

Appunti di Relatività Generale
Università degli studi di Padova
Dipartimento di Fisica “Galileo Galilei”

Antonio Mason

Gennaio 2005

Sommario

In queste pagine ho rielaborato gli appunti presi durante il corso di Relatività Generale tenuto nell'anno accademico 2003-2004 dal professor Kurt Lechner. Come si vede il risultato é un lavoro piuttosto lungo, ma questo non significa che sia completo, esauriente o estremamente minuzioso e dettagliato nelle dimostrazioni: semplicemente la mia scarsa abilità mi impedisce di dire con poche parole quello che andrebbe detto con poche parole; inoltre gli argomenti toccati nel corso sono stati veramente tanti. In ogni caso tengo a sottolineare che studiare solo da questi appunti é caldamente sconsigliato : saranno rimasti innumerevoli errori e cose non chiare, sia di natura ortigrafica, tecnica e forse anche concettuale. In ogni caso, usare questi appunti come sussidio a buoni libri di relatività generale, quali quelli indicati nel bollettino o quelli presenti nella biblioteca di dipartimento, può essere utile. Infatti, molti calcoli sono svolti in un dettaglio maggiore di quanto si trova nei libri di testo e inoltre si ha un testo in italiano, cosa molto rara quando si trattano argomenti specialistici. Alcune parti mi sembrano fatte bene: il primo capitolo sulla relatività ristretta, la dimostrazione delle equazioni di Einstein, le geodetiche in Schwarzschild, il collasso gravitazionale e le applicazioni cosmologiche; altri lo sono in modo altalenante come il principio di equivalenza e le onde gravitazionali; infine sulle parti di natura piú strettamente matematica consiglio di rivolgersi altrove, in quanto saranno infestati di scemenze. Detto questo mi scuso con il futuro lettore per il contenuto (e specialmente per i disegni) di questi appunti e lo invito a mandarmi una mail all'indirizzo *antopubly@tiscali.it* per chiarimenti, critiche, suggerimenti o per avere pezzi del codice sorgente in caso voglia apporre qualche modifica.

Indice

Indice	1
I Verso la relatività generale	4
1 Relatività ristretta	5
1.1 Introduzione	5
1.2 Meccanica Newtoniana	6
1.3 Le equazioni di Maxwell	7
1.4 Le basi della relatività ristretta	8
1.4.1 Postulati	8
1.4.2 Notazione	9
1.5 Invarianza del 4-intervallo	10
1.6 Trasformazioni di Lorentz e calcolo tensoriale	12
1.7 Elementi di teoria gruppale	13
1.7.1 Trasformazioni infinitesime	14
1.7.2 Ancora sui gruppi	14
1.7.3 Trasformazione di tensori	15
1.8 Quadritensori	16
1.8.1 Campi tensoriali	17
1.9 Meccanica relativistica del punto materiale	18
1.10 Le equazioni di Maxwell in forma tensoriale	21
1.10.1 Quadricorrente per un sistema di particelle	26
1.11 Il tensore energia-momento	28
1.11.1 Il momento angolare	31
1.12 Il principio di minima azione e il teorema di Noether	32
1.12.1 Teorema di Noether	36
2 Teorie di Yang-Mill abeliane e non	38
2.1 Teorie di Yang-Mill non abeliane	40
3 Il principio di Equivalenza	44
3.1 Tentativi (falliti) per generalizzare Φ alla relatività generale	44
3.2 L'origine del principio di equivalenza	45
3.3 La connessione affine	46
3.4 Tre fatti	50
3.4.1 Le geodetiche estremizzano l'azione	50

3.4.2	Limite Newtoniano	50
3.4.3	Red-shift gravitazionale	52
3.5	Il principio di covarianza generale	53
II	Dalla geometria differenziale alle equazioni di Einstein	55
4	Elementi di geometria differenziale	56
4.1	Varietà	56
4.2	Tensori	58
4.2.1	k-forme	60
4.3	Derivate di Lie	61
4.4	L'operatore differenziale "d"	65
4.4.1	Integrazione invariante	66
4.5	La derivata covariante	69
4.6	Torsione e trasporto parallelo	71
4.7	Il tensore di curvatura	74
4.7.1	Proprietá del tensore di Riemann	75
4.7.2	Deviazione geodetica	76
4.7.3	Definizioni di spazio piatto	78
4.8	Postulati della relativitá generale	78
4.9	Isometrie e vettori di Killing	81
4.9.1	Metriche stazionarie	83
4.9.2	Metriche statiche	84
4.9.3	Metriche invarianti per rotazioni	85
5	Particelle e campi in Relativitá Generale	88
5.1	La ricetta minimale	88
5.2	Il tensore energia-momento	91
5.2.1	Il fluido perfetto	92
5.3	Le equazioni di Einstein	94
6	Il problema di Cauchy in Maxwell e Einstein	99
6.1	L'invarianza di gauge in Maxwell	99
6.2	L'invarianza di gauge in Einstein	101
7	La soluzione di Schwarzschild	103
8	Le verifiche della relativitá generale	108
8.1	La deflessione della luce	108
8.2	Spostamento del Perielio di Mercurio	111
8.3	Il ritardo dell' eco-radar	113
III	Le applicazioni della relativitá generale	114
9	Analisi delle geodetiche in Schwarchild	115
9.1	Trattazione Newtoniana	115
9.2	Trattazione relativistica	116

9.3	$V(r)$ per corpi massicci	117
9.4	$V(r)$ per i fotoni	121
9.4.1	Il cono di fuga dei fotoni	123
9.5	La coordinata temporale	125
9.5.1	Il “buco bianco”	128
10	Onde elettromagnetiche e gravitazionali	131
10.1	Formalismo generale	131
10.2	Fotoni VS gravitoni	135
10.2.1	Onde elettromagnetiche 1	135
10.2.2	Onde gravitazionali 1	137
10.2.3	Onde elettromagnetiche 2	138
10.2.4	Onde gravitazionali 2	139
10.3	Il tensore energia momento	140
10.3.1	Caso elettromagnetico	140
10.3.2	Caso gravitazionale	141
10.4	Calcolo della potenza irradiata	144
10.4.1	Definizione del sistema	144
10.4.2	La funzione di Green	145
10.4.3	Irraggiamento elettromagnetico	145
10.4.4	Irraggiamento gravitazionale	150
11	Sviluppi formali	154
11.1	Simmetrie e leggi di conservazione	154
11.2	Il tensore energia-momento metrico	156
11.3	L'azione del campo gravitazionale	158
11.4	I vettori di killing	159
11.5	Caratterizzazioni di varietà	160
11.5.1	Varietà isotrope	161
11.5.2	Varietà omogenee e massimalmente simmetriche	162
11.5.3	Costruzione di spazi massimalmente simmetrici	163
11.5.4	La metrica di Robertson-Walker	165
12	Il collasso gravitazionale	167
12.1	Nane bianche e stelle di neutroni	167
12.2	Il collasso gravitazionale	169
12.2.1	Formulazione del problema	169
12.2.2	Andamento di $R(T)$ e $\rho(t)$	170
12.2.3	Continuità fra interno ed esterno	172
12.2.4	L'osservazione del collasso dall'esterno	174
13	Universo su grande scala	177
13.1	Inquadramento del problema	177
13.2	Equazioni del moto	179
13.3	Classificazione degli universi	181
13.4	Red-shift cosmologico	182
13.4.1	z al secondo ordine	184
13.5	Dati osservativi e problemi del Modello Standard	185

Parte I

Verso la relativit  generale

Capitolo 1

Relativit  ristretta

1.1 Introduzione

La relativit  generale   una teoria covariante, ossia invariante per diffeomorfismi, delle interazioni gravitazionali mentre la relativit  ristretta, basata sul postulato della costanza della velocit  della luce c   covariante solo per trasformazioni di Lorentz. La relativit  generale   basata sul principio di equivalenza fra massa inerziale e massa gravitazionale da cui segue l'invarianza per diffeomorfismi

$$(t, \vec{x}) \rightarrow \begin{cases} x'(\vec{x}, t) \\ t'(\vec{x}, t) \end{cases}$$

Si ha un'analogia con l'elettromagnetismo dove nel caso statico, o non relativistico, vale l'equazione :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = -\rho_e$$

cove ρ_e   la densit  di carica, ϕ   il potenziale elettrostatico e si   in unit  naturali. L'equazione precedente, estesa alla relativit  ristretta, diviene

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = -\rho_e$$

dove il termine magnetico $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$   la correzione relativistica. Analogamente si ha un'estensione relativistica dell'equazione

$$\vec{\nabla}^2 \varphi = 4\pi G \rho_m$$

dove φ   il potenziale gravitazionale e ρ_m   la densit  di massa, che porter  alle equazioni di Einstein. Prima di proseguire pu  essere utile imbastire un confronto fra le interazioni fondamentali.

<i>Interazione</i>	Elettromagnetismo	Interazioni forti	Gravitá
<i>materia che la subisce</i>	particelle cariche elettricamente	Quark	Particelle con massa/energia (tutte)
<i>mediatore dell'interazione</i>	campo e.m. fotone campo abeliano	campi gluonici 8 gluoni campo non abeliano	campo gravitazionale gravitone campo non abeliano
<i>intensitá dell'interazione</i>	carica elettrica	carica di colore	energia/massa
<i>mediatore carico?</i> (interagisce con se stesso?)	No fotone neutro	Si gluoni colorati	Si gravitone ha energia
<i>spin del mediatore</i>	1	1	2 (importante)
<i>simmetrie</i>	invarianza U(1) di gauge abeliana	invarianza SU(3) di gauge non abeliana	diffeomorfismi
<i>quantitá conservata</i>	carica elettrica	carica di colore	4-momento energia-impulso

1.2 Meccanica Newtoniana

Prima di iniziare la trattazione della relativitá ristretta é opportuno ricordare le basi della meccanica newtoniana. La meccanica newtoniana é formulata rispetto a sistemi di riferimento inerziali, ossia dove una particella non soggetta ad alcuna forza si muove di moto uniforme. Un problema fondamentale in meccanica newtoniana consiste nel trovare le trasformazioni che collegano due sistemi k e k' inerziali, dove per sistema di riferimento si considera una terna cartesiana e un orologio. In generale due sistemi di riferimento necessitano di 10 parametri per essere collegati:

- k e k' possono differire per una rotazione degli assi e spessa matematicamente da una matrice di rotazione R ortogonale: $R^T R = 1_3$ cioè $R \in SO(3)$ e indicheremo la trasformazione con $\vec{x} \rightarrow R\vec{x}$.
- k e k' possono differire per una traslazione degli assi ossia $\vec{x} \rightarrow \vec{x} + \vec{a}$ e come nel caso precedente si introducono 3 parametri.
- una traslazione temporale $t \rightarrow t + t_0$ introduce un ulteriore parametro
- infine, poiché due sistemi sono tra loro inerziali se uno rispetto all'altro si muove di moto uniforme, si introducono i restanti 3 parametri che danno la velocitá v_0 di k' rispetto a k .

