda(x)]\phi(x).\end{aligned}$$

Sostituendo allora in \mathcal{L}_s al posto di ∂_i la derivata covariante definita da

$$D_i = \partial_i - ieA_i(x),$$

si ottiene che

$$\mathcal{L}_s(x) + \mathcal{L}_{int}(x) = -\frac{1}{2}[(\partial_i + ieA^i)\phi^*(\partial_i - ieA_i)\phi + \mu^2\phi^*]$$

è invariante rispetto alle (6.76). Sottraendo da quest'ultima la (6.71) si ottiene

$$\mathcal{L}_{int}(x) = j^i(x)A_i(x),$$

dove

$$j^i(x) = ie(\phi(x)D^{i*}\phi^*(x) - \phi^*(x)D^i\phi(x)).$$

Ora \mathcal{L} permette di ricavare tramite le equazioni di Eulero-Lagrange sia l'equazione del campo elettromagnetico, sia quella del campo scalare carico in interazione con il campo elettromagnetico.

Il procedimento può essere utilizzato anche per un campo di Dirac in interazione con un campo elettromagnetico. Infatti, anche il termine di massa della lagrangiana del campo di Dirac (6.67) è invariante rispetto alle (6.76), a meno di sostituire ψ al posto di ϕ . Quindi, sostituendo nella (6.67) D_i al posto di ∂_i e sottraendo dal risultato ottenuto la lagrangiana libera nella forma (6.67), si ottiene che la densità di lagrangiana di interazione fra il campo fermionico e il campo elettromagnetico ha ancora la forma di una somma di lagrangiane relative a ciascun campo, ma con

$$j^i = ie\bar{\psi}\gamma^i\psi.$$

Questa rappresenta la giusta corrente vettoriale fermionica da accoppiare al campo vettoriale A_i per formare una lagrangiana scalare.

6.5.4 I bosoni intermedi

Il metodo con il quale sono stati introdotti i campi carichi come sorgenti del campo elettromagnetico può essere esteso e generalizzato. Sia ψ_α un qualunque campo rappresentante un insieme di particelle della stessa massa e caratterizzate da un certo numero di gradi di libertà

interni. Per costruire una teoria nella quale la lagrangiana \mathcal{L}_m risulti invariante rispetto alla trasformazione di gauge locale

$$\psi'_\alpha(x) = e^{-igT_k\lambda_k(x)}\psi_\alpha,$$

dove g è una costante e T_k sono gli n generatori di un certo gruppo di trasformazioni, bisogna utilizzare il seguente metodo. Poiché \mathcal{L}_m dipende sia dalle ψ_α che dalle sue derivate $\partial_j\psi_\alpha$, per rendere invariante la parte dipendente da ψ_α , che generalmente è contenuta nel termine di massa, basta non far comparire nella lagrangiana termini del tipo $\psi_\alpha\psi_\alpha$ o $\psi_\alpha^*\psi_\alpha^*$, ma solo termini del tipo $\psi_\alpha^*\psi_\alpha$. Per rendere invariante la parte dipendente dalle derivate, è invece necessario introdurre tanti campi vettoriali A_i^ν , con $\nu = 1, \dots, n$, quanti sono i generatori del gruppo T_i . Se tali campi sono invarianti rispetto ad una trasformazione di gauge opportuna, e quindi non dovendo contenere termini di massa devono avere massa nulla, allora, sostituendo in \mathcal{L}_m al posto delle ∂_i le derivate covarianti

$$D_i = \partial_i - igA_i^\nu T_\nu,$$

si ottiene una lagrangiana invariante per trasformazioni di gauge locali e una *teoria di gauge*.

Naturalmente, per ottenere la lagrangiana totale e da questa, tramite le equazioni di Eulero-Lagrange, le equazioni per i campi, è necessario aggiungere alla \mathcal{L}_m costruita con questo metodo anche la lagrangiana dei campi liberi A_i^ν . Le particelle vettoriali di massa nulla rappresentate dai campi di gauge A_i^ν sono dette *bosoni intermedi* o *bosoni di gauge*. Nel caso del campo elettromagnetico l'invarianza di gauge è supportata dalle trasformazioni unitarie in una dimensione U(1) (gruppo abeliano ad un solo parametro). Il gruppo delle trasformazioni unitarie unimodulari in due dimensioni SU(2), applicato ad una variabile interna dei leptoni e dei quark, detta *spin isotopico debole*, fornisce il più recente modello delle interazioni elettromagnetiche e deboli che prevede, oltre al fotone, altri tre bosoni intermedi: W^\pm e Z^0 . Il gruppo unitario unimodulare in tre dimensioni SU(3) applicato ad una variabile interna dei quark detta *carica di colore*, fornisce invece il modello più attendibile per le interazioni forti.

Capitolo 7

Le onde elettromagnetiche

7.1 L'equazione delle onde

Ora vogliamo determinare la soluzione più generale delle equazioni di Maxwell nel vuoto, cioè dove non ci sono né cariche né correnti, e far vedere che essa rappresenta delle onde che si propagano con velocità c .

Nel vuoto, dove il quadrivettore corrente è identicamente nullo, le equazioni di Maxwell assumono la forma

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ijkl} \partial_j F_{kl} &= 0, \\ \partial_j F^{ij} &= 0.\end{aligned}$$

Tuttavia, per i nostri scopi, converrà esprimere il primo gruppo di equazioni in termini del quadripotenziale:

$$\begin{aligned}F^{ij} &= \partial^i A^j - \partial^j A^i, \\ \partial_j F^{ij} &= 0.\end{aligned}$$

Sostituendo allora l'espressione di F^{ij} in termini del quadripotenziale nel secondo gruppo di equazioni otteniamo:

$$\partial_j [\partial^j A^i] - \partial^i [\partial_j A^i] = 0.$$

Ricordiamo ora che il quadripotenziale si può sempre pensare definito a meno di un'arbitraria trasformazione di gauge, $\hat{A}^j = A^j + \partial^j f$, dove f è una qualsiasi funzione delle coordinate, e di conseguenza è possibile imporre sul potenziale una condizione supplementare, detta *condizione di gauge*.

Possiamo allora utilizzare l'invarianza di gauge per imporre la seguente condizione sussidiaria sul potenziale, che ricordiamo essere la gauge di Lorentz:

$$\partial_j A^j = 0;$$

con questa gauge, dalle equazioni di Maxwell otteniamo:

$$\begin{aligned}\partial_j \partial^j A^i &= 0, \\ \partial_i A^i &= 0.\end{aligned}$$

Riconosciamo ora che

$$\partial_j \partial^j = \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right] = \square,$$

pertanto possiamo riscrivere le precedenti equazioni nella forma

$$\begin{aligned}\square A^i(x) &= 0, \\ \partial_i A^i(x) &= 0.\end{aligned}\tag{7.1}$$

7.2 Soluzione generale dell'equazione delle onde

Prima di discutere la soluzione generale di tali equazioni, consideriamo il caso particolare in cui il quadripotenziale sia indipendente dalle coordinate y e z . In questo caso, le componenti del potenziale soddisfano l'equazione di D'Alembert unidimensionale:

$$\left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] g(x, t) = 0.$$

La soluzione generale di questa equazione è una funzione del tipo

$$g(x, t) = g_1(x - ct) + g_2(x + ct),$$

cioè risultante dalla sovrapposizione di due onde che si propagano lungo l'asse x con velocità c , ma in versi opposti.

Per determinare la soluzione generale delle equazioni (7.1) useremo il metodo della trasformata di Fourier. Rappresentiamo allora la generica componente $A^i(x)$ come un integrale di Fourier

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k F^i(k) e^{-ik_j x^j},$$

dove k è una variabile quadridimensionale: $k \equiv (k^0, k^1, k^2, k^3)$, e $F^i(k)$ è la trasformata di Fourier di $A^i(x)$:

$$F^i(k) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 x A^i(x) e^{ik_l x^l}.$$

Vogliamo ora determinare quali sono le leggi di trasformazione delle $F^i(k)$, indotte dal fatto che le $A^i(x)$ si trasformano come dei campi quadrivettoriali. Limitiamoci per semplicità al caso delle trasformazioni di Lorentz delle coordinate quadridimensionali (escludendo cioè le traslazioni):

$$x'^i = \Lambda_j^i x^j.$$

In corrispondenza, il quadripotenziale sarà soggetto alla trasformazione

$$A'^i(x) = \Lambda_j^i A^j(x);$$

possiamo allora scrivere

$$A'^i(x') = \Lambda_j^i A^j(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 x \Lambda_j^i F^j e^{-ik_l x^l},\tag{7.2}$$

ma abbiamo anche che

$$A'^i(x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k' F'^i(k') e^{-k'_l x'^l}.\tag{7.3}$$

Osserviamo ora che, se definiamo $k'^i = \Lambda_j^i k^j$, tenendo conto del legame tra x' e x , possiamo scrivere

$$k'_l x'^l = k_l x^l ;$$

inoltre, abbiamo che

$$d^4 k' = |\text{Det } \Lambda| d^4 k = d^4 k ,$$

per cui otteniamo:

$$A'^i(x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k F'^j(\Lambda k) e^{-ik_l x'^l} . \quad (7.4)$$

Confrontando le due diverse espressioni (7.2) e (7.4) per le componenti $A'^i(x')$, possiamo scrivere

$$F'^l(\Lambda k) = \Lambda_j^i F^j(k) .$$

Dunque la trasformata di Fourier $F^i(k)$ di $A^i(x)$ per trasformazioni di Lorentz si trasforma come un campo vettoriale nella variabile quadridimensionale k .

Vediamo ora quale forma assumono le equazioni di partenza sostituendo agli $A^i(x)$ le loro rappresentazioni in integrali di Fourier. Abbiamo:

$$\partial_l A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k F^i(k) \frac{\partial}{\partial x^l} e^{-ik_j x^j} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k F^i(k) (-ik_l) e^{-ik_j x^j} ,$$

per cui

$$\partial^l \partial_l A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k F^i(k) (-ik_l) \frac{\partial}{\partial x^l} e^{-ik_j x^j} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k F^i(k) (-k_l k^l) e^{-ik_j x^j} .$$

Pertanto, posto $k^2 = k_l k^l = k_0^2 - |\mathbf{k}^2|$, possiamo scrivere la prima equazione nella forma

$$\square A^i(x) = -\frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4 k k^2 F^i(k) e^{-ik_l x^l} = 0 .$$

È allora immediato verificare che l'ultima equazione scritta è equivalente all'equazione

$$k^2 F^i(k) = 0 ,$$

che non è più un'equazione differenziale, ma una semplice equazione algebrica.

Con ragionamenti analoghi si può riscrivere la seconda equazione nella forma

$$\partial_i A^i(x) = -\frac{i}{(2\pi)^2} \int d^4 k F^i(k) k_i e^{ik_j x^j} = 0 ,$$

da cui è immediato ricavare

$$k_i F^i(k) = 0 .$$

Dal sistema iniziale siamo quindi passati al sistema

$$\begin{aligned} k^2 F^i(k) &= 0 , \\ k_i F^i(k) &= 0 , \end{aligned}$$

dove la prima delle equazioni ottenute ci dice che $F^i(k)$ è nulla ovunque, tranne per i punti dove si annulla k^2 ; tali punti costituiscono un ipercono nello spazio quadridimensionale; ma nello spazio quadridimensionale l'ipercono ha misura nulla per cui, se $F^i(k)$ è una funzione ordinaria, sarebbe nulla quasi ovunque, e quindi l'integrale

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k F^i(k) e^{ik_i x^j}$$

dovrebbe essere nullo per ogni x , il che non corrisponde alla situazione fisica che vogliamo descrivere. Siamo perciò costretti a ricorrere alle distribuzioni.

Si tratta ora di trovare la più generale distribuzione $F^i(k)$ il cui supporto sia contenuto nell'ipercono di equazione $k^2 = 0$ e che risolva l'equazione simbolica

$$k^2 F^i(k) = 0.$$

Tale distribuzione deve inoltre trasformarsi, per la trasformata di Lorentz, come un campo quadrivettoriale:

$$F'^i(\Lambda k) = \Lambda_j^i F^j(k).$$

Si dimostra allora che il supporto di tale distribuzione deve essere invariante per trasformazioni di Lorentz; ciò significa che $F^i(k)$ può avere per supporto l'intero ipercono o solamente l'origine. Distribuzioni che abbiano per supporto il cono $k^2 = 0$ sono

$$\delta(k^2), \quad \frac{d}{dk^2} \delta(k^2)$$

e le derivate successive. Distribuzioni che abbiano supporto solamente nell'origine sono

$$\delta^{(4)}(k), \quad \frac{\partial}{\partial k^i} \delta^{(4)}(k),$$

dove $\delta^{(4)}(k) = \delta(k^0) \delta(k^1) \delta(k^2) \delta(k^3)$, e le derivate successive.