Un sistema si dice isolato se non agiscono campi esterni al sistema stesso e in questo caso le leggi della fisica sono invarianti per traslazioni e rotazioni degli assi. Nel caso delle rotazioni se nel sistema k si ha $\vec{F} = m\vec{a}$, nel sistema k' si ha $\vec{F}' = m\vec{a}$ dove $\vec{F}' = R\vec{F}$ e $\vec{a}' = R\vec{a}$ con R matrice di rotazione che lega l'orientazione degli assi di k a quelli di k' . Si assume che per un sistema isolato si abbia invarianza per traslazioni nel tempo: le forze non hanno *esplicita* dipendenza dal tempo. Si assume infine l'invarianza di Galileo: due sistemi di riferimento che si muovono con velocitá uniforme v_0 l'uno rispetto all'altro sono equivalenti: sperimento le stesse forze e non posso distinguerli.

In meccanica classica si fa l'ipotesi che intervalli spaziali e temporali siano assoluti: *non* dipendono dal sistema di riferimento. Se considero due sistemi di riferimento k e k' di origini O e O' e un punto P ad un tempo generico t qualsiasi vale la relazione vettoriale:

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$$

dove $\overrightarrow{OP}(t)$ é la posizione del punto $P(t)$ misurata nel sistema k cioè $\overrightarrow{OP}(t) = x(t)$, $\overrightarrow{OO'}(t)$ é la posizione dell'origine $O'(t)$ misurata nel sistema k che é pari a $v_0 t$ dove v_0 é la velocità di k' rispetto a k . Infine $\overrightarrow{O'P}(t)$ é la posizione del punto P misurata nel sistema di riferimento k' che chiamo $x'(t)$. Riscrivo l'equazione precedente come:

$$x'(t) = x(t) - v_0 t$$

Derivando una volta rispetto al tempo ottengo

$$v'(t) = v(t) - v_0$$

e derivando un'altra volta ottengo infine:

$$a'(t) = a(t)$$

poiché v_0 é costante. Nei due sistemi di riferimento misuro quindi le stesse forze, poiché misuro le stesse accelerazioni e le masse sono costanti. Ora in questa derivazione c'è un'ipotesi implicita: *il tempo misurato in k e quello misurato in k' sono gli stessi*. Ora ciò parrebbe del tutto ovvio, ma é un'asserzione ipotetica e va verificata: notando come le equazioni di Maxwell, che risultano verificate sperimentalmente in ogni aspetto, non soddisfano l'invarianza galileiana, si può azzardare che spazio e tempo non siano degli assoluti e seguendo questa linea di ragionamento si giunge alla relatività ristretta. Prima però analizzo le equazioni di Maxwell.

1.3 Le equazioni di Maxwell

La forza di Lorentz agente su una particella di carica e é:

$$\vec{F} = m\vec{a} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

dove \vec{E} é il campo elettrico, \vec{B} il campo magnetico e \vec{v} é la velocità della particella. Le equazioni di Maxwell sono:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{1}{c} \vec{J} \end{aligned}$$

dove ρ e \vec{J} sono rispettivamente le densità di carica e di corrente. Tutte le quantità espresse sono misurate nel sistema k e, se voglio la covarianza nel passaggio al sistema k' la forza di Lorentz espressa nel sistema k' sarebbe:

$$ma' = e \left(E' + \frac{\vec{v}'}{c} \times B' \right) \tag{1.1}$$

Nella sezione precedente si era visto che le accelerazioni e le forze misurate nei due sistemi di riferimento erano uguali, di conseguenza dovrà valere

$$\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right) = \left(E' + \frac{\vec{v}'}{c} \times B' \right) \quad (1.2)$$

L'equazione (1.2) é soddisfatta se i campi \vec{E} e \vec{B} trasformano come:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \frac{v_0}{c} \times \vec{B} \quad \vec{B}' = \vec{B}$$

ricordando che $v' = v - v_0$. Se mi metto nel vuoto, $\rho = J = 0$, si ha:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{v_0}{c} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 + \frac{v_0}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t} \neq 0$$

Ho ottenuto un palese assurdo derivante dal fatto che le equazioni di Maxwell non sono invarianti in forma per le trasformazioni di Galileo. Infatti si sa che le soluzioni delle equazioni di Maxwell nel vuoto sono onde che si propagano con velocità c in ogni sistema di riferimento e tale assunto é incompatibile con la trasformazione delle velocità $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0$ delle trasformazioni di Galileo. Ricordando che le trasformazioni di Galileo si erano ottenute ipotizzando che gli intervalli spaziali e temporali fossero delle quantità assolute si delinea il conflitto fra questi assoluti e l'aver c costante. La strategia che si é seguita, dopo aver visto che modificare le equazioni di Maxwell non portava da nessuna parte, é la seguente:

1. Accetto le equazioni di Maxwell cosí come sono e postulo che la velocità della luce c sia la stessa in ogni sistema di riferimento.
2. cerco nuove trasformazioni che preservino $c = \text{costante}$.
3. modifico le leggi della meccanica in modo che siano invarianti sotto queste nuove trasformazioni, che saranno le trasformazioni di Lorentz.

Operando in questo modo si entra nella relatività ristretta, che sarà introdotta nella prossima sezione.

1.4 Le basi della relatività ristretta

1.4.1 Postulati

Al pari della fisica classica, la fisica relativistica assume l'omogeneità dello spazio e del tempo e l'isotropia dello spazio. La costanza della velocità della luce in ogni sistema inerziale di riferimento é presa come postulato. La relatività galileiana é ampliata dalla relatività einsteiniana: *tutte* le leggi della fisica sono invarianti in forma nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro inerziale. Tale assunto é soddisfatto automaticamente dalle equazioni di Maxwell (come si vedrá in seguito le equazioni di Maxwell possono essere scritte in una forma *covariante a vista*) mentre le trasformazioni di Galileo dovranno essere modificate. Infine l'omogeneità dello spazio e del tempo si traduce nella linearità delle trasformazioni $k \rightarrow k'$.

1.4.2 Notazione

Si definisce evento una quaterna di numeri che danno la posizione spaziale e temporale di un certo punto rispetto ad un sistema di riferimento inerziale.

$$\text{evento} = (\vec{x}, t)$$

Si possono rendere dimensionalmente omogenee le coordinate moltiplicando la coordinata temporale per c , che spesso si pone pari a 1. Ponendo $x_0 = ct$ un evento é rappresentato dal 4-vettore $x^\mu = (x^0, \vec{x})$ dove $\mu = 0, 1, 2, 3$. l'indice $i = 1, 2, 3$ indica la parte spaziale, da cui $\mu = 0, i$. Se un evento ha coordinate x^μ in un sistema di riferimento k , avrà coordinate $x'^\mu = f^\mu(x)$ in un sistema k' dove $f^\mu(x)$ indica una quaterna di funzioni dipendenti da $x = (ct, \vec{x}) = (x_0, \vec{x}) = x^\mu = 4$ -vettore posizione.

Due eventi che distano di un infinitesimo posso essere espressi come x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ e differenziando $x'^\mu = f^\mu(x)$ si ha:

$$dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

Ponendo $\frac{\partial}{\partial x^\nu} \equiv \partial_\nu$ e usando la convenzione di Einstein per cui se in un' espressione compare due volte uno stesso indice é sottintesa la somma posso riscrivere l'espressione precedente come:

$$dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu \quad (1.3)$$

dove si é posto $\Lambda_\nu^\mu = \partial_\nu f^\mu(x)$. Gli indici sommati sono detti muti e possono essere chiamati arbitrariamente, mentre gli indici non sommati devono corrispondere nei due membri di ogni equazione. Infine, in relativitá si distingue fra gli indici scritti in alto (controvarianti) e quelli scritti in basso (covarianti), per ragioni che saranno piú chiare procedendo. Considero l'esempio delle traslazioni spaziali:

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu \Rightarrow$$

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu + \frac{\partial a^\mu}{\partial a^\nu} da^\nu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial a^\mu}{\partial a^\nu} \right) dx^\nu = (\Lambda_\nu^\mu(x) + \Lambda_\nu^\mu(a)) dx^\nu = \Lambda_\nu^\mu(x + a) dx^\nu$$

dove nell'ultimo passaggio si é usata la linearitá della trasformazione Λ_ν^μ .

So che in generale deve valere (1.3) e l'unico modo in cui l'equazione (1.3) é conciliabile con l'ultimo passaggio scritto sopra é che Λ_ν^μ non dipenda da x . Di conseguenza integrando (1.3) si ottiene:

$$x'^\mu = f^\mu(x) = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + b^\mu \quad (1.4)$$

dove $\Lambda_\nu^\mu x^\nu$ é la parte lineare e b^μ é la parte non omogenea.

Ricordo che si era visto che i parametri da cui dipendono le leggi di trasformazione da un sistema all'altro erano 10: b^μ fornisce 4 parametri, di conseguenza i restanti 6 dovranno venire da $\Lambda_\nu^\mu x^\nu$. Ora in generale $\Lambda_\nu^\mu x^\nu$ é una matrice 4×4 e ha 16 parametri. Il fatto che solo 6 siano indipendenti deriva dalla condizione $c = \text{costante}$.