Osserviamo che, in generale, le quantità

$$\frac{d^n}{(dk^2)^n} \delta(k^2)$$

non sono distribuzioni di $k^2 F^i(k) = 0$ perché per $n \geq 1$ si ha

$$k^2 \frac{d^n}{(dk^2)^n} \delta(k^2) \neq 0,$$

e dunque devono essere scartate. Richiedendo in più che $A^i(x) \rightarrow 0$ asintoticamente in direzioni di tipo spazio, si possono escludere anche tutte le derivate di $\delta^{(4)}(k)$ che siano eventualmente soluzioni dell'equazione $k^2 F^i(k) = 0$. Pertanto la forma più generale della distribuzione cercata è, con la condizione asintotica specificata,

$$\begin{aligned} F^i(k) &= G^i(k^0, \mathbf{k}) \delta(k^2), \\ k_i G^i(k^0, \mathbf{k}) \delta(k^2) &= 0. \end{aligned}$$

Tenendo presente la prima, la seconda diventa:

$$k_i G^i(k_0 \mathbf{k}) = 0,$$

per ogni k tale che $k^2 = 0$.

La soluzione generale pertanto ha la forma

$$F^i(k) = [G^i(k_0) \delta(k^2)]_{k_i G^i=0}.$$

In corrispondenza, per $A^i(x)$ avremo

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4k G^i(k_0, \mathbf{k}) \delta(k^2) e^{-ik_l x^l}.$$

Ricordando che dalla teoria delle distribuzioni si ha

$$\delta(k^2) = \delta(k_0^2 - |\mathbf{k}|^2) = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} (\delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|)),$$

sostituendo nell'espressione di $A^i(x)$ e integrando su k^0 si ottiene

$$\begin{aligned} A^i(x) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{dk^0}{2|\mathbf{k}|} (\delta(k_0 - |\mathbf{k}|) + \delta(k_0 + |\mathbf{k}|)) G^i(k_0, \mathbf{k}) e^{-ik_l x^l} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{1}{2|\mathbf{k}|} (G^i(|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) e^{-i|\mathbf{k}|ct} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + G^i(-|\mathbf{k}|, \mathbf{k}) e^{i|\mathbf{k}|ct} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{k}}). \end{aligned}$$

Posto $G_{\pm}^i(\mathbf{k}) = G^i(\pm|\mathbf{k}|, \mathbf{k})$, possiamo scrivere

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{1}{2|\mathbf{k}|} (G_+^i(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - |\mathbf{k}|ct)} + G_-^i(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + |\mathbf{k}|ct)}).$$

Riprendiamo ora la condizione $k_i G^i(k) = 0$, che esplicitata diventa:

$$k_0 G^0 = \mathbf{k} \cdot \mathbf{G},$$

da cui

$$G_{\pm}^0 = \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{G}_{\pm}}{k_0} = \pm \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{G}_{\pm}(k)}{|\mathbf{k}|}.$$

In forma compatta la soluzione generale delle equazioni di Maxwell nel vuoto (e con la gauge di Lorentz) si può scrivere

$$A^i(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left[\int d^3k \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (G_+^i(\mathbf{k}) e^{-i|\mathbf{k}|ct} + G_-^i(\mathbf{k}) e^{i|\mathbf{k}|ct}) \right]_{\substack{k^2=0 \\ k_i G^i=0}}.$$

Tale soluzione può essere pensata come una sovrapposizione di un'infinità di onde elementari del tipo

$$A_{el}^i(x) = [G_{(\pm)}^i(\mathbf{k}) e^{-ik_l x^l}]_{\substack{k^2=0 \\ k_i G^i=0}}. \text{tag3}$$

Vediamo ora come esplicitare la soluzione particolare soddisfacente a determinate condizioni iniziali, partendo da quella generale. Consideriamo ad esempio l'iperpiano di equazione $t = 0$ e su di esso assegnamo le seguenti condizioni:

$$A^i(\mathbf{x}, 0), \quad \frac{\partial}{\partial t} A^i(\mathbf{x}, 0).$$

A partire da ciò vogliamo determinare le funzioni $A^i(\mathbf{x}, t)$ per ogni valore di t . Per $t = 0$ la soluzione generale dell'equazione d'onda diventa

$$A^i(\mathbf{x}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{1}{2|\mathbf{k}|} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (G_+^i(\mathbf{k}) + G_-^i(\mathbf{k})),$$

e la sua derivata rispetto al tempo è

$$\frac{\partial}{\partial t} A^i(\mathbf{x}, 0) = \frac{-ic}{(2\pi)^2} \int d^3k \frac{1}{2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} (G_+^i(\mathbf{k}) - G_-^i(\mathbf{k})).$$

Uguagliando allora queste due espressioni alle condizioni assegnate e facendo l'antitrasformata di Fourier di entrambe, è possibile determinare le funzioni $G_+^i(k)$ e $G_-^i(k)$, e con ciò la soluzione particolare cercata. Le condizioni iniziali sono completamente arbitrarie: in particolare, possiamo scegliere $A^i(\mathbf{x}, 0)$ e $\partial_t A^i(\mathbf{x}, 0)$ diversi da zero solo in una regione finita dello spazio. Così facendo si ottengono i cosiddetti *pacchetti d'onda*. Quanto detto ha validità generale, e si applica ogniqualvolta si ha a che fare con un'equazione differenziale lineare. Nel nostro caso l'equazione era del secondo ordine nel tempo, e quindi occorre due condizioni iniziali.

Se invece avessimo avuto un'equazione del tipo

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \omega \nabla^0 \right] f(\mathbf{x}, t) = 0,$$

la soluzione generale avrebbe avuto la forma

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} g(\mathbf{k}) e^{i\omega(\mathbf{k})t},$$

e per determinare la soluzione particolare sarebbe bastata in questo caso la sola condizione iniziale $f(\mathbf{x}, 0)$.

7.3 Proprietà delle onde elettromagnetiche

In questo paragrafo dimostreremo che le onde elementari del paragrafo precedente godono delle seguenti proprietà:

- i.* sono onde piane,
 - ii.* sono onde che si muovono con velocità c nella direzione \mathbf{k} ,
 - iii.* sono onde monocromatiche,
 - iv.* sono onde polarizzate trasversalmente,
 - v.* sono tali che $|\mathbf{E}| = |\mathbf{H}|$ e che $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$.
- i.* Consideriamo allora il primo punto. È immediato verificare che l'onda ha lo stesso valore e la stessa fase in tutti i punti x dello spazio quadridimensionale, per cui possiamo porre

$$k_l x^l = \kappa,$$

dove κ è una costante prefissata, cioè $k_0 ct - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = \kappa$. Se poi fissiamo anche il valore di t , ossia ci poniamo in un dato istante di tempo, otteniamo:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = cost,$$

ma questa è proprio l'equazione di un piano normale al vettore \mathbf{k} . Pertanto, in un dato istante, le onde hanno la stessa fase in tutti i piani normali al vettore \mathbf{k} .

- ii. Mediante una pura rotazione spaziale possiamo porci in un riferimento inerziale con \mathbf{k} nella direzione e verso dell'asse x . Allora possiamo scrivere:

$$\mathbf{k} \equiv (|\mathbf{k}|, 0, 0)$$

e l'onda ha lo stesso valore e la stessa fase per tutte le x tali che

$$|\mathbf{k}|x - k_0 ct = cost.$$

Ricordando che deve essere $k_0^2 = |\mathbf{k}|^2$ possiamo scrivere

$$|\mathbf{k}|(x \pm ct) = cost.$$

Ma ciò significa che il piano di fase si propaga con velocità c parallelamente all'asse x , in verso discorde o concorde a seconda che valga il segno $+$ o il segno $-$.

- iii. Mettiamoci sempre nel riferimento in cui \mathbf{K} è diretto lungo l'asse x , per cui l'onda assume lo stesso valore in tutti i punti soddisfacenti l'equazione

$$|\mathbf{k}|x - ct = cost.$$

Mettiamoci poi ad un fissato istante di tempo \bar{t} . L'onda sarà allora una funzione periodica della variabile x , in quanto assumerà lo stesso valore ogni volta che la fase varia di 2π . Se x e x' sono due punti consecutivi dove l'onda all'istante t ha lo stesso valore, allora deve essere

$$|\mathbf{k}|x' - ck_0\bar{t} = |\mathbf{k}|x - ck_0\bar{t} = 2\pi,$$

cioè

$$x' - x = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}.$$

Si tratterà pertanto di un'onda monocromatica di lunghezza d'onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|}.$$

Se poi teniamo come variabile indipendente il tempo e ci poniamo in un fissato punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ dello spazio, possiamo calcolarci anche il periodo e la frequenza dell'onda. Questa volta l'onda sarà una funzione periodica della variabile t , riassumendo lo stesso valore ogni qualvolta la fase varia di 2π . Detti allora t e t' due istanti consecutivi in cui l'onda assume lo stesso valore, deve essere

$$|\mathbf{k}|\bar{x} - k_0 ct' = |\mathbf{k}|\bar{x} - k_0 ct - 2\pi,$$

e quindi

$$t' - t = \frac{2\pi}{k_0 c}.$$

Pertanto il periodo temporale dell'onda sarà dato da

$$T = \frac{2\pi}{|k_0|c} = \frac{2\pi}{|\mathbf{k}|c} = \frac{\lambda}{c},$$

e la sua frequenza da

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{|\mathbf{k}|c}{2\pi} = \frac{c}{\lambda}.$$

iv. Per mostrare che l'onda è polarizzata trasversalmente, calcoliamo i campi elettrico e magnetico e facciamo vedere che i vettori \mathbf{E} e \mathbf{H} sono entrambi sempre normali a \mathbf{k} , cioè che risulta sempre $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$ e $\mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = 0$. Prima di procedere, notiamo che la conclusione può essere ottenuta anche direttamente sostituendo l'espressione generale dei campi elettrici e magnetici elementari $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ nelle due equazioni di Maxwell nel vuoto $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$. Utilizziamo comunque il formalismo quadrivettoriale per giungere alla stessa conclusione. Per il tensore elettromagnetico abbiamo:

$$F^{ij} = \partial^i A^j - \partial^j A^i = -i(k^i G^j - k^j G^i) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}},$$

e per i campi

$$\begin{aligned} E^\alpha &= F^{\alpha 0} = -i(k^\alpha G^0 - k^0 G^\alpha) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}, \\ H^\alpha &= \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} F^{\beta\gamma} = -\frac{i}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} (k^\beta G^\gamma - k^\gamma G^\beta) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \\ &= -i \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} k^\beta G^\gamma e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (\mathbf{k} \times \mathbf{G})^\alpha. \end{aligned}$$

Pertanto, ricordando che $G^0 k_0 = \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} &= -i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \sum_{\alpha=1}^3 (k^\alpha G^\alpha - k^0 G^\alpha) k^\alpha = -i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} (|\mathbf{k}|^2 G^0 - k^0 \mathbf{G} \cdot \mathbf{k}) \\ &= -i e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \frac{1}{k_0} (|\mathbf{k}|^2 - k_0^2) \mathbf{G} \cdot \mathbf{k} = 0, \\ \mathbf{H} \cdot \mathbf{k} &= (\mathbf{k} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{k} = 0. \end{aligned}$$

v. Facciamo ora vedere che i campi elettrico e magnetico, calcolati nello stesso punto x dello spazio quadridimensionale, sono uguali in modulo ed ortogonali. In altre parole vogliamo dimostrare che

$$\begin{aligned} H^2 - E^2 &= 0, \\ \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} &= 0. \end{aligned}$$

Ricordiamo a questo proposito che

$$\begin{aligned} F^{ij} F_{ij} &= 2(H^2 - E^2), \\ \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} &= -8 \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}. \end{aligned}$$

Basta quindi far vedere che risulta

$$\begin{aligned} F^{ij} F_{ij} &= 0, \\ \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} &= 0. \end{aligned}$$

Per la prima relazione abbiamo:

$$\begin{aligned} e^{2ik_l x^l} F^{ij} F_{ij} &= (k^i G^j - k^j G^i)(k_i G_j - k_j G_i) = -(k^i G^i - k^j G^j)(2k_i G_j) \\ &= -2(k^2 G^2 - (k_i G^i)^2) = 0, \end{aligned}$$

mentre per la seconda, abbiamo:

$$\begin{aligned} e^{2ik_l x^l} \varepsilon^{ijkl} F_{ij} F_{kl} &= -\varepsilon^{ijkl} (k_i G_j - k_j G_i)(k_k G_l - k_l G_k) \\ &= -4\varepsilon^{ijkl} k_i k_k G_j G_l = 0. \end{aligned}$$

7.3.1 L'effetto Doppler

Per finire, discutiamo brevemente l'effetto Doppler. Sia S una sorgente di onde elettromagnetiche in movimento con velocità \mathbf{v} rispetto ad un osservatore inerziale K . Sia ν la frequenza di tali onde misurata in K e ν_0 la frequenza propria di tali onde, misurata nel sistema a riposo K_0 di S . Dalle formule delle trasformazioni di Lorentz si ha:

$$k_0^0 = \gamma(k^0 - \beta k \cos \alpha),$$

dove $\beta = |\mathbf{v}|/c$, $k = |\mathbf{k}|$ e α è l'angolo tra \mathbf{v} e \mathbf{k} . Poiché $k^0 = k = 2\pi\nu/c$, dalla precedente equazione si ha

$$\nu = \frac{1}{\gamma(1 - \beta \cos \alpha)} \nu_0,$$

che è la formula dell'effetto doppler.