Riveste particolare importanza la definizione dell'intervallo *s² fra due eventi*: dato due eventi $x_1^\mu = (x_1^0 = ct_1, \vec{x}_1)$ e $x_2^\mu = (x_2^0 = ct_2, \vec{x}_2)$ si definisce:

$$s^2 \equiv (x_1^0 - x_2^0)^2 - (\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2 \geq 0 \quad (1.5)$$

Se $x^\mu = (x^0, \vec{x}) \Rightarrow x_\mu = (x^0, -\vec{x})$ e si definisce la metrica piatta o di Minkowski nel modo seguente:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \eta^{\mu\nu} \quad (1.6)$$

$\eta_{\mu\nu}$ é simmetrica cioè vale $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$, $\eta^{\mu\nu}\eta_{\nu\rho} = \delta_\rho^\mu$ e, poiché $\eta_{\mu\nu}$ cambia solo la parte spaziale di un 4-vettore si ha:

$$\begin{aligned} x_\mu &= \eta_{\mu\nu}x^\nu \\ x^\mu &= \eta^{\mu\nu}x_\nu \end{aligned}$$

Usando queste relazioni il 4-intervallo si può esprimere come:

$$s^2 = (x_1^\mu - x_2^\mu)(x_{1\mu} - x_{2\mu}) = (x_1^\mu - x_2^\mu)\eta_{\nu\mu}(x_1^\nu - x_2^\nu) \quad (1.7)$$

Nel caso di eventi separati da un infinitesimo come x^μ e $x^\mu + dx^\mu$ si ha:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = dx^\mu dx^\nu \eta_{\mu\nu} \quad (1.8)$$

Come si vede il 4-intervallo é una quantità scalare e come si dimostrerà nella prossima sezione é un invariante relativistico, ossia il valore calcolato per s^2 di due eventi é lo stesso in ogni sistema di riferimento inerziale.

1.5 Invarianza del 4-intervallo

Ci si propone di dimostrare che il 4-intervallo é invariante per trasformazioni di Lorentz per ogni coppia di eventi e come primo passo mostriamo che, se due eventi sono collegati da un raggio luminoso, vale $ds^2 = 0$ con $ds^2 = 0$ dato da (1.8).

Infatti $d\vec{x}$ = percorso fatto dalla luce = $\vec{c}dt = c\vec{n}dt = \vec{n}dx_0$ con \vec{n} = versore che punta nella direzione della luce. Si ha quindi:

$$d\vec{x} \cdot d\vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{n} dx_0^2 = dx_0^2 \Rightarrow ds^2 = dx_0^2 - d\vec{x}^2 = dx_0^2 - dx_0^2 = 0$$

dove si ricorda che $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ perché \vec{n} é un versore. Valendo anche il viceversa si ha la seguente proposizione: $ds^2 = 0 \Leftrightarrow$ esiste un raggio luminoso che connette i due eventi x_μ e $x_\mu + dx_\mu$. Inoltre, poiché la luce é la stessa in tutti i sistemi di riferimento, se $ds^2 = 0$ in un sistema k allora $ds'^2 = 0$ in un qualsiasi altro sistema k' . Fatto questo ci si propone di dimostrare che $ds^2 = ds'^2 \forall$ coppia di eventi. Si era visto precedentemente che valeva

$$x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu + b^\mu \Rightarrow dx'^\mu = \Lambda_\nu^\mu dx^\nu$$

Nel sistema k' si ha:

$$ds'^2 = dx'^\mu \eta_{\mu\rho} dx'^\rho = dx^\nu \Lambda_\nu^\mu \eta_{\mu\rho} \Lambda_\alpha^\rho dx^\alpha = dx^\nu dx^\alpha G_{\nu\alpha}$$

dove é stata definita la matrice $G_{\nu\alpha} \equiv \Lambda_\nu^\mu \eta_{\mu\rho} \Lambda_\alpha^\rho$. Se uso una notazione matriciale per semplificare la notazione devo ricordare che la trasposta di una matrice si ottiene invertendo gli indici cioè $\Lambda^{\mu T}_\nu = \Lambda_\nu^\mu$ in modo da avere in consueto prodotto righe per colonne che presuppone di

sommare indici adiacenti. In questo modo $G_{\nu\alpha} \equiv \Lambda^\mu{}_\nu \eta_{\nu\rho} \Lambda^\rho{}_\alpha = \Lambda_\nu{}^\mu \eta_{\nu\rho} \Lambda^\rho{}_\alpha$ e avendo gli indici sommati adiacenti posso scrivere in modo piú compatto il prodotto matriciale:

$$G = \Lambda^T \eta \Lambda \quad (1.9)$$

Si vede che G é simmetrica: $G^T = (\Lambda^T \eta \Lambda)^T = \Lambda^T \eta^T \Lambda = \Lambda^T \eta \Lambda = G$. Considero un sistema di assi (t, x_1, x_2, x_3) e un segnale luminoso che si propaga lungo x_1 positiva: mi propongo di dimostrare che $ds'^2 = ads^2$. Da quello visto precedentemente dovrà essere

$$ds'^2 = dx^\nu dx^\alpha G_{\nu\alpha} = (dx^0)^2 G_{00} + (dx^1)^2 G_{11} + 2G_{01} dx^0 dx^1 = (dx^0)^2 (G_{00} + G_{11} + 2G_{01}) = 0$$

poiché G é simmetrica e $dx^2 = dx^3 = 0$. Se considerassi un raggio luminoso che si propaga lungo l'asse x_1 negativo otterrei:

$$ds'^2 = (dx^0)^2 (G_{00} + G_{11} - 2G_{01}) = 0$$

da cui concludo che $G_{01} = G_{10} = 0$ e $G_{11} = -G_{00}$. Se considerassi un raggio che si propaga lungo x_2 o x_3 e ripetessi l'analisi troverei alla fine:

$$G_{0i} = G_{i0} \quad G_{11} = G_{22} = G_{33} = -G_{00} \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (1.10)$$

Attualmente le conoscenze degli elementi della matrice G é graficamente:

$$\begin{pmatrix} G_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -G_{00} & ? & ? \\ 0 & ? & -G_{00} & ? \\ 0 & ? & ? & -G_{00} \end{pmatrix}$$

Con questa struttura $ds'^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ diventa

$$ds'^2 = G_{00} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + \sum_{i \neq j} dx^i dx^j G_{ij} = G_{00} ds^2 + \sum_{i \neq j} dx^i dx^j G_{ij} \quad (1.11)$$

dove il primo termine dá la somma dei termini diagonali e il secondo dei termini spaziali fuori diagonale. Considero un segnale luminoso arbitrario la cui direzione di propagazione é data dal versore di propagazione n^i da cui $dx^i = n^i dx^0$ e dovrà essere $ds^2 = ds'^2 = 0$. Unendo quest'informazione con (1.11) si ha:

$$ds'^2 = ads^2 + (dx^0)^2 \sum_{i \neq j} n^i G_{ij} n^j = 0$$

Poiché $ds^2 = 0$ deve essere $G_{ij} = 0$, ossia G_{ij} é una matrice diagonale: si é giunti al punto di dire che $ds'^2 = ads^2$ con $a = G_{00} = \Lambda_0^\mu \Lambda_0^\nu \eta_{\mu\nu}$.

A priori, a può essere funzione solo degli angoli relativi o della velocità relativa \vec{v} fra i due sistemi di riferimento. Ma ds^2 é un invariante rispetto alle rotazioni, essendo un prodotto scalare, per cui a dipende al massimo da \vec{v} . Però vale l'ipotesi di isotropia dello spazio per cui a non può dipendere dalle singole componenti di \vec{v} , semmai dipende dal modulo di \vec{v} , $|\vec{v}|$, che é invariante per rotazioni (é anch'esso un prodotto scalare). L'ultima cosa che rimane da dimostrare é che $a(|\vec{v}|) = 1$ e per fare ciò si considerano tre sistemi di riferimento inerziali k , k_1 e k_2 e si indica con \vec{v}_1 la velocità di k_1 rispetto a k , con \vec{v}_2 la velocità di k_2 rispetto a k e

con \vec{v}_{12} la velocità di k_2 rispetto a k_1 . Con i risultati ottenuti prima posso scrivere le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} k \rightarrow k_1 &\Rightarrow ds_1^2 = a(|\vec{v}_1|)ds^2 \\ k \rightarrow k_2 &\Rightarrow ds_2^2 = a(|\vec{v}_2|)ds^2 \\ k_2 \rightarrow k_1 &\Rightarrow ds_1^2 = a(|\vec{v}_{12}|)ds_2^2 \end{aligned}$$

da cui ricavo

$$\frac{ds_1^2}{ds_2^2} = \frac{a(|\vec{v}_1|)}{a(|\vec{v}_2|)} = a(|\vec{v}_{12}|)$$

Ora $\frac{a(|\vec{v}_1|)}{a(|\vec{v}_2|)}$ non dipende dall'angolo fra \vec{v}_1 e \vec{v}_2 ma $a(|\vec{v}_{12}|)$ sí: l'unica soluzione é che a non dipenda da $|\vec{v}|$ e quindi deve essere una costante; in particolare si ottiene $a/a = a$ da cui $a = 1$. Si é dimostrato quindi che il 4-intervallo é uno scalare e se si fosse già introdotta la geometria differenziale e tutto ciò che ci segue la dimostrazione sarebbe stata molto piú veloce... ma questo si vedrá piú avanti.

1.6 Trasformazioni di Lorentz e calcolo tensoriale

Dalla dimostrazione precedente si é visto che la matrice $G = \text{diag}\{G_{00}, -G_{00}, -G_{00}, -G_{00}\} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\} = \eta$. Di conseguenza posso scrivere l'importante equazione matriciale:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta \tag{1.12}$$

η e $\Lambda^T \eta \Lambda$ sono matrici simmetriche 4×4 per cui devono essere fissate 10 condizioni su Λ . Λ ha in partenza 16 parametri per cui ne rimangono 6 di indipendenti: 3 che verranno dalle rotazioni spaziali e 3 dalle trasformazioni speciali di Lorentz.

Una rotazione spaziale é rappresentata da una matrice ortogonale 3×3 ossia tale che $R^T R = 1_{3 \times 3}$. Poiché tale trasformazione non agisce sul tempo la matrice Λ corrispondente é:

$$\begin{pmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & R_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

Nel caso delle trasformazioni di Lorentz speciali lungo l'asse x si ottiene la consueta struttura

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove si sono definiti le solite quantità $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ e $\beta = v/c$ dove v é la velocità relativa fra i due sistemi di riferimento collegati dalla trasformazione di Lorentz. Naturalmente la matrice scritta sopra é equivalente al set di equazioni:

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \end{aligned}$$

In ogni caso si verifica che é verificata l'equazione $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$.

1.7 Elementi di teoria gruppale

In questa sezione verranno inquadrati gli elementi dati fin qui nella teoria dei gruppi, in particolare si esaminerá il gruppo di Lorentz e quello di Poincaré. Non si entrerà molto in dettaglio, ma ci si limiterá al minimo indispensabile per formalizzare meglio le nozioni fin qui apprese.