Capitolo 8

Coniugazione di carica, parità e inversione del tempo

8.1 La coniugazione della carica

Sappiamo che tutte le particelle sono rappresentate da una funzione di campo $\psi(x)$ le cui proprietà di trasformazione dipendono dalle caratteristiche intrinseche della particella stessa. Tale funzione può essere reale o complessa. Se la funzione di campo $\psi(x)$ è complessa, allora oltre alla particella esiste anche l'antiparticella che ha la stessa massa e lo stesso spin ed è rappresentata essenzialmente dal campo complesso coniugato $\psi^*(x)$. Se la funzione di campo è reale, allora particella e antiparticella coincidono.

In generale tutti i fermioni (barioni e leptoni) sono rappresentati da funzioni spinoriali che sono entità complesse, per cui essi hanno un'antiparticella distinta da se stessi. Il fotone e l'antifotone invece coincidono in quanto le componenti del campo elettromagnetico $A_i(x)$ sono delle quantità reali. I bosoni carichi hanno tutti un'antiparticella distinta, così il π^- è l'antiparticella del π^+ , il K^- del K^+ , la ϱ^- della ϱ^+ , ecc. Diverso è invece il discorso per i bosoni neutri, in quanto alcuni di essi, come il fotone e il π^0 , sono antiparticelle di se stessi, mentre altri, come il K^0 , hanno una antiparticella distinta (\bar{K}^0) e quindi sono rappresentati da funzioni di campo complesse.

La *coniugazione di carica* è l'operazione che consiste nel sostituire ovunque nelle equazioni del moto le particelle con le antiparticelle e viceversa. Indicando con C l'operatore unitario che trasforma una particella nella sua antiparticella, nel caso di un campo scalare scarico $\phi(x)$ si ha:

$$C\phi(x)C^\dagger = \eta_C\phi^*(x), \quad C\phi^*(x)C^\dagger = \eta_C^*\phi(x), \quad (8.1)$$

da cui si ottiene:

$$C(C\phi(x)C^\dagger)C^\dagger = \eta_C C\phi^*(x)C^\dagger = |\eta_C|^2\phi(x) = \phi(x),$$

per cui η_C è un numero di modulo unitario. Notiamo che, poiché l'antiparticella ha carica opposta a quella della particella, dalle equazioni che forniscono la *stranezza* s e l'*ipercarica* y di una particella

$$s = 2 \left(q - t_3 - \frac{N}{2} \right) = y - N, \quad y = 2(q - t_3),$$

(dove q è la carica, t_3 la terza componente dello *spin isotopico* ed N il numero barionico, e cioè il numero di barioni meno il numero di antibarioni) si ricava che gli antiadroni devono avere stranezza e terza componente dello spin isotopico opposte a quelle dei corrispondenti adroni. Gli adroni che sono rappresentati da funzioni di campo reali devono avere stranezza e spin isotopico nulli.

Nel caso dei campi spinoriali l'operazione di coniugazione di carica è più complicata.

8.1.1 La coniugazione di carica in elettrodinamica

È facile rendersi conto che la lagrangiana del campo elettromagnetico in presenza di una sorgente scalare, data da $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_{em}(x) + \mathcal{L}_s(x) + \mathcal{L}_{int}(x)$, è invariante rispetto alla trasformazione (8.1) purché

$$CA_i(x)C^\dagger = -A_i(x). \quad (8.2)$$

Inoltre, da $j^i(x) = ie[\phi^*(x)\partial^i\phi(x) - \phi(x)\partial^i\phi^*(x)]$ si ha anche che

$$Cj_i(x)C^\dagger = -j_i(x). \quad (8.3)$$

In generale si può poi dimostrare che la lagrangiana del campo elettromagnetico è invariante rispetto alla coniugazione di carica anche se la sorgente è di tipo spinoriale. Possiamo allora concludere che

$$[C, H_{em}] = 0,$$

dove H_{em} è l'hamiltoniano del campo elettromagnetico, per cui l'operatore C può essere diagonalizzato assieme ad H_{em} e il suo autovalore, chiamato *parità di carica* (o *C-parità*) si conserva nelle interazioni elettromagnetiche.

A causa della (8.3), se indichiamo con Q l'operatore carica elettrica, si ottiene che

$$CQC^\dagger = -Q, \quad (8.4)$$

e di conseguenza gli unici stati di carica definita che sono anche autostati di C sono quelli per i quali $Q = 0$.

Facciamo alcuni esempi. Consideriamo dapprima lo stato di n fotoni: per la (8.2) si ottiene

$$C|n\gamma\rangle = (-1)^n|n\gamma\rangle, \quad (8.5)$$

cioè uno stato con un numero quantico pari di fotoni ha parità di carica 1, mentre uno stato con un numero dispari di fotoni ha parità di carica -1 .

Consideriamo poi un sistema costituito da un bosone b e da un antibosone \bar{b} . Si ottiene:

$$C|b + \bar{b}\rangle = |\bar{b} + b\rangle,$$

dove il segno a secondo membro è determinato dalle proprietà di simmetria dello stato dei due bosoni. Scambiando ora le posizioni e gli spin delle due particelle, dobbiamo moltiplicare per $(-1)^l$ per lo scambio della posizione e per $(-1)^s$ per lo scambio degli spin e si ottiene:

$$|\bar{b} + b\rangle = (-1)^{l+s}|b + \bar{b}\rangle, \quad (8.6)$$

dove l è il momento angolare relativo ed s è lo spin totale del sistema. Quindi

$$C|b + \bar{b}\rangle = (-1)^{l+s}|b + \bar{b}\rangle. \quad (8.7)$$

Consideriamo infine un sistema cosistito da un fermione f e da un antifermione \bar{f} . Per l'antisimmetria dello stato si ha:

$$C|f + \bar{f}\rangle = -|\bar{f} + f\rangle.$$

Scambiando la posizione e gli spin come prima, si ottiene:

$$|f + \bar{f}\rangle = -(-1)^{l+s}|\bar{f} + f\rangle, \quad (8.8)$$

e di conseguenza anche in questo caso

$$C|f + \bar{f}\rangle = (-1)^{l+s}|f + \bar{f}\rangle. \quad (8.9)$$

Mediante le relazioni (8.5), (8.7) e (8.9) si possono poi ricavare le regole di selezione.

È noto che il π^0 decade in due γ . Poiché il π^0 è un autostato di C , allora per la (8.5) deve essere

$$C|\pi^0\rangle = |\pi^0\rangle, \quad (8.10)$$

cioè la parità di carica del π^0 è 1.

Una coppia elettrone-positrone può formare uno stato chiamato *positronio*; nello stato 1S_0 ($l = 0, s = 0$), l'autovalore di C del positronio è 1 (basta ricordare la (8.9) e quindi, per la (8.5) deve decadere in un numero pari di fotoni. Nello stato 3S_1 ($l = 0, s = 1$) deve invece decadere in un numero dispari di fotoni.

8.1.2 La coniugazione di carica nelle interazioni forti

Mentre l'invarianza dell'elettromagnetismo rispetto alla coniugazione di carica è palese, nel caso delle interazioni forti tale invarianza viene invece postulata. L'esperienza dimostra infatti che in tutti i processi forti che provocano transizioni fra stati di parità di carica definita, questa si conserva.

Uno dei sistemi adronici a parità di carica definita più interessanti è quello formato da un protone e da un antiprotone. La parità di carica di tale sistema dipende dal suo momento angolare orbitale e dal valore dello spin totale (equazione (8.9)). Nell'urto nucleone-antinucleone si possono ottenere stati finali di più pioni. Per la conservazione della carica, i possibili stati sono:

$$\begin{aligned} p + \bar{p} &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 \\ &\rightarrow \pi^+ + \pi^- \\ &\rightarrow \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 \\ &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^0 \end{aligned} \quad (8.11)$$

Tenendo conto che il π^0 ha parità di carica positiva e che quella della coppia $\pi^+ + \pi^-$ è $(-1)^l$, mediante il principio di conservazione della parità di carica si possono determinare delle regole di selezione fra i processi (8.11). Senza riportare la tabella completa di tutti i casi possibili, consideriamo come esempio la prima reazione delle (8.11). Se l'annichilazione avviene in uno stato 3S_1 , la parità di carica dello stato iniziale è negativa ed essendo quella dello stato finale positiva tale processo è proibito. Se l'annichilazione avviene invece nello stato 1S_0 , la parità di carica dello stato iniziale è positiva e la reazione, per la parità di carica, sarebbe consentita. È invece proibita dalla conservazione della parità spaziale e del momento angolare: infatti, la parità spaziale dello stato iniziale è uguale a -1, in quanto gli antifermioni hanno parità opposta a quella dei fermioni, mentre quella dello stato finale è $(-1)^l$, che è negativa solo per l dispari e ciò è impossibile sia per la conservazione del momento angolare totale (lo stato iniziale ha momento angolare nullo), sia per il fatto che la funzione d'onda di due pioni identici deve essere simmetrica rispetto allo scambio delle loro posizioni. Quindi l'annichilazione protone-antiprotone negli stati 3S_1 ed 1S_0 non può avvenire in due pioni neutri.

8.1.3 La coniugazione di carica nelle interazioni deboli

Si può facilmente vedere che, se i neutrini hanno un'elicità definita, non solo la parità spaziale, ma anche la parità di carica non si conserva nelle interazioni deboli. Infatti, l'azione dell'operatore C è quella di trasformare una particella nella sua antiparticella senza variarne l'elicità. I neutrini levogiri verrebbero quindi trasformati in antineutrini levogiri, che non sono mai stati trovati in natura. I processi fisici che coinvolgono i neutrini e, in generale, tutti i processi che avvengono tramite interazioni deboli, violano quindi la C -parità. Come vedremo, l'applicazione dell'inversione spaziale e della coniugazione di carica produce processi fisicamente possibili. In questo modo fermioni levogiri vengono trasformati in antifermioni destrigiri che interagiscono con uguale intensità.

8.2 Il numero barionico

Assegnando ad ogni reazione i seguenti valori del *numero barionico* N : $N = 1$ per ogni barione, $N = -1$ per ogni antibarione e $N = 0$ per tutte le altre particelle adroniche e leptoniche, l'esperienza dimostra che *il numero barionico totale, definito come la somma dei numeri barionici di tutte le particelle del sistema, si conserva in tutte le interazioni forti, deboli ed elettromagnetiche.*

Se N si conserva, sono rigorosamente vietate reazioni del tipo

$$p \rightarrow e^+ + \gamma, \quad p \rightarrow \mu^+ + \gamma, \quad p \rightarrow \pi^0 + e^+,$$

per cui la stabilità del protone sarebbe una conseguenza della conservazione del numero barionico. Il limite sperimentale della vita media del protone è $\tau > 5.5 \cdot 10^{32}$ anni.

8.3 I numeri leptonici

Se si assegna ad ogni leptone un *numero leptonico* L_e , un *numero leptonico* L_μ e un *numero leptonico* L_τ , l'esperienza dimostra che *i numeri leptonici, definiti come somma dei numeri leptonici di tutte le particelle del sistema, si conservano separatamente*. La somma $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ è detta semplicemente *numero leptonico* e gli L_l indicano ciascuno una delle tre famiglie di leptoni, ognuna delle quali possiede una specifica legge di conservazione.

In alcune reazioni si osserva che nel decadimento β del neutrone e nei decadimenti β^- dei nuclei, sono emessi antineutrini, mentre nei decadimenti β^+ dei nuclei,

$$M(A, Z) \rightarrow M(A, Z - 1) + e^+ + \nu_e ,$$

vengono emessi neutrini.