Si definisce con \mathcal{L} il gruppo di Lorentz nel seguente modo:

$$\mathcal{L} = \{ \Lambda_{4 \times 4} \text{ t.c. } \Lambda^T \eta \Lambda = \eta \} \equiv O(1, 3)$$

dove la “O” sta per ortogonale e “(1,3)” ricorda la struttura della matrice η . L’operazione che definisce la struttura gruppale é la moltiplicazione fra matrici: se $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L}$ allora si ha

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta (\Lambda_1 \Lambda_2) = \Lambda_2^T \underbrace{\Lambda_1^T \eta \Lambda_1}_{\eta} \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta \Rightarrow \Lambda_1 \Lambda_2 \in \mathcal{L}$$

Il gruppo delle matrici ortogonali 4×4 é definito come

$$O(4) = \{ G_{4 \times 4} \text{ t.c. } G^T G = 1_{4 \times 4} \}$$

Sia $O(1,3)$ che $O(4)$ hanno 6 generatori e $O(1,3) \sim O(4)$. Se chiamo il gruppo delle matrici unitarie complesse $SU(2)$ si può mostrare che vale anche $O(4) = SU(2) \times SU(2)$. Ora passiamo all’analisi del valore che può assumere il determinante di un elemento di $SO(1, 3)$: dalla definizione del gruppo vale l’equazione

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = (\det \Lambda^T) (\det \eta) (\det \Lambda) = (\det \Lambda)^2 (\det \eta) = \det \eta \Rightarrow (\det \Lambda)^2 = 1$$

Ora, gli elementi di \mathcal{L} con determinante pari a -1 non formano un gruppo in quanto il prodotto di due tali elementi da una matrice di determinante +1 e, in ogni caso, non contengono l’unitá. Gli elementi di \mathcal{L} con determinante pari a +1 formano invece un sottogruppo denominato $SO(1, 3)$, dove la “S” sta per speciale, che significa con determinante =1. Se voglio connettere elementi dei due gruppi basta moltiplicare per la matrice η che corrisponde anche alla matrice di paritá (inverte le componenti spaziali ma non quella temporale). Ricordo che esplicitamente $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ significa:

$$\Lambda^\mu_{\alpha} \eta_{\nu\mu} \Lambda^\nu_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}$$

da cui si ha in particolare

$$\eta_{00} = 1 = \Lambda^\mu_0 \eta_{\nu\mu} \Lambda^\nu_0 = (\Lambda^0_0)^2 - \underbrace{(\Lambda^i_0 \Lambda^i_0)}_{\text{quantitá} > 0} = 1$$

Anche qui si possono distinguere due casi: $\Lambda^0_0 \geq 0$ e $\Lambda^0_0 \leq 0$.

Se considero gli elementi di \mathcal{L} che abbiano determinante =1 e che abbiano $\Lambda^0_0 \geq 0$ allora mi sono ulteriormente ristretto al sottogruppo $SO(1, 3)_c$ dove la “c” sta per “connesso all’identitá” per ovvi motivi. Se volessi passare da un elemento di $SO(1, 3)_c$ a uno con $\Lambda^0_0 \leq 0$ allora devo moltiplicare per la matrice di inversione temporale che é $T = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$. Ci si può chiedere il perché di tutta questa pignoleria sui sottogruppi di \mathcal{L} : la risposta é semplice e consiste nell’affermazione che $SO(1, 3)_c$ é il gruppo per cui la relativitá ristretta é invariante in meccanica quantistica. Prima di concludere questa sezione vedremo le trasformazioni infinitesime di $SO(1, 3)_c$ e poi parlare un pó di tensori in modo da avere il formalismo giusto per trattare la meccanica del punto materiale dal punto di vista relativistico.

1.7.1 Trasformazioni infinitesime

Considero una trasformazione infinitesima di $SO(1,3)_c$: visto che l'identità appartiene a $SO(1,3)_c$ la scriverò come l'identità piú una piccola matrice ω_ν^μ . Con piccola intendo che termini in ω^2 li trascuro. Sostituisco quindi l'espressione $\Lambda_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + \omega_\nu^\mu$ in $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ ottenendo:

$$(1 + \omega)^T \eta (1 + \omega) = \eta \Rightarrow \eta + \omega^T \eta + \eta \omega + \omega^T \eta \omega = \eta$$

trascurando il termine $\omega^T \eta \omega$ si ottiene $\omega^T \eta = -\eta \omega$. Ricordando che $\eta^T = \eta$ ho che $\omega^T \eta = \omega^T \eta^T = (\eta \omega)^T$ da cui $\eta \omega = -\omega^T \eta$ e moltiplicando a sinistra per η si ottiene infine:

$$\omega^T = -\eta \omega \eta \quad (\eta \eta = 1)$$

Se introduco $\hat{\omega} = \omega \eta$ ho che $\hat{\omega}^T = \eta \omega^T = (\omega \eta)^T = -\omega \eta = -\hat{\omega}$ cioè $\hat{\omega}$ é una matrice antisimmetrica 4×4 quindi ha 6 parametri indipendenti. Se voglio arrivare alle trasformazioni finite ottengo $\Lambda(\omega) = \exp(\omega)$ infatti si ha:

$$\Lambda^T \eta \Lambda = e^{\omega^T} \eta e^\omega = e^{-\eta \omega \eta} \eta e^\omega = (\eta e^{-\omega} \eta) \eta e^\omega = \eta$$

In questo caso si ha quindi $x'^\mu = \Lambda_\nu^\mu x^\nu = \delta_\nu^\mu x^\nu + \omega_\nu^\mu x^\nu = x^\mu + \hat{\omega} \eta x^\mu = x^\mu + \hat{\omega}^{\mu\nu} x_\nu$. Si puó mostrare che a causa dell'antisimmetria di $\hat{\omega}$ si ottengono in dettaglio per le componenti:

$$\hat{\omega}^{ij} = \epsilon^{ijk} \omega^k \quad \hat{\omega}^{0i} = \frac{v^i}{c}$$

dove si é introdotto in tensore totalmente antisimmetrico a 3 indici ϵ^{ijk} tale che $\epsilon^{123} = 1$ e $\epsilon^{ijk} = -1$ per ogni permutazione dispari di 123.

1.7.2 Ancora sui gruppi

Si é visto come si definisce il gruppo di Lorentz e tutti i suoi sottogruppi principali. Ora introduciamo il gruppo di Poincaré: Gli elementi del gruppo di Poincaré sono gli elementi del gruppo di Lorentz piú gli elementi del gruppo delle traslazioni, sia spaziali che temporali. Di conseguenza i generatori del gruppo di Poincaré sono i 6 del gruppo di Lorentz + i 4 delle traslazioni spaziotemporali.

L'importanza di definire il gruppo di Poincaré risiede nella seguente affermazione: *si richiede la covarianza di tutte le leggi della fisica per trasformazioni appartenenti al gruppo di Poincaré*. Quest'affermazione significa che ci si aspetta che le leggi della fisica siano invarianti in forma per traslazioni spaziali, temporali, per rotazioni spaziali e per trasformazioni di Lorentz.

Il gruppo di simmetria delle rotazioni spaziali in 3D é $SO(3)$ e le leggi della fisica sono invarianti per $SO(3)$ se scritte in forma vettoriale come l'esempio tipico $\vec{F} = m\vec{a}$: se vale $\vec{F} = m\vec{a}$ allora vale anche $\vec{F}' = m\vec{a}'$ con $\vec{a}' = R\vec{a}$ e $\vec{F}' = m\vec{F}'$ dove R é la matrice di rotazione che connette i due sistemi di riferimento. Si possono introdurre dei tensori invarianti per $SO(3)$ cioè dei tensori che assumono gli stessi valori indipendente dal sistema di riferimento scelto. Per vedere se un tensore é invariante basta vedere che succede se lo facciamo ruotare con un numero di matrici R pari al rango (numero di indici) del tensore. La delta di Kronecker δ^{ij} é invariante per $SO(3)$:

$$\delta^{ij} = R^{ik} R^{jl} \delta^{kl} = R^{ik} R^{jk} = R^{ik} (R^{kj})^T = \delta^{ij}$$

Anche il tensore totalmente antisimmetrico ϵ^{ijk} é invariante:

$$\epsilon^{ijk} = R^{im} R^{jn} R^{kl} \epsilon^{mnl} = (\det R) \epsilon^{ijk} = \epsilon^{ijk}$$

Puó essere utile usare le proprietá di antisimmetria di ϵ^{ijk} per scrivere in modo tensoriale e piú compatto grandezze fondamentali sia in fisica classica che in fisica quantistica come il momento angolare: considero una particella massa m , velocitá v^i che si trova in una posizione r^i rispetto all'asse di rotazione. Solitamente il suo momento angolare si scrive come $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$ ma si puó scrivere anche come:

$$L^i = \epsilon^{ijk} r^j m v^k$$

Infatti considerando per esempio la componente L^1 si ha

$$L^1 = \epsilon^{1jk} r^j m v^k = \epsilon^{123} r^2 m v^3 + \epsilon^{132} r^3 m v^2 = r^2 m v^3 - r^3 m v^2 = m (r \times v)_1$$

(2 e 3 non sono esponenti ma indicano le componenti lungo y e z dei vettori) ricordando la totale antisimmetria di ϵ^{ijk} . Passando dal gruppo di simmetria delle rotazioni spaziali $SO(3)$ al gruppo di Lorentz $SO(1,3)$ di cui le rotazioni sono un sottogruppo si devono puntualizzare importanti differenze:

- i vettori 3D \vec{x} diventano i 4-vettori x^μ
- $\delta^{ij} \rightarrow \eta^{\mu\nu}$
- bisogna distinguere fra indici in alto e in basso. perché $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ e $\eta_{\mu\nu}$ non é l'identitá.