I limiti superiori che si ricavano sperimentalmente per la violazione di queste leggi di conservazione sono molto piccoli: ad esempio, se indichiamo con P la probabilità di transizione di una reazione si trova che

$$\frac{P(\mu^\pm \rightarrow e^+ + \gamma)}{P(\mu^\pm \rightarrow \text{tutti i canali})} < 5 \cdot 10^{-11} .$$

8.4 La parità

Sia H l'hamiltoniana di un sistema di n particelle funzione delle coordinate spaziali \mathbf{r}_i ($i = 1, \dots, n$) delle quantità di moto \mathbf{p}_i e degli spin \mathbf{s}_i . Se la teoria è invariante rispetto alle riflessioni spaziali, per le equazioni (6.58) e (6.59) che qui ricordiamo,

$$P^{-1} \mathbf{x} P = -\mathbf{x} , \quad P^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}) P = \mathbf{f}(-\mathbf{x}) ,$$

dove P è l'operatore parità e $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ è una qualunque funzione e

$$P^{-1} \boldsymbol{\sigma} P = \boldsymbol{\sigma} , \quad P^{-1} \mathbf{p} P = -\mathbf{p} ,$$

allora deve essere:

$$H(-\mathbf{r}_i, -\mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i) = H(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, \mathbf{s}_i) ,$$

e cioè

$$P H P^{-1} = H . \tag{8.12}$$

Poiché $P^2 = 1$, gli autovalori di P sono ± 1 , per cui ogni livello non degenere di un'hamiltoniana invariante rispetto alle riflessioni spaziali ha quindi una parità definita che si conserva.

La parità della funzione di campo di una particella definisce la sua *parità intrinseca*; sia, per esempio, $\psi(\mathbf{r}, t)$ un campo bosonico. In generale si ha che

$$P \psi_k(\mathbf{r}, t) P^{-1} = \psi_k(-\mathbf{r}, t) = p \psi_k(\mathbf{r}, t) , \tag{8.13}$$

dove

$$k = \begin{cases} 0 & \text{per particelle scalari o pseudoscalari} \\ 1, 2, 3 & \text{per particelle vettoriali o pseudovettoriali} \end{cases}$$

e p rappresenta la parità intrinseca della particella. Nel caso di una particella scalare o pseudovettoriale si ha $p = +1$, mentre nel caso di una particella pseudoscalare o vettoriale $p = -1$.

Poiché P commuta con C , tenuto conto delle (8.1) e (8.13), si ottiene

$$\begin{aligned} P\psi_k^*(\mathbf{r}, t)P^{-1} &= \eta_C^* P(C\psi_k(\mathbf{r}, t)C^{-1})P^{-1} \\ &= \eta_C^* C(P\psi_k(\mathbf{r}, t)P^{-1})C^{-1} \\ &= p\eta_C^* C\psi_k(\mathbf{r}, t)C^{-1} = p\psi_k^*(\mathbf{r}, t), \end{aligned}$$

cioè le particelle e le antiparticelle bosoniche hanno la stessa parità intrinseca, mentre i fermioni e gli antifermioni hanno parità opposta, come si vede analizzando la (6.61) $P^{-1}\psi P = \beta\psi$.

Fino al 1957, l'invarianza delle leggi fisiche rispetto alle riflessioni spaziali era ritenuta una delle simmetrie esatte della natura, ma in tale anno risultò invece che questa ipotesi era errata. Infatti, mentre le interazioni forti ed elettromagnetiche sono effettivamente invarianti rispetto alle riflessioni e quindi conservano la parità totale del sistema, le interazioni deboli non lo sono. È stata proprio la scoperta della non conservazione della parità nelle interazioni deboli che ha permesso quello sviluppo del settore che ha portato al modello di Weinberg-Salam.

8.4.1 La parità nelle interazione elettromagnetiche e forti

L'invarianza rispetto alle riflessioni spaziali permette di attribuire ad ogni stato del sistema una parità definita e quindi di ricavare delle regole di selezione dalla sua conservazione. Elencheremo qui e di seguito alcune di queste regole che riguardano ovviamente le sole interazioni elettromagnetiche e forti e che sono state tutte confermate dall'esperienza.

- i.* Uno stato atomico o nucleare di parità definita non può avere momento di dipolo elettrico. Infatti il momento di dipolo elettrico è il valore medio dell'operatore $\mathbf{D}_e = \sum_i e_i \mathbf{r}_i$ e, se lo stato ha parità definita, la quantità

$$\langle \mathbf{D}_e \rangle = \int \psi^* \sum_i e_i \mathbf{r}_i \psi d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_n$$

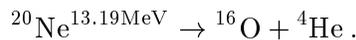
è nulla in quanto la funzione integranda è dispari in almeno una delle sue coordinate.

- ii.* Le transizioni elettromagnetiche con emissione o assorbimento di un fotone in un atomo o in un nucleo atomico avvengono prevalentemente fra stati di parità opposta. Infatti l'elemento di matrice che regola le transizioni più probabili di dipolo elettrico fra due stati di n particelle è proporzionale all'integrale

$$\int \psi_b^* \sum_i e_i \mathbf{r}_i \psi_a d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_n,$$

che è nullo se i due stati hanno la stessa parità.

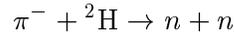
- iii.* Se le interazioni forti sono invarianti rispetto alle riflessioni, ogni livello nucleare non degenere ha parità definita. Consideriamo ad esempio il decadimento α dello stato eccitato $^{20}\text{Ne}^{13.19\text{MeV}}$



Il neon ha spin 1 e parità positiva e sia l'ossigeno che l'elio hanno spin nullo e parità positiva. Poiché la conservazione del momento angolare totale impone $l = 1$, la parità dello stato finale è negativa in quanto la parità delle funzioni sferiche è $(-1)^l$. Il decadimento è allora proibito.

iv. Utilizzando il principio di conservazione della parità è possibile misurare la parità intrinseca di alcune particelle coinvolte in una reazione.

È stato visto che i pioni hanno spin nullo e spin isotopico 1, per cui sono rappresentati da una funzione scalare o pseudoscalare nello spazio ordinario e da una funzione vettoriale nello spazio della carica. Per stabilire se una funzione debba essere scalare o pseudoscalare è necessario determinarne la parità. Ciò può essere fatto mediante l'osservazione della reazione di cattura K:



Poiché il pione ha spin nullo e il deutone ha spin 1, dalla conservazione del momento angolare risulta che il momento angolare totale dei due neutroni nello stato finale deve essere 1. Quindi, se si trovano in uno stato di singoletto (spin totale nullo) deve essere $l_f = 1$, mentre se si trovano in uno stato di tripletto (spin totale 1) può essere $l_f = 0, 1, 2$. D'altra parte gli stati finali accessibili devono essere compatibili con il principio di Pauli

$$s + l + t = \text{dispari},$$

per cui, essendo i due neutroni in uno stato di spin isotopico totale 1, l'unico stato finale possibile è quello di tripletto con $l_f = 1$. Ne consegue che la parità dello stato finale deve essere negativa, così come quella del pione.

Notiamo che per determinare la parità intrinseca di una particella tramite una reazione come quella citata, è necessario conoscere la parità delle altre. In effetti, la parità intrinseca ha senso solo se misurata relativamente a quella di un'altra particella. Per convenzione tutte le parità sono fissate rispetto a quelle dei nucleoni e della Λ^0 e sono supposte positive.

8.4.2 La parità nelle interazioni deboli

Consideriamo i principali modi di decadimento dei mesoni K^\pm :

$K^\pm \rightarrow \mu^\pm + \nu$	63.0%
$\rightarrow \pi^\pm + \pi^0$	21.0%
$\rightarrow \pi^\pm + \pi^\pm + \pi^\mp$	5.6%
$\rightarrow \pi^0 + e^\pm + \nu$	4.8%
$\rightarrow \pi^0 + \mu^\pm + \nu$	3.2%
$\rightarrow \pi^\pm + \pi^0 + \pi^0$	1.7%

dove per semplicità i neutrini e gli antineutrini sono stati indicati genericamente con il simbolo ν : per avere le giuste attribuzioni bisogna tener conto della conservazione dei numeri leptonici.

Come si può osservare, i mesoni K carichi possono decadere in due pioni. Questo fatto indica che l'interazione debole, responsabile di tale decadimento, non conserva la parità. Per rendersene conto, ricordiamo che sia i K che i pioni hanno spin nullo per cui, per la conservazione del momento angolare totale, il momento angolare orbitale relativo dei due pioni nel decadimento

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0 \quad (8.14)$$

deve essere nullo. Quindi, se la parità si conserva, il K^\pm , che decade secondo la (8.14), dovrebbe avere parità positiva. Considerando invece la reazione

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^+ + \pi^-, \quad (8.15)$$

si vede che nello stato finale sono coinvolti due momenti angolari orbitali l_1 ed l_2 . Poiché il momento angolare totale finale deve essere nullo, deve essere $l_1 = l_2$ e di conseguenza la parità del K che decade secondo la (8.15) deve essere negativa, in quanto nello stato finale vi sono un numero dispari di pioni di parità intrinseca negativa.

Prima del 1957 la conservazione della parità era ritenuta valida anche nelle interazioni deboli, per cui i due decadimenti (8.14) e (8.15) venivano attribuiti a due particelle di parità diversa chiamate rispettivamente θ e τ . Risultò però piuttosto sorprendente che tali particelle avessero la stessa massa, lo stesso spin e la stessa vita media. I fisici Lee e Yang risolsero il problema ipotizzando la non conservazione della parità nelle interazioni deboli e suggerendo un gran numero di esperimenti atti a verificare questa ipotesi.

8.4.3 Il decadimento β

L'esperimento che per la prima volta dimostrò la non conservazione della parità nelle interazioni deboli riguarda il decadimento β del ^{60}Co e fu fatto da Wu, Ambler, Hayward, Hoppes e Hudson nel 1957. Prima di esporlo sommariamente è necessario dare alcune generalità sul decadimento β che, sin dalla sua scoperta nel 1919 ad opera di Chadwick, è sempre stato considerato un importante banco di prova per l'interpretazione dei modelli delle interazioni deboli.

I primi processi attribuiti alle interazioni deboli furono proprio decadimenti del tipo

$$\begin{aligned} {}^A\text{X}_Z &\rightarrow {}^A\text{X}_{Z+1} + e^- + \bar{\nu}_e \\ {}^A\text{X}_Z &\rightarrow {}^A\text{X}_{Z-1} + e^+ + \nu_e \end{aligned} \quad (8.16)$$

Che in tali reazioni venisse emesso un neutrino fu comunque un'ipotesi formulata da Pauli nel 1930 e che rimase tale per parecchi anni. Infatti, se il nucleo decadde in due soli corpi, gli elettroni emessi dovrebbero essere monoenergetici, mentre invece il loro spettro energetico è continuo, come è stato dimostrato per la prima volta proprio da Chadwick. Naturalmente, i decadimenti (8.16) sono spontanei solo se la massa del nucleo iniziale è superiore alla somma delle masse delle tre particelle finali. Per questa ragione, il più semplice decadimento β^-

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \quad (8.17)$$

avviene spontaneamente con una vita media di $887.0 \pm 2.0s$, mentre il corrispondente decadimento del protone

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e \quad (8.18)$$

è reso più difficile dalla differenza di massa fra i due nucleoni. Lo studio del decadimento β permette anche di stabilire che il neutrino è un fermione la cui massa è molto piccola.

Poichè l'interazione è debole, la vita media dei processi (8.16) può essere calcolata usando la teoria delle perturbazioni e precisamente mediante la *regola d'oro*

$$P = \frac{2\pi}{\hbar} \langle k_f | H_1 | k_i \rangle^2 \rho(\mathcal{E}_t, k_i).$$

Da $\tau = 1/P$ si ha che

$$\frac{1}{\tau} = P = \frac{2\pi}{\hbar} \int \langle Z \pm 1 | H_\beta | Z \rangle^2 d \frac{d\rho(\mathcal{E}_t)}{d\mathcal{E}_t}, \quad (8.19)$$

dove \mathcal{E}_t è l'energia totale a disposizione delle particelle nello stato finale e i due segni si riferiscono alle due possibilità β^\pm .

Procediamo ora con il calcolo della *densità degli stati* della (8.19). Prima di tutto si scrive il principio di conservazione dell'energia:

$$\mathcal{E}_t = (M(A, Z) - M(A, Z \pm 1))c^2 = E(A, Z \pm 1) + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_\nu,$$

dove \mathcal{E}_e ed \mathcal{E}_ν sono rispettivamente l'energia totale dell'elettrone e l'energia totale del neutrino, mentre $E(A, Z \pm 1)$ è l'energia cinetica del nucleo finale. Poiché questo ha una massa molto più grande delle altre due particelle, $E(A, Z \pm 1)$ può essere trascurata ($E = \mathcal{E} - mc^2$) e quindi approssimativamente si ha che

$$\mathcal{E}_t = (M(A, Z) - M(A, Z \pm 1))c^2 \simeq \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_\nu. \quad (8.20)$$

Il numero di stati nei quali il neutrino ha una quantità di moto compresa entro $d\mathbf{p}_\nu$ è dato da

$$d\rho(\mathcal{E}_t) = \frac{d\mathbf{p}_\nu d\mathbf{p}_e}{(2\pi\hbar)^6} V^2 = \frac{V^2}{(2\pi\hbar)^6} p_\nu^2 p_e^2 dp_\nu dp_e d\Omega_\nu d\Omega_e,$$

dove il volume è normalizzato a V . Tenuto conto della (8.20) si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\nu &= cp_\nu = \mathcal{E}_t - \mathcal{E}_e, & c dp_\nu &= d\mathcal{E}_t, \\ \mathcal{E}_e &= \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4}, & c^2 p_e^2 dp_e &= p_e \mathcal{E}_e d\mathcal{E}_e. \end{aligned}$$

Quindi la densità di stati finali per unità di intervallo sarà

$$d \frac{d\rho(\mathcal{E}_t)}{d\mathcal{E}_t} = \frac{V^2}{(2\pi\hbar c)^6} (\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_e)^2 \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2 c^4} \mathcal{E}_e d\mathcal{E}_e d\Omega_\nu d\Omega_e. \quad (8.21)$$

Supponiamo per ora costante l'elemento di matrice; ricordando questa equazione e integrando sugli angoli, la (8.19) diviene

$$\frac{1}{\tau} = P \simeq \frac{m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^7} V^2 \langle Z \pm 1 | H_\beta | Z \rangle^2 f(x_m), \quad (8.22)$$

dove

$$f(x_m) = \int_1^{x_m} (x_t - x_e)^2 \sqrt{x_e^2 - 1} x_e dx_e, \quad (8.23)$$

con $x_t = \mathcal{E}_t/m_e c^2$, $x_e = \mathcal{E}_e/m_e c^2$, $x_m = \mathcal{E}_m/m_m c^2$ ed \mathcal{E}_m è la massima energia dell'elettrone. La (8.22) è approssimativamente valida per il decadimento β del neutrone. Per il nucleo l'energia massima \mathcal{E}_m è uguale alla differenza tra le masse del nucleo iniziale e di quello finale. L'integrale nello spazio delle fasi (8.23) viene modificato dall'interazione coulombiana tra la carica dell'elettrone o del positrone, a seconda del tipo di decadimento, e la carica del nucleo finale $Z' = Z \pm 1$. Questo effetto è descritto da una funzione $F(Z', \mathcal{E}_e)$ della quale non scriveremo l'espressione. Quindi, per il nucleo, la funzione dello spazio delle fasi diventa

$$f(Z', x_m) = \int_1^{x_m} F(Z', \mathcal{E}_e) (x_t - x_e)^2 \sqrt{x_e^2 - 1} x_e dx_e, \quad (8.24)$$

che può essere calcolata con grande accuratezza.

Il prodotto del tempo di dimezzamento $t_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$ per la $f(Z', x_m)$ va sotto il nome di valore ft e, dalla (8.22), risulta inversamente proporzionale all'elemento di matrice. I valori ft coprono una scala molto vasta: essi infatti vanno da 10^3 a 10^{22} secondi.

Passiamo ora a considerare l'elemento di matrice. Secondo la teoria di Fermi, fino all'ordine più basso nella costante di interazione, il processo (8.17) di decadimento del neutrone avviene con un'interazione diretta fra i campi ψ_n , ψ_p , ψ_e e ψ_ν delle quattro particelle coinvolte. Ciò equivale a prendere per H_β un operatore fenomenologico del tipo

$$C_S \int ((\bar{\psi}_p \psi_n)(\bar{\psi}_e \psi_\nu) + C_h) dV,$$

dove C_S è una costante, C_h sta per complesso hermitiano e dV indica l'integrazione su tutte le coordinate spaziali dalle quali dipendono le funzioni di campo. Scritto in questo modo, H_β è il prodotto di una corrente adronica scalare $j_{adr} = \bar{\psi}_p \psi_n$ per una corrente leptonica anch'essa scalare $j_{lep} = \bar{\psi}_e \psi_\nu$, il che fornisce un'hamiltoniana scalare. Tramite le funzioni di campo delle quattro particelle si possono formare anche correnti pseudovettoriali, vettoriali, assiali e tensoriali, per cui un'hamiltoniana scalare può essere costruita anche facendo il prodotto di una corrente adronica con un certo tipo di accoppiamento per una corrente leptonica con lo stesso tipo di accoppiamento. Risultano quindi cinque possibilità e la più generale hamiltoniana fenomenologica del decadimento β può essere scritta nel modo seguente:

$$H_\beta = C_S H_S + C_{PS} H_{PS} + C_V H_V + C_A H_A + C_T H_T, \quad (8.25)$$

nelle quali, se la teoria è invariante rispetto all'inversione del tempo, le C_i sono costanti reali e

dove

$$\begin{aligned}
H_S &= \int ((\bar{\psi}_p \psi_n)(\bar{\psi}_e \psi_\nu) + C_h) dV \\
H_{PS} &= \int ((\bar{\psi}_p \gamma_5 \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_5 \psi_\nu) + C_h) dV \\
H_V &= \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \psi_\nu) + C_h) dV \\
H_A &= \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i \gamma_5 \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \gamma_5 \psi_\nu) + C_h) dV \\
H_T &= \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i \gamma_j \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \gamma_j \psi_\nu) + C_h) dV
\end{aligned} \tag{8.26}$$

L'elemento di matrice che compare nella (8.19) non è altro che il valor medio dell'operatore (8.25) fra gli stati iniziale e finale $|Z\rangle$ e $|Z \pm 1\rangle$. Per calcolarlo è necessario fare alcune ipotesi semplificative che permettono di classificare i vari tipi di transizioni β .

Innanzitutto osserviamo che la velocità dei nucleoni all'interno di un nucleo è un ordine di grandezza inferiore alla velocità della luce e quindi il moto dei nucleoni può essere trattato in approssimazione non relativistica. Si può far vedere che, in tale approssimazione, l'accoppiamento pseudoscalare può essere trascurato in quanto dell'ordine di v_e/c rispetto a quello scalare. Rimangono solo i quattro accoppiamenti scalare, vettoriale, assiale e tensoriale. Poiché le funzioni di campo dell'elettrone e del neutrino hanno la forma delle onde piane

$$\psi_e = u_e e^{i\mathbf{k}_e \cdot \mathbf{r}}, \quad \psi_\nu = u_\nu e^{i\mathbf{k}_\nu \cdot \mathbf{r}},$$

in tutte le funzioni integrande (8.26) compare il fattore $e^{-i(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}}$. L'esponenziale può essere quindi sviluppato in serie ottenendo

$$e^{-i(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}} = 1 - i(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{2}((\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r})^2 + \dots$$

Essendo $l = |(\mathbf{k}_e - \mathbf{k}_\nu) \cdot \mathbf{r}|$, la precedente relazione non è altro che uno sviluppo in serie in termini del momento angolare relativo tra i due leptoni. Dato che le quantità di moto in gioco sono al massimo di qualche MeV/c e che il raggio nucleare è di qualche fm, allora kR deve essere dell'ordine di 10^{-2} . Poiché nella (8.19) l'elemento di matrice compare a quadrato, per ogni unità di momento angolare si ha una soppressione della probabilità di transizione di un fattore dell'ordine di 10^{-4} .

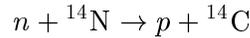
I decadimenti β per i quali $l = 0$ (il fattore esponenziale della funzione integranda nelle (8.26) viene posto uguale ad 1), sono detti *permessi*, quelli con $l = 1$ sono detti *proibiti* e quando $l = 2$ si parla di *decadimenti doppiamente proibiti*. Se l è dispari la parità della funzione d'onda nucleare cambia, mentre se è dispari si conserva.

Consideriamo le transizioni permesse. Poiché i due leptoni hanno spin semintero, essi possono venir emessi in uno stato di spin totale 0 (spin antiparalleli) o 1 (spin paralleli). Si può dimostrare che nel primo caso sopravvivono solo gli accoppiamenti scalare e vettoriale, i quali comportano anche l'uguaglianza dei momenti angolari (spin) del nucleo iniziale e finale. Sono queste le cosiddette *transizioni di Fermi* che comportano la regola di selezione $\Delta p = 0$ e $\Delta j = j_f - j_i = 0$. Nel caso in cui i due leptoni vengono emessi con gli spin paralleli, fra le transizioni permesse

sopravvivono solo quelle con accoppiamento tensoriale e assiale, le quali comportano la regola di selezione $\Delta p = 0$ e $\Delta j = \pm 1$ (il nucleo iniziale cambia lo spin di un'unità) o $\Delta j = 0$ con l'esclusione del caso $j_i = 0 \rightarrow j_f = 0$. Queste sono dette *transizioni di Gamow-Teller*.

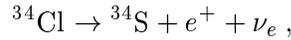
L'ordine di grandezza dell'elemento di matrice dipende anche da quanto si sovrappongono le funzioni d'onda del nucleo dello stato iniziale e dello stato finale. Più grande è la loro sovrapposizione più elevata è la probabilità di transizione e più piccola è la vita media. Ciò si verifica quando i due nuclei appartengono allo stesso multipletto di spin isotopico. Questi processi prendono il nome di *superpermessi* e i valori ft per tali transizioni sono dell'ordine di quello del decadimento del neutrone.

Esistono processi permessi a vita media molto alta. Un esempio noto è quello del decadimento β^- del ^{14}C prodotto dai raggi cosmici negli strati alti dell'atmosfera dalla reazione

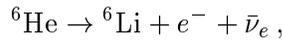


e che viene utilizzato per determinare l'età dei materiali organici. Il suo stato fondamentale appartiene ad un tripletto di spin isotopico che include anche lo stato eccitato ${}^{14}\text{N}^{(2.31\text{MeV})}$. Per ragioni energetiche il ${}^{14}\text{C}$ può decadere solo nello stato fondamentale dell'azoto e questo può avvenire solo con un capovolgimento dello spin del nucleone (decadimento di Gamow-Teller). Il tempo di dimezzamento risulta essere di 5730 anni ed è molto più lungo di quello degli altri decadimenti permessi.

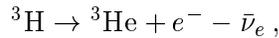
L'esperienza mostra che esistono nuclei che subiscono solo transizioni permesse di Fermi come per esempio la seguente



dove i due nuclei iniziale e finale hanno spin nullo e nuclei che decadono tramite una pura transizione di Gamow-Teller, come



dove si passa da un nucleo a spin 0 ad un nucleo a spin 1. Notiamo che $j_i = j_f \neq 0$ è compatibile con entrambi i tipi di transizioni per cui tutti gli elementi di matrice potrebbero essere diversi da zero. Questo è il caso del decadimento (8.17) del neutrone oppure del decadimento β del trizio:



dove i nuclei iniziale e finale hanno spin $\frac{1}{2}$.

Decadimenti con alto valore di l hanno luogo solo se transizioni con l più basso sono escluse dalla conservazione del momento angolare.

Vediamo ora un altro argomento: le *distribuzioni angolari ed energetiche*. Ritornando alla (8.19), usando la (8.21) della densità degli stati, integrando su tutte le direzioni di emissione del neutrino e sommando sugli spin, la (8.19) fornisce la seguente espressione della probabilità che venga emesso un elettrone di energia \mathcal{E}_e nell'intervallo compreso tra \mathcal{E}_e ed $\mathcal{E}_e + d\mathcal{E}_e$ e con un angolo $\vartheta_{e\nu}$ tra le direzioni dell'impulso dell'elettrone e del neutrino compreso fra $\vartheta_{e\nu}$ e $\vartheta_{e\nu} + d\vartheta_{e\nu}$:

$$dP(\mathcal{E}_e, \vartheta_{e\nu}) = A \frac{F(Z', \mathcal{E}_e)}{4\pi^3} \left(1 + B_{\vartheta_{e\nu}} \frac{cp_e}{\mathcal{E}_e} \cos \vartheta_{e\nu} \pm B_\varepsilon \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_e} \right) \cdot (\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_e)^2 \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2 c^4} \mathcal{E}_e \sin \vartheta_{e\nu} d\mathcal{E}_e d\vartheta_{e\nu}, \quad (8.27)$$

dove il doppio segno si riferisce alle due possibilità di decadimento β^\pm e dove

$$\begin{aligned} A &= (C_S^2 + C_V^2)|M_F|^2 + (C_T^2 + C_A^2)|M_{GT}|^2, \\ B_{\vartheta_{e\nu}} &= \frac{1}{A} \left((C_V^2 - C_S^2)|M_F|^2 + \frac{1}{3}(C_T^2 - C_A^2)|M_{GT}|^2 \right), \\ B_{\mathcal{E}} &= \frac{2}{A} \sqrt{1 - (eZ)^2} (C_S C_V |M_F|^2 + C_T C_A |M_{GT}|^2), \end{aligned} \quad (8.28)$$

dove M_F ed M_{GT} sono i cosiddetti elementi di matrice di Fermi e di matrice di Gamow-Teller, i quali dipendono essenzialmente dalle sole funzioni d'onda nucleari. Non scriveremo esplicitamente le espressioni di queste ultime tre quantità in quanto la loro forma non è importante agli effetti delle considerazioni che seguono.