1.7.3 Trasformazione di tensori

Si é visto che un vettore controvariante trasforma come:

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$$

Ora cerchiamo la legge di trasformazione di un tensore con un indice covariante come dx_μ :

$$dx_\mu = \eta_{\mu\nu} dx^\nu \Rightarrow dx'_\mu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho dx^\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \eta^{\rho\alpha} dx_\alpha$$

definisco quindi:

$$\tilde{\Lambda}^\alpha_\rho = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\rho \eta^{\rho\alpha} \Rightarrow dx'_\mu = \tilde{\Lambda}^\alpha_\mu dx_\alpha \quad (1.13)$$

Posso scrivere come prodotto matriciale $\tilde{\Lambda} = \eta \Lambda \eta$ da cui ricavo l'importante proprietá:

$$\Lambda^T \tilde{\Lambda} = \underbrace{\Lambda^T \eta \Lambda}_{\eta \text{ se } \Lambda \in SO(1,3)} \quad \eta = \eta \cdot \eta = 1 \Rightarrow \tilde{\Lambda} = \Lambda^{-T} \quad (1.14)$$

Ci si rende conto come l'equazione $R^T R = 1$ che vale in $SO(3)$ diventa $\Lambda^T \tilde{\Lambda} = 1$ in $SO(1,3)$ Potendo utilizzare questi risultati si puó dimostrare in modo immediato l'invarianza del 4-intervallo:

$$dx'^\mu dx'_\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu \tilde{\Lambda}^\alpha_\mu dx_\alpha = \left(\Lambda^T \tilde{\Lambda} \right)_\nu^\alpha dx^\nu dx_\alpha = \delta_\nu^\alpha dx^\nu dx_\alpha = dx^\nu dx_\nu \quad (1.15)$$

1.8 Quadritensori

Dopo aver ricavato le equazioni (1.13) e (1.14) si può procedere più organicamente definendo come trasforma un generico tensore T con tot indici in alto e tot indici in basso.

$$T_{N \text{ indici}}^M \text{ indici} : A_{\mu_1, \dots, \mu_N}^{\nu_1, \dots, \nu_M} = \Lambda_{\beta_1}^{\nu_1} \dots \Lambda_{\beta_M}^{\nu_M} \tilde{\Lambda}_{\mu_1}^{\alpha_1} \dots \tilde{\Lambda}_{\mu_N}^{\alpha_N} A_{\alpha_1, \dots, \alpha_N}^{\beta_1, \dots, \beta_M} \quad (1.16)$$

Specializzando tale formula a casi più semplici (e più utili) si ritrovano le consuete formule:

$$A'^{\mu} = \Lambda_{\nu}^{\mu} A^{\nu}$$

$$A'_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}^{\nu} A_{\nu}$$

$$A' = A$$

cioè gli scalari sono invarianti nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro; esempi di quantità scalari sono ma massa riposo di una particella, la carica elettrica e la velocità della luce. Infine va detto che i tensori di un determinato rango formano uno spazio vettoriale: somme di tensori di uno stesso rango sono ancora tensori dello stesso rango e un tensore di un rango moltiplicato per uno scalare resta un tensore dello stesso rango.

Ora daremo alcune definizioni utili:

- un tensore $T^{\mu\nu}$ è simmetrico se $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$.
- $T^{\mu\nu}$ è antisimmetrico se $T^{\mu\nu} = -T^{\nu\mu} \Rightarrow T^{\mu\mu} = 0$.
- $T_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}) \equiv$ parte simmetrica di $T_{\mu\nu}$.
- $T_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2} (T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}) \equiv$ parte antisimmetrica di $T_{\mu\nu}$.
- $T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}$.
- un tensore è simmetrico $\Leftrightarrow T_{[\mu\nu]} = 0$
- un tensore è antisimmetrico $\Leftrightarrow T_{(\mu\nu)} = 0$.

Le relazioni seguenti si possono facilmente spendere al caso di tensori con più di due indici, basta seguire le seguenti regole:

1. $\frac{1}{2}$ diventa $\frac{1}{\text{fattoriale numero indici}}$.
2. per la parte simmetrica al posto di $(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu})$ bisogna sommare tutte le permutazioni possibili degli indici del tensore.
3. per la parte antisimmetrica al posto di $(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu})$ vanno sommati tutte le permutazioni pari di $T_{\mu\nu}$ e sottratte tutte quelle dispari.

Se considero un tensore a tre indici $T_{\mu\nu\rho}$ ottengo:

$$T_{(\mu\nu\rho)} = \frac{1}{3!} (T_{\mu\nu\rho} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu} + T_{\nu\mu\rho} + T_{\mu\rho\nu} + T_{\rho\nu\mu})$$

$$T_{[\mu\nu\rho]} = \frac{1}{3!} (T_{\mu\nu\rho} + T_{\nu\rho\mu} + T_{\rho\mu\nu} - T_{\nu\mu\rho} - T_{\mu\rho\nu} - T_{\rho\nu\mu})$$

Gli indici di un tensore si possono alzare e abbassare usando la metrica $\eta_{\mu\nu}$ come nei seguenti esempi:

$$\begin{aligned} A^\mu &\rightarrow A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \\ T_{\mu\nu}{}^\rho &\rightarrow T^\mu{}_\nu{}^\rho = \eta^{\nu\alpha} T_{\alpha\nu}{}^\rho \end{aligned}$$

Due indici di un tensore vengono contratti se sono sommati fra loro. Ad esempio la traccia di un tensore a due indici definita come $T^\mu{}_\mu = T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3$ è uno scalare come si può dimostrare dalla legge di trasformazione di $T^\mu{}_\mu$:

$$T'^\mu{}_\mu = \Lambda^\mu{}_\alpha \tilde{\Lambda}^\beta{}_\mu T^\alpha{}_\beta = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^{\mu T} \tilde{\Lambda}^\beta{}_\mu T^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta T^\alpha{}_\beta = T^\alpha{}_\alpha$$

Allo stesso modo si dimostra che $T'_\nu{}^\mu = T_{\mu\nu}{}^\mu = \tilde{\Lambda}_\nu{}^\beta T_\beta$.

Prodotti di tensori sono tensori di rango pari alla somma dei ranghi dei tensori di partenza, tenendo conto delle eventuali contrazioni che abbassano ogni volta il rango di due. Ricordo che i tensori sono invarianti per traslazioni e concludo questa parte scrivendo i tensori invarianti per $S(1, 3)$ che sono:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \end{aligned}$$

$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è il tensore totalmente antisimmetrico a quattro indici tale che $\epsilon^{0123} = 1$ così come tutte le permutazioni pari di 0123, vale -1 per tutte le permutazioni dispari di 0123 e vale 0 se almeno due indici sono uguali.

1.8.1 Campi tensoriali

Si definisce *campo scalare* un oggetto ad una componente il cui valore dipende dallo spazio tempo (è come assegnare un numero ad ogni evento) e lo indico con $\Phi(x)$. Essendo uno scalare deve essere invariante per le trasformazioni di Poincaré che sono le rototraslazioni del tipo:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

invertendo questa equazione ottengo $x = \Lambda^{-1}(x' - a)$ da cui alla fine

$$\Phi'(x') = \Phi(x) = \Phi(\Lambda^{-1}(x' - a)) \quad (1.17)$$

Un campo vettoriale controvariante è un oggetto $A^\mu(x)$ che trasforma come un vettore:

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(x) \quad (1.18)$$

Analogamente un campo tensoriale $T^\mu{}_\nu(x)$ trasformerà come:

$$T'^\mu{}_\nu(x') = \Lambda^\mu{}_\gamma \tilde{\Lambda}^\beta{}_\nu T^\gamma{}_\beta(x) \quad (1.19)$$

Ora dimostro il teorema che afferma: *se $\Phi(x)$ è un campo scalare allora $A_\mu(x) \equiv \partial_\mu \Phi(x) \equiv$ quadrigradiente è un campo vettoriale covariante.* Infatti si ha:

$$\begin{aligned} \partial'_\mu \Phi'(x') &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu} \Phi(x) \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha} \end{aligned}$$

Ora però si nota che

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\alpha_\mu = (\Lambda^{-T})^\alpha_\mu = \tilde{\Lambda}_\mu^\alpha$$

Si vede quindi come $\frac{\partial \Phi}{\partial x^\alpha}$ trasforma con la matrice $\tilde{\Lambda}_\mu^\alpha$ ossia trasforma come un tensore con un indice covariante. Questo risultato é generalizzabile nell'affermazione: *il quadrigradiente di un tensore a M indici in alto e N in basso é un nuovo tensore con ancora M indici in alto e (N+1) indici in basso*. Concludo avvertendo che questo risultato é valido in relativitá ristretta dove gli indici si alzano e si abbassano con la metrica $\eta_{\mu\nu}$. Si vedrá piú avanti che, in generale, derivando un tensore non si ottiene un altro tensore.

Prima di concludere questa parte dimostro alcune proprietá tensoriali che saranno utili nel trattare le equazioni di Maxwell in forma relativisticamente invariante.

La prima afferma che $S^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0$ se $S^{\mu\nu}$ é un tensore simmetrico e $A_{\mu\nu}$ é un tensore antisimmetrico. Infatti, avendosi $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ e $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ si ha:

$$A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} S_{\mu\nu} = -A^{\nu\mu} S_{\nu\mu} = -A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} \Rightarrow A^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = 0 \quad (1.20)$$

dove si é usato il fatto che non conta come chiamo gli indici muti, proprio perché sono sommati, basta solo non dare nomi uguali a quelli di altri indici non saturati.

La seonda proprietá afferma riguarda i tensori completamente antisimmetrizzati come $H_{\mu\nu\rho} = H_{[\mu\nu\rho]} \Rightarrow H_{\mu\nu\rho} = -H_{\nu\mu\rho} = -H_{\mu\rho\nu} = -H_{\rho\nu\mu}$. Per un tensore siffatto ci sono 4 componenti indipendenti e vale l'equazione:

$$H_{\mu\nu\rho} = 0 \Leftrightarrow \epsilon^{\alpha\mu\nu\rho} H_{\mu\nu\rho} = 0 \quad (1.21)$$

che in realtá sono quattro equazioni, una per ogni valore che puó assumere l'indice libero α .

L'ultima proprietá afferma che

$$\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk} \quad (1.22)$$

perché, per le proprietá di antisimmetria di ϵ^{ijkl} , una volta che la prima componente vale 0 le altre devono assumere obbligatoriamente i valori 1,2,3 perché il tutto non sia nullo.

1.9 Meccanica relativistica del punto materiale

Prima di iniziare l'argomento di questa sezione ricordo che si richiede la covarianza delle leggi della fisica: in meccanica Newtoniana si chiedeva l'invarianza in forma delle leggi nel passaggio da un sistema inerziale ad un altro e si otteneva il risultato voluto formulando le leggi in forma vettoriale come $\vec{F} = m\vec{a}$. Ora, in meccanica relativistica, per avere la covarianza si richiedono equazioni tensoriali, di modo che, passando da un sistema di riferimento inerziale ad un altro attraverso il gruppo di Poincaré, i due membri dell'equazione trasformmino allo stesso modo, preservando cosí la forma dell'equazione. In meccanica Newtoniana si indicava con $\vec{x}(t)$ la legge oraria e con $\vec{x}(\lambda)$, con λ parametro, la traiettoria. Ora con $x^\mu(\lambda)$ si intenderá la legge oraria con la componente 0 di $x^\mu(\lambda)$ e la traiettoria con le componenti spaziali di $x^\mu(\lambda)$.