Da ciò che è stato detto in precedenza, in una pura transizione di Fermi, l'elemento M_{GT} di matrice di Gamow-Teller si annulla, mentre in una pura transizione di Gamow-Teller si annulla M_F . Integrando su $\vartheta_{e\nu}$ si ottiene la distribuzione energetica dell'elettrone

$$dP(\mathcal{E}_e) = A \frac{F(Z', \mathcal{E}_e)}{2\pi^3} \left(1 \pm B_{\mathcal{E}} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_e} \right) (\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_e)^2 \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2 c^4} \mathcal{E}_e d\mathcal{E}_e. \quad (8.29)$$

Notiamo che la dipendenza della (8.29) dall'energia dell'elettrone è contenuta in gran parte nella densità degli stati, mentre la parte restante contiene solo il termine inversamente proporzionale ad \mathcal{E}_e , detto *termine di Fierz*. Se in un grafico, detto *grafico di Curie*, si riportano i valori sperimentali della relazione

$$\sqrt{\frac{2\pi^3}{F(Z', \mathcal{E}_e) \mathcal{E}_e \sqrt{\mathcal{E}_e^2 - m_e^2 c^4}} \frac{dP(\mathcal{E}_e)}{d\mathcal{E}_e}} = \sqrt{A \left(1 \pm B_{\mathcal{E}} \frac{m_e c^2}{\mathcal{E}_e} \right) (\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_e)}, \quad (8.30)$$

e se tali dati si dispongono su una retta sia nel caso di decadimento β^- che di decadimento β^+ , allora la quantità di moto sotto radice a secondo membro deve essere indipendente da \mathcal{E}_e . L'annullamento del termine di Fierz comporta che

$$B_{\mathcal{E}} \simeq 0, \quad C_S C_V = C_T C_A = 0. \quad (8.31)$$

Queste relazioni eliminano due tipi di accoppiamento in quanto due dei quattro coefficienti devono essere nulli: C_S o C_V nelle pure transizioni di Fermi, C_T o C_A nelle pure transizioni di Gamow-Teller. Per dirimere l'ambiguità è necessario misurare le correlazioni fra le direzioni delle quantità di moto del neutrino e dell'elettrone.

Le misure delle correlazioni angolari fra elettrone e neutrino presentano molte difficoltà in quanto il neutrino è una particella praticamente invisibile alle apparecchiature. La direzione della sua quantità di moto può essere ricavata solo misurando la direzione dell'impulso del nucleo di rinculo e usando il principio di conservazione della quantità di moto. Le difficoltà derivano dal fatto che, come è stato detto, il nucleo finale ha un impulso piuttosto piccolo, per cui la sua direzione è difficilmente misurabile se il nucleo non viene opportunamente accelerato. Per questa ragione, a causa di un'esperienza errata sul decadimento del ${}^6\text{He}$, per alcuni anni si credette che in natura si verificassero solo gli accoppiamenti scalare-tensoriale. Oggi sappiamo che gli accoppiamenti giusti sono vettoriale-assiale: si è giunti a questa definitiva conclusione

mediante una serie di esperimenti tecnologicamente molto avanzati eseguiti intorno del 1960 che hanno seguito l'ipotesi di Lee e di Yang sulla non conservazione della parità nelle interazioni deboli. Tali esperimenti sono:

- i.* prova della non conservazione della parità nel decadimento β ,
- ii.* misura dell'elicità del neutrino
- iii.* misure accurate delle correlazioni angolari elettrone-neutrino,
- iv.* misure accurate delle distribuzioni energetiche e angolari del decadimento β del neutrone.

Esporremo ora brevemente solo l'esperienza sul *decadimento del* ^{60}Co . Saranno quindi tratte le conclusioni alle quali hanno contribuito anche i risultati di tutta le serie di esperimenti citati.

Come è stato detto, l'hamiltoniana (8.25) è stata costruita in modo da essere una quantità scalare e quindi conservare la parità. Se la parità non si conserva, ai cinque termini scalari (8.26) bisogna aggiungerne altri cinque pseudoscalari che cambiano la parità. Senza scriverli esplicitamente, diciamo solo che in questo caso la probabilità di transizione (8.19) dipende da un numero doppio di costanti: le solite C_S , C_V , C_T e C_A della parte scalare dell'hamiltoniana più le C'_S , C'_V , C'_T e C'_A della parte pseudoscalare. Per semplicità supporremo che l'hamiltoniana totale sia sempre invariante rispetto all'inversione del tempo. In questo caso si può dimostrare che tutte le costanti sono reali e le (8.27) e (8.29) conservano la stessa forma purché al posto delle (8.28) si sostituiscano le

$$\begin{aligned} A &= (C_S^2 + C_V^2 + C_S'^2 + C_V'^2)|M_F|^2 + (C_T^2 + C_A^2 + C_T'^2 + C_A'^2)|M_{GT}|^2, \\ B_{\vartheta_{e\nu}} &= \frac{1}{A}(C_S^2 - C_V^2 + C_S'^2 - C_V'^2)|M_F|^2 + \frac{1}{3}(C_T^2 - C_A^2 + C_T'^2 - C_A'^2)|M_{GT}|^2, \\ B_{\mathcal{E}} &= \frac{2}{A}\sqrt{1 - (eZ)^2} (C_S C_V + C_S' C_V')|M_F|^2 + (C_T C_A + C_T' C_A')|M_{GT}|^2. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Come conseguenza dell'introduzione dei nuovi quattro coefficienti il termine di Fierz non si annulla solo se

$$C_S C_V = C_S' C_V' = C_T C_A = C_T' C_A' = 0,$$

ma anche se, per esempio,

$$C_S = \pm C_S', \quad C_V = \pm C_V', \quad C_T = \pm C_T', \quad C_A = \pm C_A'.$$

In ogni caso, come si può facilmente controllare, le distribuzioni di angolari teoriche rimangono inalterate, per cui dalla loro misura non è possibile decidere se la parità si conserva o meno.

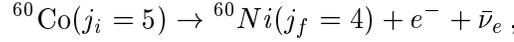
Come è stato osservato per la prima volta da Lee e Yang, per ottenere un'informazione di questo tipo è necessario misurare una grandezza pseudoscalare come la quantità

$$\cos \vartheta_{e\nu} = \frac{\mathbf{J} \cdot \mathbf{p}_e}{|\mathbf{J}| |\mathbf{p}_e|}, \quad (8.33)$$

che rappresenta l'angolo formato dalla direzione della quantità di moto dell'elettrone rispetto alla direzione dello spin del nucleo inizialmente opportunamente polarizzato. Quando il momento magnetico $\boldsymbol{\mu}$ di un nucleo interagisce con un campo magnetico esterno \mathbf{B} , esso tende ad orientarsi

lungo la direzione del campo stesso. A causa del piccolo valore di μ , il campo magnetico necessario ad allineare quasi tutti i nuclei di un preparato radioattivo è dell'ordine di 10^5 gauss e quindi proibitivo anche per una temperatura di 0.01K. Fortunatamente un campo magnetico atomico così forte esiste nelle vicinanze dei nuclei di ioni paramagnetici come il Ni, il Co e il Fe, che hanno un momento magnetico mille volte più grande di quello nucleare. È allora possibile allineare i momenti magnetici ionici con campi magnetici esterni accettabili e sarà il forte campo magnetico atomico a trascinare nell'allineamento i momenti magnetici nucleari.

Per questa ragione in questo esperimento è stato scelto il ^{60}Co che decade secondo lo schema



che è una pura transizione di Gamow-Teller. Per evitare la demagnetizzazione dovuta all'agitazione termica, il preparato è stato mantenuto ad una temperatura di 0.01K.

Se l'interazione debole non conserva la parità, la probabilità di transizione dipende dall'angolo ϑ definito dalla (8.33): si trova infatti che la distribuzione angolare degli elettroni emessi deve avere la forma

$$I(\vartheta_{e\nu}) = A|M_{GT}|^2(1 + \alpha \cos \vartheta_{e\nu}), \quad (8.34)$$

dove

$$\alpha = \frac{\langle J_{z,i} \rangle}{J_i} \frac{2v_e |M_{GT}|^2}{A} (C_T C_T' - C_A C_A'), \quad (8.35)$$

dove $\langle J_{z,i} \rangle$ è il valor medio dello spin del nucleo iniziale nella direzione dell'asse di polarizzazione e A è dato dalla prima delle (8.32) con $M_F = 0$.

Dalla (8.34) si ricava che

$$\alpha = \frac{I(0) - I(180)}{I(0) + I(180)},$$

e quindi il suo valore può essere ottenuto misurando l'intensità del fascio elettronico concorde, che si ha per $\vartheta_{e\nu} = 0$, e discorde, che invece si ha per $\vartheta_{e\nu} = 180$, alla direzione del campo polarizzante. Nell'esperimento originale si è trovato $\alpha \simeq -0.25$ e ciò dimostra la non conservazione della parità nel decadimento β . Se si tien conto anche dei risultati degli altri esperimenti di cui si è parlato, si possono trarre le due importanti conclusioni seguenti:

- i.* Poiché il segno di α è negativo, nel decadimento del ^{60}Co gli elettroni vengono emessi preferibilmente in direzione opposta a quella dello spin del nucleo polarizzato. Tenuto conto che l'antineutrino ha elicità positiva, e cioè che la direzione del suo spin è la stessa della direzione della sua quantità di moto, allora per la conservazione del momento angolare si ha la situazione seguente:

	^{60}Co	^{60}Ni	e^-	$\bar{\nu}_e$
spin	5	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
direzione dell'impulso	↑	↑	↑	↑
direzione dell'impulso			↓	↑
elicità			< 0	+1

cioè gli elettroni emessi devono essere polarizzati ed avere lo spin orientato in senso opposto alla direzione della quantità di moto.

L'osservazione che gli elettroni emessi nel decadimento β sono polarizzati longitudinalmente risale ancora alla fine degli anni venti, ma allora a questo fatto non venne data importanza. Dal 1957 in poi sono state effettuate un gran numero di esperienze tutte compatibili con un'elicità uguale a $-v_e/c$ per gli elettroni (decadimenti β^-) e v_e/c per i positroni (decadimenti β^+), sia per transizioni permesse di Fermi che di Gamow-Teller. Questi risultati sono compatibili solo con le previsioni teoriche basate sugli accoppiamenti vettoriale-assiale, per cui le costanti degli accoppiamenti scalare-tensoriale (che prevedono i segni opposti) devono essere nulle. L'esclusione degli accoppiamenti scalare-tensoriale è confermata anche dai risultati sperimentali sulle distribuzioni angolari nell'angolo $\vartheta_{e\nu}$.

- ii. Se si tien conto dell'annullamento dei coefficienti C_S , C'_S , C_T e C'_T e si introducono i valori misurati della polarizzazione del nucleo iniziale, della velocità dell'elettrone e altri fattori correttivi, il coefficiente di asimmetria (8.35) diventa

$$\alpha = \frac{\langle J_{z,i} \rangle v_e}{J_i c} \left(-2 \frac{C_A C'_A}{C_A^2 + C_A'^2} \right) \simeq 0.25 \left(-2 \frac{C_A C'_A}{C_A^2 + C_A'^2} \right) \simeq -0.25,$$

dalla quale risulta che

$$C_A \simeq C'_A,$$

e cioè il contributo della parte hamiltoniana che non conserva la parità è uguale a quello che la conserva.

Quanto è stato detto, violando qualche volta l'ordine degli avvenimenti, porta a concludere che dell'hamiltoniana iniziale (8.25) della teoria di Fermi rimangono solo i termini con accoppiamento vettoriale-assiale, ai quali bisogna aggiungere i corrispondenti termini che cambiano la parità. Scritta per esteso, essa assume quindi la forma

$$\begin{aligned} H_\beta = & C_V \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \psi_\nu) + (\bar{\psi}_p \gamma_i \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \gamma_5 \psi_\nu) + C_h) dV + \\ & + C_A \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i \gamma_5 \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \gamma_5 \psi_\nu) + (\bar{\psi}_p \gamma_i \gamma_5 \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \psi_\nu) + C_h) dV, \end{aligned}$$

dove si è posto, conformemente all'evidenza sperimentale, $C_V = C'_V$ e $C_A = C'_A$. L'espressione precedente si può scrivere anche nella forma più compatta

$$\begin{aligned} H_\beta = & \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i (1 + a_\beta \gamma_5) \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\nu) + C_h) dV \\ = & \sqrt{2} G_\beta \int ((\bar{\psi}_p \gamma_i (1 + a_\beta \gamma_5) \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_i \psi_{\nu,L}) + C_h) dV, \end{aligned} \quad (8.36)$$

dove

$$G_\beta = \sqrt{2} C_V, \quad a_\beta = \frac{C_A}{C_V}, \quad \psi_{\nu,L} = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \psi_\nu. \quad (8.37)$$

Dalla misura della vita media del neutrone e dei nuclei che compiono transizioni permesse non fortemente influenzate dalla funzione d'onda nucleare è possibile ricavare le costanti G_β e a_β . Si trova che

$$\begin{aligned} G_\beta &= (1.398 \pm 0.003) \cdot 10^{-49} \text{ erg cm}^3 \\ |a_\beta| &= 1.239 \pm 0.009, \quad \arg a_\beta = 0.00 \pm 0.17 \end{aligned} \quad (8.38)$$

Come si può ricavare da considerazioni dimensionali, la costante di Fermi G_β divisa per $\hbar c$ ha le dimensioni di una superficie e non è adimensionale come la quantità $e^2/\hbar c$.