In meccanica classica la velocitá é un vettore \vec{v} definito come $\vec{v} = d\vec{x}/dt$. In meccanica relativistica però il tempo non é un parametro invariante per cui una derivazione rispetto al tempo non é opportuna. Ricordo che, invece, il 4-intervallo ds^2 é un invariante relativistico e si deriverá rispetto a questo per ottenere l'analogo della velocitá classica. Infatti si ottiene:

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu = (dx^0)^2 - d\vec{x}d\vec{x} = (dx^0)^2 \left[1 - \left(\frac{d\vec{x}d\vec{x}}{dx^0 dx^0} \right) \right] = c^2 dt^2 \left[1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right] \geq 0$$

Quindi, estraendo la radice, e ricordando la definizione del fattore di Lorentz $\gamma \equiv 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ si ha:

$$ds = \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c dt}{\gamma} \Rightarrow s(t) = c \int_0^t \sqrt{1 - \frac{v^2(t')}{c^2}} dt' \quad (1.23)$$

Prima di proseguire noto che posso esprimere ds^2 rispetto ad un parametro arbitrario λ nel seguente modo:

$$ds = \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx_\mu}{d\lambda}} d\lambda$$

Dop aver visto l'equazione (1.23) si può definire il quadrivettore velocità u^μ nel seguente modo:

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds} \Rightarrow u^\mu u_\mu = \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx_\mu}{ds} = \frac{ds^2}{ds^2} = 1 \quad (1.24)$$

La 4-velocità definita in (1.24) é un quadrivettore perché rapporto di un vettore e di uno scalare. Per lo stesso motivo la 4-accelerazione w^μ definita nel seguente modo é un 4-vettore:

$$w^\mu = \frac{du^\mu}{ds} \quad (1.25)$$

La quadrivelocità e la quadrivelocità sono orgononali poiché hanno prodotto scalare nullo come si vede derivando (1.24):

$$u^\mu u_\mu = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds} (u^\mu u_\mu) = 2u^\mu \frac{du^\mu}{ds} = 0 \Rightarrow u^\mu \perp w_\mu$$

Ci si può chiedere perché la 4-velocità u^μ e la 4-accelerazione w^μ debbano soddisfare ad un vincolo che ne limita quindi il numero di componenti indipendenti. La motivazione é che le componenti indipendenti sono le tre spaziali e non quattro come si potrebbe pensare avendo un quadrivettore, di conseguenza il numero di componenti indipendenti é tre.

Prima di definire altre grandezze importanti può essere utile scrivere in modo piú esplicito la struttura di u^μ in funzione della variabili classiche tempo e velocità. Per far ciò basta notare che da (1.23) si ha:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{\gamma}{c} \Rightarrow \frac{d}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt}$$

Ricordando che $dx^0 = c dt$ si ha:

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{d}{ds} x^0 = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} c dt = \gamma \\ \vec{u} = u^i &= \frac{d}{ds} x^i = \frac{\gamma}{c} \frac{d}{dt} x^i = \frac{\gamma}{c} v^i \end{aligned}$$

Unendo i risultati trovati si ha una comoda forma per ricordare la 4-velocità di una particella che si muove con velocità \vec{v} rispetto ad un sistema di riferimento inerziale:

$$u^\mu = (u^0, \vec{u}) = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right) = \left(\gamma, \gamma \vec{\beta} \right) \quad (1.26)$$

Un caso particolare notevole é quello della 4-velocità di una particella ferma rispetto ad un sistema di riferimento inerziale che é:

$$u^\mu = (1, \vec{0})$$

Un altro quadrivettore importante é il 4-momento p^μ che é definito come

$$p^\mu = mcu^\mu \quad (1.27)$$

dove m é la massa a riposo della particella e c é la velocità della luce; essendo u^μ un 4-vettore e m , c scalari allora anche p^μ é un 4-vettore. Da (1.26) si ha:

$$p^\mu = (p^0, \vec{p}) = (mc\gamma, \gamma m\vec{v}) = \left(\frac{mc^2\gamma}{c}, \gamma m\vec{v} \right) = \left(\frac{\varepsilon}{c}, \gamma m\vec{v} \right) \quad (1.28)$$

dove si é definita $\varepsilon \equiv \gamma mc^2$ come energia totale della particella. Se calcolo $p^\mu p_\mu$ trovo:

$$p^\mu p_\mu = m^2 c^2 u^\mu u_\mu = m^2 c^2$$

da cui deriva l'interpretazione di m come massa a riposo della particella, che risulta essere uno scalare. Se sviluppo γ in serie di Taylor al primo ordine, il che é una buona approssimazione se $v/c \ll 1$ ottengo:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$$

di conseguenza ε diventa:

$$\varepsilon \equiv \gamma mc^2 \approx mc^2 + mc^2 \frac{v^2}{2c^2} = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Il primo termine del secondo membro é l'energia di massa di corpo: un corpo possiede energia per il solo fatto di avere massa e la costante di proporzionalitá é il quadrato della velocità della luce, mentre il secondo membro é l'usuale energia cinetica. Si é ritrovata l'espressione classica dell'energia cinetica come limite a basse velocità. dove per basse si intende rispetto alla velocità della luce. In generale in relativitá si definisce energia cinetica l'energia totale privata del termine di massa ossia:

$$E.C. = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1) mc^2 \quad (1.29)$$

L'equazione corrispondente a $\vec{F} = m\vec{a}$ sará una cosa del tipo:

$$\frac{dp^\mu}{ds} = g^\mu$$

dove si é introdotta la 4-forza g^μ . Anche g^μ ha solo tre componenti indipendenti per cui deve soddisfare ad un vincolo: ricordando che $p^\mu = mcu^\mu$ e $u^\mu \cdot du^\mu/ds = 0$ si ha:

$$g^\mu u_\mu = 0 \quad (1.30)$$

Questa proprietá potrà sembrare a prima vista qualcosa di marginale, ma se vale (1.30) si dimostra il seguente (e molto utile) teorema: *se vale $g^\mu u_\mu = 0$, dove g^μ é la 4-forza e u_μ é la 4-velocitá, allora esiste un tensore $F^{\alpha\beta}$ antisimmetrico tale che $g^\alpha = F^{\alpha\beta} u_\beta$* . La dimostrazione é la seguente:

$$\forall g^\alpha \quad \text{vale la decomposizione} \quad g^\alpha = u^\alpha u^\beta g_\beta + \left[u^\beta g^\alpha - u^\alpha g^\beta \right] u_\beta$$

(il primo e il terzo termine sommati danno zero e $u^\beta u_\beta = 1$). Se vale $g^\mu u_\mu = 0$ allora si ha

$$g^\alpha = \left[u^\beta g^\alpha - u^\alpha g^\beta \right] u_\beta$$

e $[u^\beta g^\alpha - u^\alpha g^\beta]$ é un tensore antisimmetrico, come si vede subito. Naturalmente la forma esplicita di $F^{\alpha\beta}$ dipende dalla forza che si vuole riprodurre.

Ricapitolando si ha:

$$\text{se } u^\mu g_\mu = 0 \Rightarrow g^\alpha = F^{\alpha\beta} u_\beta \quad \text{con } F^{\alpha\beta} \text{ antisimmetrico} \Rightarrow F^{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta = 0 \quad (1.31)$$

dove l'ultima equazione deriva da (1.20). L'equazione (1.31) si rivelerá molto utile nella prossima sezione, quando si studieranno le equazioni di Maxwell in forma tensoriale o covariante a vista.

1.10 Le equazioni di Maxwell in forma tensoriale

Ricordo che le equazioni di Maxwell del primo gruppo (non compaiono le densitá di carica e di corrente):

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_0} &= 0 \end{aligned}$$

La prima equazione é equivalente a

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$$

dove si é definito il potenziale vettore \vec{A} e sostituendo nella seconda si ottiene

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_0} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla \cdot \phi - \frac{1}{c} \frac{d\vec{A}}{dt}$$

dove si é introdotto il potenziale scalare ϕ .

Definisco ora il quadrivettore (ho postulato che sia un quadrivettore) A^μ definito come:

$$A^\mu = (A^0, A^i) = (\phi, \vec{A}) \Rightarrow A_\mu = (\phi, -\vec{A}) \quad (1.32)$$

L'azione per il campo elettromagnetico é:

$$I = \int_{t_1}^{t_2} dt' \left[\frac{1}{2} m v^2 - e \left(\phi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right) \right]$$

poiché se applico le equazioni di Lagrange alla lagrangiana dell'azione ottengo la forza di Lorentz. Considero il termine di interazione dato da

$$\int_{t_1}^{t_2} -e \left(\phi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right) dt'$$

e ricordo che studiando la meccanica del punto materiale si era trovato:

$$u^\mu = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right) \quad ds = \frac{c dt}{\gamma}$$

da cui si ricava $dt = \gamma ds/c$ e sostituendo nel potenziale di interazione si ottiene:

$$-e \int_{t_1}^{t_2} dt' \left(\phi - \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{A} \right) = -\frac{e}{c} \int_{t_1}^{t_2} dt' (u^\mu A_\mu) ds \quad (1.33)$$

Di conseguenza se A_μ trasforma come un vettore (e si é supposto di si) si é espresso il potenziale elettromagnetico di interazione in una forma relativisticamente invariante. Questo non é un caso perché, come si vedrá fra poco, le equazioni di maxwell, dalle quali si ricava la forza di Lorentz, possono essere scritte in una forma covariante a vista.

Prima di proseguire ricordo l'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo: se i potenziali scalare e vettore trasformano nel modo seguente (f é una funzione scalare dello spazio e del tempo)

$$\phi \rightarrow \phi + \partial_0 f \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} - \vec{\nabla} f$$

allora i campi elettrico e magnetico \vec{E} e \vec{B} , che poi sono le quantità che posso misurare, rimangono invariati. Ricordando la definizione del 4-gradiente $\partial_\mu = (\partial_0, -\vec{\nabla})$ posso scrivere in modo piú compatto l'invarianza di gauge:

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f \Rightarrow \vec{E}, \vec{B} \quad \text{non} \quad \text{variano} \quad (1.34)$$

Sotto la trasformazione di gauge (1.34) la quantità $\partial^\mu A^\nu$ non é invariante, però posso definire un tensore a due indici $F^{\mu\nu}$ gauge-invariante:

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.35)$$

Infatti sotto gauge si ha:

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu (A^\nu + \partial^\nu f) - \partial^\nu (A^\mu + \partial^\mu f) = \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu f = \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu = F^{\mu\nu}$$

poiché le derivate commutano ($\partial^\mu \partial^\nu = \partial^\nu \partial^\mu$).