8.4.4 Il decadimento e la cattura del μ^-

Per effetto dell'interazione debole, il leptone μ^- decade secondo lo schema

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad (8.39)$$

dove il fatto che accanto all'elettrone vengano emessi un neutrino e un antineutrino diversi lo si può dedurre dalla conservazione dei numeri leptonici L_e ed L_μ .

Il μ^- può essere catturato da un protone dando luogo alla reazione debole

$$\mu^- + p \rightarrow n + \nu_\mu. \quad (8.40)$$

Secondo la teoria di Fermi, i due processi si possono calcolare in modo analogo a quanto fatto per il decadimento β , e quindi utilizzando le due hamiltoniane fenomenologiche

$$\begin{aligned} H_\mu^{dec} &= \frac{G_\mu^{dec}}{\sqrt{2}} \int ((\bar{\psi}_e \gamma_i (1 + a_\mu^{dec} \gamma_5) \psi_\mu) (\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_{\nu_e}) + C_h) dV, \\ H_\mu^{cat} &= \frac{G_\mu^{cat}}{\sqrt{2}} \int ((\bar{\psi}_n \gamma_i (1 + a_m^{cat} \gamma_5) \psi_p) (\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma_i (1 + \gamma_5) \psi_\mu) + C_h) dV, \end{aligned} \quad (8.41)$$

dove le due costanti hanno lo stesso significato di quelle del decadimento β .

Dai dati sperimentali sulla vita media del μ^- e sulla sezione d'urto di cattura si ricava che

$$\begin{aligned} G_\mu^{dec} &= (1.432 \pm 0.002) \cdot 10^{-49} \text{ erg cm}^3, \\ |a_\mu^{dec}| &= 1.0 \pm 0.01, \quad \arg a_\mu^{dec} = 0 \pm 2, \\ G_\mu^{dec} &\simeq G_\mu^{cat} \simeq G_\beta, \\ a_\mu^{cat} &\simeq a_\beta \simeq 1.24. \end{aligned} \quad (8.42)$$

Se si confronta questo risultato con quello ottenuto dal decadimento β , si possono fare le seguenti osservazioni:

- i.* innanzitutto le tre costanti sono praticamente uguali: la differenza tra G_μ e G_β è di 2.8 ± 0.13 ; ciò conferma l'ipotesi iniziale di Fermi sull'universalità dell'interazione fra le coppie di fermioni (n, p) , (μ, ν) , (e, ν) ;
- ii.* mentre le correnti vettoriali adroniche e leptoniche del tipo $\bar{\psi} \gamma_i \psi$ compaiono nella (8.36) e nella (8.41) con lo stesso coefficiente, la corrente assiale adronica è modificata rispetto a

quella leptonica di un fattore di circa 1.24. Che le correnti adroniche debbano avere costanti di accoppiamento diverse da quelle leptoniche non è sorprendente: gli adroni sono anche sorgenti di campo forte, e quindi, mentre nel decadimento del μ^- da noi visto sono coinvolti solo leptoni, nel caso del decadimento β possono essere coinvolti anche i π e gli altri adroni.

8.4.5 Transizioni β con $\Delta S = 1$ e angolo di Cabibbo

Oltre ai decadimenti β del protone, del neutrone e del muone sono stati osservati anche decadimenti del tipo

$$\begin{aligned}\pi^- &\rightarrow \pi^0 + \text{leptoni}, \\ \Sigma^- &\rightarrow \Sigma^0 + \text{leptoni},\end{aligned}\tag{8.43}$$

e del tipo

$$\begin{aligned}\Lambda^0 &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \Sigma^- &\rightarrow n + \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ K^+ &\rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu_e, \\ \Xi^- &\rightarrow \Lambda^0 + e^- + \bar{\nu}_e.\end{aligned}\tag{8.44}$$

Mentre nelle (8.43) l'adrone che decade non cambia né stranezza ($\Delta S = 0$) né spin isotopico ($\Delta t = 0$), nelle (8.44) si ha che

$$|\Delta S| = 1, \quad |\Delta t| = \frac{1}{2}, \quad |\Delta t_3| = \frac{1}{2}, \quad \Delta Q = \Delta S.$$

Gli esperimenti mostrano che la costante debole G'_β di tali processi è più piccola di circa un ordine di grandezza rispetto a G_β (caso $\Delta S = 0$). Lo schema che prevede l'universalità delle interazioni debole sembra quindi in palese contraddizione.

Il problema fu risolto per la prima volta da Cabibbo ancora prima che venisse proposto il modello a quark per gli adroni. Ponendo

$$\begin{aligned}G_\beta &= G_\mu \cos \vartheta_c, \\ G'_\beta &= G_\mu \sin \vartheta_c, \\ \tan \vartheta_c &= \frac{G'_\beta}{G_\beta},\end{aligned}\tag{8.45}$$

si stabilisce una specie di regole generale del tipo

$$G_\mu = \sqrt{G_\beta^2 + G'_\beta^2}.\tag{8.46}$$

Ciò rende conto anche della piccola differenza osservata (ben fuori dall'errore sperimentale) fra G_β e G_μ . Se si attribuisce tale differenza all'angolo di Cabibbo ϑ_c , si trova che $\vartheta_c = 0.218\text{rad}$. Misurando la vita media dei processi (8.44) è possibile ottenere il risultato più preciso

$$\sin \vartheta_c = 0.231 \pm 0.003.\tag{8.47}$$

Per capire il significato dell'angolo di Cabibbo e delle relazioni (8.45) e (8.46), conviene riferirsi al modello a quark.

Sappiamo che tutti i barioni dell'otteto sono composti dai tre quark u , d e s e che i mesoni sono composti da coppie quark-antiquark. Supponendo che la massa dei due quark d e s sia maggiore della massa del quark u , tutti i decadimenti semileptonici menzionati, cioè quelli che nello stato finale hanno un adrone e due leptoni, sono interpretabili tramite gli schemi di decadimento

$$\begin{aligned} \text{a.} \quad & d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \text{b.} \quad & s \rightarrow u + e^- + \bar{\nu}_e, \\ \text{c.} \quad & s \rightarrow u + \mu^- + \bar{\nu}_\mu. \end{aligned} \tag{8.48}$$

Il decadimento (8.48a) è responsabile delle transizioni (8.16), (8.17) e (8.41) con $\Delta S = 0$, $\Delta t = 0$ e $|\Delta t_3| = 1$; il decadimento (8.48b) è invece responsabile delle transizioni (8.43) con $\Delta S = \Delta Q = 1$, $\Delta t = 1/2$ e $\Delta t_3 = 1/2$. se le masse dei due quark s e d fossero uguali, cioè se la simmetria $SU_F(3)$ fosse rotta dalla sola interazione elettromagnetica, essi dovrebbero poter decadere allo stesso modo e cioè (a seconda del valore della loro massa) o solo tramite gli schemi (8.48a) e (8.48b) o entrambi anche tramite lo schema (8.48c). Infatti, a causa della degenerazione dello stato di carica $-e/3$, il decadimento dei quark sarebbe regolato dalla combinazione lineare

$$\psi_q = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_d + \psi_s), \tag{8.49}$$

nella quale d ed s hanno lo stesso peso. In questo caso, interpretando l'universalità dell'interazione debole come l'uguaglianza della ostante G_μ con la costante che determina i decadimenti di tutto lo stato (8.49), se G_β è la costante debole che determina solo i decadimenti con $\Delta S = 0$, si avrebbe

$$G_\beta = G'_\beta = \frac{1}{\sqrt{2}}G_\mu,$$

e quindi ϑ_c sarebbe uguale a $\pi/4$. Ma la simmetria $SU_F(3)$ non è esatta, in quanto le masse dei barioni strani sono superiori alle masse dei nucleoni e quindi il quark s deve essere più pesante del quark d , per cui la degenerazione fra d ed s è rotta da quella parte dell'interazione forte che rompe $SU_F(3)$. Di conseguenza la miscela fra lo stato s e quello d deve avere coefficienti diversi ma sempre tali che la somma dei loro quadrati sia uguale ad 1. Formalmente, ciò equivale a porre

$$\psi_q = \psi_d \cos \vartheta_c + \psi_s \sin \vartheta_c.$$

Se si suppone che la costante di accoppiamento debole di tutto lo stato (8.49) sia uguale a G_μ (universalità dell'interazione), si ottengono le relazioni (8.45) e (8.46).

8.5 L'inversione del tempo

È noto che le equazioni del moto della meccanica classica sono invarianti rispetto all'inversione del tempo. Ciò significa che se una particella si muove da un punto P_1 ad un punto P_2 lungo una certa traiettoria e in P_2 si inverte solo il verso della sua velocità, essa ripercorre la

stessa traiettoria in senso inverso. Non è però sempre così: se una particella carica si muove in un campo magnetico esterno essa non costituisce un sistema invariante per inversioni temporali. Se invece il sistema è costituito da un insieme di particelle cariche e interagenti tramite il solo campo elettromagnetico, allora invertendo il tempo cambiano verso sia la velocità delle particelle sia il campo magnetico. Quindi il sistema è invariante.

In meccanica quantistica, per definire l'operazione di inversione temporale si introduce un operatore T tale che

$$\begin{aligned} T\mathbf{r}T^\dagger &= \mathbf{r} , \\ T\mathbf{p}T^\dagger &= -\mathbf{p} , \\ T\mathbf{L}T^\dagger &= -\mathbf{L} , \end{aligned} \tag{8.50}$$

dove le proprietà di trasformazione della quantità di moto e del momento angolare discendono dalla loro definizione classica. D'altra parte, secondo la meccanica quantistica, l'operatore p_x non è altro che $i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ e, poiché T non opera sulla parte spaziale, allora deve cambiare l'unità immaginaria da i a $-i$. Più in generale, quindi, dovrà essere:

$$TaT^\dagger = a^* , \tag{8.51}$$

dove a è una qualunque quantità complessa. Una delle conseguenze della (8.51) è che T non è un operatore lineare in quanto

$$T(a\psi_1 + b\psi_2)T^\dagger = a^*\psi_1^* + b^*\psi_2^* .$$

Se O è un operatore hermitiano funzione delle variabili \mathbf{r}_i , \mathbf{p}_i e di altre quantità complesse a_i , allora, da ciò che è stato detto, si ha che

$$TO(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, a_i)T^\dagger = O(\mathbf{r}_i, -\mathbf{p}_i, a_i^*) .$$

In generale, un sistema è invariante rispetto all'inversione del tempo se

$$TH(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, a_i)T^\dagger = H(\mathbf{r}_i, -\mathbf{p}_i, a_i^*) = H(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i, a_i) , \tag{8.52}$$

dove H è l'hamiltoniana del sistema.

A prima vista sembrerebbe che la (8.52) permettesse di definire una nuova costante del moto e le conseguenti regole di selezione ma, a causa della (8.51), questo non è possibile in quanto l'operatore T , oltre ad agire sulle variabili dinamiche, cambia anche le quantità complesse. Per rendercene conto, consideriamo la meccanica quantistica non relativistica, che si fonda sull'equazione di Schrödinger

$$H\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} .$$

Anche se H soddisfa alla (8.52), l'equazione non può essere invariante, in quanto diventa

$$H\psi^* = i\hbar\frac{\partial\psi^*}{\partial t} ,$$

e quindi la ψ non può mai essere autofunzione di T , come accade invece per l'operatore parità.

La verifica dell'invarianza rispetto all'inversione del tempo dell'hamiltoniana di un modello può essere fatta indirettamente tramite l'operazione combinata di inversione spaziale e di coniugazione di carica.

8.5.1 Il teorema TCP

Schrödinger, Lüders e Pauli dimostrarono un'importante connessione fra l'invarianza rispetto alle trasformazioni proprie di Lorentz e l'invarianza rispetto ad una qualsiasi combinazione delle tre trasformazioni di parità P , di coniugazione di carica C e di inversione del tempo T . Il teorema, che formularono è il seguente:

Teorema 8.1 (TCP). *Se una teoria di campo è locale e invariante per trasformazioni proprie di Lorentz e se le funzioni di campo soddisfano alle relazioni di commutazione imposte dalla connessione spin-statistica, allora essa è invariante rispetto al prodotto TCP.*

Questo teorema permette di dimostrare che

- i.* la massa delle particelle deve essere uguale a quella delle antiparticelle;
- ii.* la vita media delle particelle deve essere uguale a quella delle antiparticelle;
- iii.* tutte le proprietà elettromagnetiche delle particelle devono essere uguali (a parte il segno) a quelle delle antiparticelle.