Si vede a colpo d'occhio che $F^{\mu\nu}$ é antisimmetrico, da cui si ricava $F^{00} = F^{ii} = 0$. Per quanto riguarda le componenti fuori diagonale si ha:

$$F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = -(\vec{\nabla} \phi)^i - \frac{1}{c} \partial^t A^i = E^i$$

$$F^{ij} = -(\partial^i A^j - \partial^j A^i) = (\vec{\nabla} \times \vec{A})^z = -B^z$$

poiché $\partial^i = -\partial_i = -\partial/\partial x^i$ Avendo visto che F^{ij} introduce un prodotto vettoriale si può usare il tensore totalmente antisimmetrico ϵ^{ijk} per definirlo:

$$F^{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k \leftrightarrow B^k = -\frac{1}{2} \epsilon^{kij} F^{ij}$$

Si può riassumere la struttura di $F^{\mu\nu}$ mettendolo in forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_x \\ E_y & B_z & 0 & -B_y \\ E_z & -B_x & B_y & 0 \end{pmatrix} \quad (1.36)$$

Ciò che ci si propone di fare ora é dimostrare che le equazioni di Maxwell si possono esprimere per mezzo di $F^{\mu\nu}$: Si può mostrare che vale la seguente relazione:

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} \quad \text{con} \quad \alpha = 0, 1, 2, 3$$

Considero il caso $\alpha = 0$:

$$\begin{aligned}\epsilon^{0\beta\gamma\delta}\partial_\beta F_{\gamma\delta} &= \epsilon^{0ijk}\partial_i F_{jk} = \epsilon^{ijk}\partial_i(-\epsilon_{jkl}B^l) \\ &= -\epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl}\partial_i B^l = -2\delta^{il}\partial_i B^l \\ &= -2\partial_i B^i = -2\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0\end{aligned}$$

dove si sono usate le equazioni: $F_{jk} = -\epsilon_{jkl}B^l$ e $\epsilon^{ijk}\epsilon_{jkl} = \delta_l^i$. Ora bisogna analizzare in caso $\alpha = i$.

$$\begin{aligned}0 = \epsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + \epsilon^{ij0k}\partial_j F_{0k} + \epsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0} &= \epsilon^{i0jk}\partial_0 F_{jk} + 2\epsilon^{ijk0}\partial_j F_{k0} \\ &= -\epsilon^{0ijk}[\partial_0 F_{jk} + 2\partial_j F_{k0}] = -\epsilon^{ijk}[\partial_0 F_{jk} + 2\partial_j F_{k0}] \\ &= -[-2\partial_0 B^i - 2\epsilon^{ijk}\partial_j E^k] = 2\left(\partial_0 \vec{B} + (\vec{\nabla} \times \vec{E})^i\right)\end{aligned}$$

dove si é fatto uso dell'antisimmetria di $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ e di $F^{\mu\nu}$ e delle relazioni che legano ϵ^{ijk} e B^i . A questo punto si é visto che si riesce ad esprimere in forma tensoriale il primo gruppo delle equazioni di Maxwell. Resta da vedere se si puó fare altrettanto con il secondo gruppo. Nel secondo gruppo delle equazioni di Maxwell compaiono la densitá di carica $\rho(\vec{x})$ e la densitá di corrente $j(\vec{x})$. A tal priposito definisco il 4-vettore $j^\mu = (\rho(\vec{x}) \cdot c, \vec{j})$. Ora verifico che posso esprimere le restanti due equazioni di Maxwell con la seguente equazione tensoriale:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{j^\nu}{c}$$

Analogamente a prima, considero prima il caso $\nu = 0$:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \rho \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

($F^{00} = 0$ e $j^0/c = \rho$).

Ora considero in caso $\nu = i$:

$$\partial_\mu F^{\mu i} = \partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} = -\partial_0 E^i - \partial_k \epsilon^{kij} B^j = -\partial_0 E^i + (\vec{\nabla} \times \vec{B})^i = \frac{j^i}{c}$$

Alla fine sono state ricavate tutte le equazioni di Maxwell e si nota la seguente cosa: in meccanica classica le equazioni di Maxwell erano due equazioni 3-vettoriali e due equazioni scalari (per un totale di 8 componenti) mentre ora si hanno due equazioni 4-vettoriali. Per completare l'analogia con la meccanica classica vediamo se si riesce a esprimere in forma tensoriale anche l'equazione che da la forza di Lorentz.

Si ottiene il risultato voluto se si considera l'equazione

$$\frac{dp^\mu}{ds} = f^{\mu\nu} u_\nu \quad \text{con} \quad f^{\mu\nu} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu}$$

dove $p^\mu = mcu^\mu =$ quadrimomento.

Come al solito separo la parte spaziale da quella temporale. Se $\mu = i$ si ottiene:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dp^i}{dt} = \frac{e}{c} (F^{i0} u_0 + F^{ik} u_k) = \frac{e}{c} \gamma \left(E^i + \epsilon^{ijk} B^j \frac{v^k}{c} \right) \Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = e \left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \right)$$

con $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$. Si é ottenuta l'espressione per la forza di Lorentz e rimane da vedere che equazione porge la componente $\mu = 0$:

$$\frac{\gamma}{c} \frac{dE}{dt} = \frac{e}{c} F^{0i} u_i = \frac{e}{c} \left(E^i \cdot \gamma \frac{v^i}{c} \right) \Rightarrow \frac{dE}{dt} = e \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Si é ottenuta la legge della potenza (E indica l'energia mentre \vec{E} indica il campo elettrico) poiché $e\vec{E}$ é la forza subita dalla carica e \vec{v} é la sua velocità.

In questa sezione si sono ottenuti numerosi e tutti importanti risultati per cui sembra utile riassumere le equazioni trovate. Le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial x_0} &= 0 \end{aligned}$$

sono equivalenti all'equazione tensoriale

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\beta F_{\gamma\delta} \Leftrightarrow \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} = 0 \quad (1.37)$$

Le equazioni di Maxwell

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\vec{j}}{c} + \frac{1}{c} \frac{d\vec{E}}{dt} \end{aligned}$$

sono equivalenti all'equazione tensoriale

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu \quad (1.38)$$

E' stato definito il tensore del campo elettromagnetico

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (1.39)$$

che é invariante per la trasformazione di gauge $A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f$. $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ si dice anche *connessione* e $F^{\mu\nu} = 2\partial^{[\mu} A^{\nu]}$ é la *curvatura* associata alla connessione; infine $\partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]}$ é l'identitá di Bianchi. L'equazione del moto é

$$\frac{dp^\mu}{ds} = \frac{e}{c} F^{\mu\nu} u_\nu \quad (1.40)$$

Da $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\nu$ si ricava

$$\partial_\nu \left(\partial_\mu F^{\mu\nu} - \frac{1}{c} j^\nu \right) = 0 \Rightarrow \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (1.41)$$

poiché $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ per l'equazione (1.20). L'equazione (1.41) esprime la conservazione *locale* della corrente ed é equivalente alla solita forma

$$\frac{\partial \rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

cioé ρ che é la densitá di carica é una quantitá conservata localmente, ossia punto per punto. Infatti si dimostra nel seguente modo (pongo $c = 1$):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu j^\mu &= 0 \Rightarrow \int \partial_\mu j^\mu(\vec{x}, t) d^3x = \int (\partial_0 \rho + \partial_i j^i) d^3x \\
&= \frac{d}{dt} \int \rho d^3x + \int_{sferadiraggioR \rightarrow \infty} \vec{j} \cdot \vec{n} d^2\Sigma \quad (\text{teorema della divergenza di Gauss}) \\
&= \frac{d}{dt} \int \rho d^3x = 0 \quad (\text{all' infinito non ci sono cariche}) \\
&\Rightarrow \int_{spazio} \rho d^3x \quad \text{è una quantitá conservata}
\end{aligned}$$

dove $d^2\Sigma$ indica l'elemento d'area sulla sfera e \vec{n} un versore perpendicolare alla superficie di integrazione (si sta calcolando un flusso). Il risultato fondamentale é:

$$Q = \int \rho(\vec{x}, t) d^3x = \text{carica conservata con } \rho = j^0 \quad (1.42)$$

Il prossimo passo consiste nel mostrare che Q definito in (1.42) é invariante di Lorentz e si raggiungerá tale risultato per due motivi:

- vale la legge di conservazione $\partial_\mu j^\mu = 0$.
- j^μ é un vettore per trasformazioni di Lorentz.

Prima di dimostrare l'invarianza della carica conservata per trasformazioni di Lorentz sará utile ricordare alcune proprietá delle distribuzioni:

- la delta di Dirac $\delta(x - a)$ é definita da $\int f(x) \delta(x - a) dx = f(a)$
- la delta di Dirac é la derivata nel senso delle distribuzioni della funzione di Heaviside: $\delta(t) = \frac{d}{dt} H(t)$ con $H(t) = 1$ se $t > 0$ e $H(t) = 0$ se $t < 0$.