La verifica dell'uguaglianza delle masse, delle vite medie e dei momenti magnetici delle particelle e delle antiparticelle costituisce una delle prove sperimentali dell'invarianza delle varie interazioni rispetto all'inversione del tempo. È stato per esempio verificato che le masse dei mesoni K^0 e \bar{K}^0 sono uguali entro una parte su 10^{16} . L'uguaglianza dei momenti magnetici del μ^+ e del μ^- è verificata entro una parte su 10^6 e quella fra i momenti magnetici dell'elettrone e del positrone entro una parte su 10^5 .

Tutte le interazioni sono invarianti rispetto al prodotto TCP , ma è diverso il loro comportamento per le singole operazioni. Infatti, mentre le interazioni elettromagnetiche e debole sono invarianti rispetto a P , a C e a T (o CP , che sappiamo essere equivalente), l'interazione debole non è invariante rispetto a P e a C , mentre non è ancora sicura l'invarianza rispetto a T (CP). Quest'ultimo dubbio per le interazione deboli deriva dallo studio di esperimenti condotti sul sistema $K^0 - \bar{K}^0$.

8.5.2 Il sistema $K^0 - \bar{K}^0$

Il mesone K^0 e la sua antiparticella \bar{K}^0 costituiscono il sistema più adatto allo studio dell'invarianza delle interazioni deboli rispetto all'operazione PC .

Poiché i due mesoni hanno una stranezza opposta, le interazioni forti (che conservano la stranezza) non possono mai produrre una transizione $K^0 \rightarrow \bar{K}^0$ e viceversa, ma le interazioni deboli non conservano la stranezza e infatti l'esperienza dimostra che essi possono decadere in stati di stranezza nulla come, per esempio, due pioni.

A causa della transizione del secondo ordine nella costante di accoppiamento debole

$$K^0 \longleftrightarrow \pi + \pi \longleftrightarrow \bar{K}^0, \quad (8.53)$$

i K^0 prodotti nella reazione forte

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0 \quad (8.54)$$

si trasformano in \bar{K}^0 , per cui si forma un miscuglio $K^0 - \bar{K}^0$. Supponiamo ora che l'interazione debole sia invariante rispetto al prodotto CP ; poiché i due mesoni hanno la stessa parità (sono bosoni) e la coniugazione di carica li cambia l'uno nell'altro, si ha che

$$|\bar{K}^0\rangle = CP|K^0\rangle, \quad |K^0\rangle = CP|\bar{K}^0\rangle. \quad (8.55)$$

di conseguenza i due miscugli

$$|K_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle + |\bar{K}^0\rangle), \quad |K_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|K^0\rangle - |\bar{K}^0\rangle) \quad (8.56)$$

sono autostati di CP con autovalori opposti. Usando le (8.55) si ottiene infatti che

$$CP|K_1\rangle = |K_1\rangle, \quad CP|K_2\rangle = -|K_2\rangle. \quad (8.57)$$

Poiché il pione neutro ha parità negativa e parità di carica positiva, si ottiene

$$CP|\pi^0\rangle = -|\pi^0\rangle, \quad (8.58)$$

e quindi

$$CP|\pi^0 + \pi^0\rangle = (-1)^l |\pi^0 + \pi^0\rangle, \quad (8.59)$$

dove l è la parità del moto relativo. Analogamente, tenuto conto della (8.7), si ha

$$\begin{aligned} CP|\pi^0 + \pi^0 + \pi^0\rangle &= -(-1)^{l_p+l_q} |\pi^0 + \pi^0 + \pi^0\rangle = -|\pi^0 + \pi^0 + \pi^0\rangle, \\ CP|\pi^+ + \pi^- + \pi^0\rangle &= -(-1)^{2l_p+l_q} |\pi^+ + \pi^- + \pi^0\rangle = -|\pi^+ + \pi^- + \pi^0\rangle. \end{aligned} \quad (8.60)$$

Di conseguenza solo il miscuglio K_2 può decadere in tre pioni.

Poiché lo spazio delle fasi di un decadimento in tre corpi è più piccolo di quello di un decadimento in due corpi, la vita media del K_2 è più grande di quella del K_1 (circa 500 volte), per questa ragione il miscuglio che decade in due pioni è chiamato K_S (Short), mentre quello che decade in tre pioni è indicato con K_L (Long).

Ma è proprio vero che K_S e K_L coincidono con le due combinazioni lineari (8.56)? La previsione di Gell-Mann e Pais di due mesoni di vita media diversa ebbe presto conferma sperimentale: si osservò infatti che un K^0 prodotto in un certo punto, propagandosi nel vuoto si comporta come la sovrapposizione di due stati di vita media diversa, uno che decade in due pioni nelle vicinanze del punto di produzione e l'altro che decade in altri modi a distanza assai maggiore dalla sorgente. Il fatto sorprendente è che sin dal 1964 una serie di esperimenti hanno mostrato che anche il miscuglio $K^0 - \bar{K}^0$, che decade lontano dalla sorgente (a vita media lunga) presenta stati finali di due pioni in tre casi su mille e ciò viola chiaramente l'invarianza rispetto a CP . Il problema non è ancora stato completamente risolto, ma tutto fa pensare che la violazione dell'invarianza rispetto a CP sia dovuta ad un'interazione superdebole che mescola gli stati K_1 e K_2 dati dalla (8.56). Ponendo così

$$K_S = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(K_1 + \varepsilon K_2), \quad K_L = \frac{1}{\sqrt{1+|\varepsilon|^2}}(K_2 + \varepsilon K_1), \quad (8.61)$$

mediante un'analisi abbastanza complessa dei dati sperimentali si trova che il parametro di mescolamento ε ha il valore

$$|\varepsilon| = (2.30 \pm 0.02) \cdot 10^{-3}, \quad \arg \varepsilon = 43.0 \pm 1.5. \quad (8.62)$$

Se K_L fosse una combinazione lineare con uguali coefficienti di K^0 e \bar{K}^0 , come appare dalla (8.56), lontano dalla sorgente il rapporto fra le probabilità di transizione dei decadimenti semileptonici

$$K_L \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + e^- + \bar{\nu}_e \\ \pi^- + e^+ + \nu_e \end{cases}, \quad K_S \rightarrow \begin{cases} \pi^+ + \mu^- + \bar{\nu}_\mu \\ \pi^- + \mu^+ + \nu_\mu \end{cases},$$

dovrebbe essere uguale a 1, mentre invece i dati sperimentali rivelano una debole asimmetria (1.0033) verso gli stati finali con i leptoni positivi rispetto agli stati finali con i leptoni negativi. Usando la combinazione lineare (8.61), dai calcoli si ottiene un valore di ε compatibile con la (8.62).

Molto in breve, questo è ciò che si può dire per ora sulla violazione CP nelle interazioni deboli. Va chiarito comunque che questo è l'unico caso in cui è stata sperimentalmente accertata tale violazione. I tentativi di trovarla in altri fenomeni hanno sempre dato risultati negativi.

Indice analitico

C-parità, 105

antiparticella, 88, 104

azione, 62

 della particella libera, 66

barioni, 104

bilancio

 dell'impulso, 56

 energetico, 52, 56

boost, 58

bosoni, 104

 di gauge, 94

 intermedi, 94

campi tensoriali, 31

carica di colore, 94

componenti

 controvarianti, 28

 covarianti, 28

condizione

 di gauge, 95

coniugazione di carica, 104

conservazione

 del momento angolare, 58

 del momento angolare-spinta, 82

 del quadrimpulso, 56

 dell'energia-impulso, 82

contrazione

 di tensori, 30, 38

contrazione della lunghezza, 14, 18

corpo rigido, 43

costanti

 del moto, 68

covarianza a vista, 27

decadimento

 di gaomw-Teller, 115

densità

 di carica, 45

 di corrente, 45

 conservata, 72

 di energia, 52, 54

 di energia-impulso, 71

 di lagrangiana, 63

 di momento angolare, 71

dilatazione del tempo, 13, 17

effetto Doppler, 103

elicità, 91

energia

 a riposo, 36

 di una particella, 35

equazione

 di continuità, 55

 dell'energia, 52, 53

 della corrente, 44

 di Klein-Gordon, 83

 di Lorentz, 40, 77

 fondamentale della meccanica, 36

equazioni

 del moto, 68

 di Dirac, 86

 in forma covariante, 90

 di Eulero-Lagrange, 63

 di Lagrange, 61

 di Maxwell, 5, 41, 47, 77, 95

esperienza

 di Michelson e Morley, 6

etere, 6

evento, 8

forza

 di Lorentz, 5

- gauge
 - di Coulomb, 49
 - di Lorentz, 49, 95
- generatrice
 - di una trasformazione infinitesima, 69
- grafico di Curie, 116
- gruppo
 - delle traslazioni, 23
 - di Lorentz, 23
 - proprio, 24, 25
 - di Poincaré, 20
 - di Poincaré, 21
 - proprio, 26
- intervallo
 - di tipo
 - luce, 12
 - spazio, 12
 - tempo, 12
 - spazio-temporale, 8, 28
- invarianza
 - dell'intervallo, 11, 20, 28, 30
 - di gauge, 49, 74
- inversione del tempo, 25, 122
- ipercarica, 104
- ipersuperficie
 - di tipo spazio, 64
- isotropia, 4
- legge
 - della potenza, 37, 40
 - di conservazione della carica, 44
- leptoni, 104
- linea di universo, 67
- massa a riposo, 35
- matrici di Pauli, 84
- numero
 - barionico, 105, 107
 - leptonico, 108
- omogeneità, 4
- operatore
 - parità, 108
- operazione
 - di inversione
 - del tempo, 123
- operazione di parità, 24
- pacchetti d'onda, 100
- paradosso
 - dei gemelli, 13
- parità
 - di carica, 105
- positroni, 87
- positronio, 106
- principi
 - di conservazione, 81
- principio
 - di conservazione
 - dell'energia, 112
 - di corrispondenza, 66
 - di Hamilton, 62
 - di minima azione, 62
 - di relatività
 - di Einstein, 6, 26
 - di Galileo, 4
 - variazionale, 62
- prodotto
 - di tensori, 29
 - scalare, 30
 - pseudoeuclideo, 30
- pseudorotazioni, 25
- pseudotensore
 - di Ricci, 31
- pseudotensori
 - di prima specie, 29
 - di seconda specie, 29
- quadriaccelerazione, 34
- quadricorrente, 42, 44
- quadriforza, 36
- quadrigradiente, 32
- quadrimpulso, 35
- quadripotenziale, 47
- quadriscalare, 27
- quadritensori, 27
- quadrivelocità, 34

- quadrivettore
 - accelerazione, 34
 - controvariante, 27
 - covariante, 28
 - di tipo
 - luce, 30
 - tempo, 30
 - energia-impulso, 53, 71
 - velocità, 34
- raggio di interazione, 83
- range, 83
- rango di un tensore, 29
- rappresentazione
 - di Minkowsky, 12
- regola d'oro, 112
- scalare, 27
- sistema
 - di riferimento, 4
 - equivalente, 27
 - inerziale, 4
- sistema proprio, 33
- somma
 - di tensori, 29
- spin isotopico, 105
 - debole, 94
- spinore
 - a dua componenti, 84
- spinori
 - a quattro componenti, 88
- spinta, 58
- stranezza, 104
- tempo
 - di dimezzamento, 113
- tensore
 - degli sforzi, 54
 - di Ricci, 31
 - doppio
 - controvariante, 29
 - covariante, 29
 - misto, 29
 - elettromagnetico, 39
 - energia-impulso, 54
 - forma canonica del, 70
 - metrico, 31
 - momento angolare, 71
- teorema
 - del baricentro, 59
 - dell'intervallo, 9
 - TCP, 124
- teoria di gauge, 94
- termine
 - di Fierz, 116
 - di massa, 93
 - di spostamento, 5
- transizioni
 - di Fermi, 114
 - di Gamow-Teller, 115
- trasformazione
 - classica
 - della velocità, 4, 19
 - dei campi, 31
 - del campo
 - scalare, 31
 - tensoriale, 32
 - vettoriale, 32
 - del quadrigradiente, 32
 - delle componenti
 - controvarianti, 28
 - covarianti, 28
 - di gauge, 49
 - globale, 72, 92
 - locale, 92, 94
 - relativistica
 - della velocità, 19
- trasformazioni
 - di Galileo, 17
 - di Lorentz, 24, 96, 103
 - speciali, 17, 22, 25, 40
 - di Poincarè, 21, 26
- valore ft , 113
- vettore, 27
 - di Poynting, 52, 54