Si ha quindi (a tempo fissato)

$$\begin{aligned}
Q &= \int j^0(\vec{x}, 0) d^3x = \int j^0(\vec{x}, t) \delta(t) d^3x dt = \int d^4x j^0(\vec{x}, t) \partial_0 H(t) \\
&= \int d^4x j^\mu(\vec{x}, t) \partial_\mu H(t)
\end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio é valido in quanto $H(t)$ dipende solo da t per cui i nuovi pezzi, derivanti da $\partial_i H(t)$ sono nulli. Calcolo ora come dovrebbe trasformare Q in un sistema ruotato:

$$Q' = \int d^4x' j'^\mu(x') \partial'_\mu H(t')$$

ma ricordo che $j'^\mu(x') \partial'_\mu = j^\mu(x) \partial_\mu$ perché é uno scalare e $d^4x' = d^4x |det \Lambda| = d^4x$ poiché il determinante della trasformazione di coordinate é 1 ('e un elemento di $S0(1, 3)_C$). Di conseguenza:

$$Q' = \int d^4x j^\mu(x) \partial_\mu H(t')$$

da cui sottraendo Q da Q' ottengo:

$$\begin{aligned}
Q' - Q &= \int d^4x j^\mu \partial_\mu (H(t') - H(t)) \\
&= \int d^4x [j^\mu \partial_\mu (H(t') - H(t)) + j^\mu \partial_\mu (H(t') - H(t))] \\
&= \int d^4x \partial_\mu [j^\mu (H(t') - H(t))] \\
&= \int d^3\Sigma N^\mu \cdot [j^\mu(\vec{x}, t) (H(t') - H(t))]
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio si é utilizzato il teorema della divergenza in $4D$, N^μ é un versore perpendicolare alla superficie $3D$ di un'ipersfera di raggio infinito (il solito flusso, ma con una dimensione in piú). Per concludere la dimostrazione considero il termine

$$W^\mu(\vec{x}, t) \equiv j^\mu(\vec{x}, t) (H(t') - H(t))$$

Questo 4-vettore va valutato sia all'infinito spaziale che a quello temporale:

$$W^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$$

perché all'infinito spaziale non ho corrente.

$$W^\mu(\vec{x}, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

perché all'infinito temporale $H(t') = H(t) = 1$ per cui alla fine $W^\mu(\vec{x}, t) \rightarrow 0$ da cui si ricava $Q' = Q$ ossia si é dimostrata l'invarianza dalla carica elettrica per trasformazioni di Lorentz.

1.10.1 Quadricorrente per un sistema di particelle

Prima di calcolare j^μ per un sistema di particelle (si intende una configurazione discreta) é bene puntualizzare alcune proprietá delle distribuzioni che serviranno nei calcoli:

- $\delta^4(x) = \delta(x_0)\delta(\vec{x}) = \delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$
- $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ con a numero reale.
- $\delta^4(\Lambda x) = \frac{\delta^4(x)}{|\det \Lambda|} = \delta^4(x)$ se Λ é matrice di Lorentz

Se chiamo ϕ il potenziale coulombiano di una carica ferma in $\vec{x} = 0$, ossia, se la costante dielettrica del vuoto vale 1 $\phi = \frac{1}{4\pi} \frac{e}{|\vec{x}|}$, vale l'equazione di Poisson $\vec{\nabla}^2 \phi = -\rho$, dove ρ é la densitá di carica. Si ottiene però che il potenziale della carica puntiforme porge $\rho = 0$ in quanto, nello spazio delle funzioni, $\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = 0$. Si esce dall'impasse se ci si mette nello spazio delle distribuzioni dove si ha:

$$\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right) = -4\pi \delta^3(\vec{x})$$

da cui si ha la corretta densitá di carica $\rho = e\delta^3(\vec{x})$.

Generalizzando, per un sistema di particelle si ha:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{x}, t) &= \sum_{r=1}^N e_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) \\ \vec{j}(\vec{x}, t) &= \sum_{r=1}^N e_r \vec{v}_r(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))\end{aligned}\tag{1.43}$$

e vale come al solito

$$j^\mu(\vec{x}, t) = j^\mu(x) = \left(\rho(\vec{x}, t), \vec{j}(\vec{x}, t) \right)$$

Cio che ci si propone di dimostrare é la seguente proposizione: La quadricorrente definita in (1.43) é un quadrivettore e puó essere definita in modo piú compatto come:

$$j^\alpha(x) = \sum_{r=1}^N e_r \int_{\gamma_r} dx_r^\alpha \delta^4(x - x_r)\tag{1.44}$$

dove si hanno le seguenti identificazioni:

- e_r é la carica della particella r-esima.
- γ_r é la linea di mondo della particella r-esima.
- la somma é estesa ad un insieme di N particelle.

Infatti si ha:

$$\begin{aligned}j^0(x) &= \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^0 \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r) \delta(x^0 - x_r^0) \\ &= \sum_r e_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}(x_r^0)) = \rho(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}j^i(x) &= \sum_r e_r \int_{\gamma_r} \frac{dx_r^i}{dx_r^0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r) \delta(x^0 - x_r^0) dx_r^0 \\ &= \sum_r e_r v_r^i \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) = j^i(\vec{x}, t)\end{aligned}$$

Per verificare che la 4-corrente definita in (1.44) bisogna calcolarla in un sistema di riferimento “boostato”, cioè con $dx'^\mu = \Lambda^\mu_\nu dx^\nu$:

$$\begin{aligned}j'^\alpha(x') &= \sum_r e_r \int dx_r'^\alpha \delta^4(x' - x'_r) \\ &= \sum_r e_r \int \Lambda^\alpha_\beta dx_r^\beta \delta^4\left(\Lambda^\alpha_\beta (x^\beta - x_r^\beta)\right) \\ &= \sum_r e_r \Lambda^\alpha_\beta \int dx_r^\beta \delta^4(x^\beta - x_r^\beta) = \Lambda^\alpha_\beta j^\beta(x)\end{aligned}$$

Per completare la dimostrazione che l'equazione (1.44) indica una 4-corrente bisogna verificare che valga l'equazione di continuità $\partial_\alpha j^\alpha = 0$ Si ha:

$$\begin{aligned}
\partial_\alpha j^\alpha(x) &= \sum_r e_r \int_{\gamma_r} \frac{dx_r^\alpha}{d\lambda_r} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \delta^4(x - x_r) d\lambda_r \\
&= \sum_r -e_r \int_{\gamma_r} \frac{dx_r^\alpha}{d\lambda_r} \frac{\partial}{\partial x_r^\alpha} \delta^4(x - x_r) d\lambda_r \\
&= -\sum_r e_r \int_{\gamma_r} d\lambda_r \frac{d}{d\lambda_r} \delta^4(x - x_r(\lambda_r)) \\
&= -\sum_r e_r \int_{\gamma_r} d\delta^4(x - x_r(\lambda_r)) \\
&= -\sum_r e_r \delta^4(x - x_r(\lambda_r)) \Big|_{\lambda_r=-\infty}^{\lambda_r=+\infty} = 0
\end{aligned}$$

Alla fine si é dimostrato che l'equazione (1.44) ha tutte le proprietá per essere una 4-corrente.

Concludo questa sezione scrivendo l'equazione di Maxwell (1.38) in funzione di A^μ : prima definisco il D'alambertiano $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$ che é la generalizzazione a $4D$ del laplaciano. Come risulta dalla definizione \square é un operatore invariante. Dopo aver definito \square posso riscrivere (1.38) nel seguente modo:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \underbrace{\partial^\nu (\partial_\mu A^\mu)}_{\substack{\text{scalare} \\ \text{vettore}}} = j^\nu$$

1.11 Il tensore energia-momento

Le leggi di conservazione locale possono essere messe nella forma $\partial_\mu j^\mu$ dove j^μ é una corrente conservata. Si sono viste a piú riprese delle leggi di conservazione e si é visto che le leggi di conservazione sono legate all'invarianza di un sistema sotto talune trasformazioni. Ad esempio la carica elettrica Q si conserva in conseguenza dell'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo. Ancora all'inizio si sono legate la conservazione dell'energia, del momento e del momento angolare rispettivamente all'invarianza per traslazioni temporali, spaziali e per rotazioni spaziali.

Per rendere conto della conservazione dell'energia e della quantità di moto (che formano un 4-vettore) si introduce un tensore $T^{\mu\nu}$, detto tensore energia-impulso, che soddisfi le seguenti due proprietá:

- $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ che dá 4 leggi di conservazione.
- $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ cioè si richiede la simmetria di $T^{\mu\nu}$ per scambio di indici.

Anche per il momento angolare si può fare una considerazione analoga però ora si dovrà introdurre un tensore 3 indici chiamato tensore densità di momento angolare tale che

$$\partial_\mu M^{\mu[\alpha,\beta]} = 0$$

Da questo tensore si ricaverá poi in momento angolare $L^{\mu\nu}$ che avrà 6 componenti indipendenti: tre corrisponderanno alla conservazione del momento angolare classico mentre le altre

3 saranno legate all'invarianza delle leggi della fisica per trasformazioni di Lorentz. Alla fine il tensore energia-momento e il tensore densità di momento angolare tengono conto dell'invarianza delle leggi della fisica per il gruppo di Poincaré, hanno quindi un'origine geometrica perché legati direttamente alla struttura dello spazio-tempo, mentre la conservazione della carica elettrica deriva dall'invarianza di gauge dell'interazione elettromagnetica.

Ora considero in dettaglio il tensore energia-momento $T^{\mu\nu}$ che da origine a 4 quantità conservate: una per ogni ν . Si trova infatti:

$$0 = \int_{R^3} \partial_\mu T^{\mu\nu} d^3x = \int_{R^3} \partial_i T^{i\nu} d^3x + \int_{R^3} \partial_0 T^{0\nu} d^3x = \frac{d}{dt} \int_{R^3} T^{0\nu} d^3x = 0$$

dove si è usato il fatto che all'infinito spaziale non c'è energia, per cui usando il teorema di Gauss all'integrale $\int_{R^3} \partial_i T^{i\nu} d^3x$ si ottiene 0. Si è ottenuto un 4-vettore conservato e si pone:

$$P^\mu = \int d^3x T^{\mu 0}(\vec{x}, t) \quad (1.45)$$

Di conseguenza si hanno le seguenti identificazioni:

- $P^0 = \int d^3x T^{00}(\vec{x}, t) \Rightarrow T^{00}$ è la densità di energia.
- $P^i = \int d^3x T^{i0}(\vec{x}, t) \Rightarrow T^{i0}$ è la densità di momento.

Si può vedere infine che il tensore energia-momento è l'estensione a $4D$ del tensore degli sforzi di Maxwell, di cui mantiene l'interpretazione per le componenti puramente spaziali, vale infatti

$$T^{ij} = \text{flusso della componente } i \text{ del momento nella direzione } j$$

Quello che ci si propone di fare in questa sezione consiste nel trovare l'espressione per il tensore energia-momento di un sistema composto da un insieme di cariche e dal relativo campo elettromagnetico. Il modo di procedere potrà destare perplessità in quanto si daranno le espressioni per $T_{particelle}^{\mu\nu}$ e $T_{campo\ em}^{\mu\nu}$ e poi si verificherà che sia soddisfatta l'equazione di continuità $\partial_\mu (T_{particelle}^{\mu\nu} + T_{campo\ em}^{\mu\nu}) = 0$. Per quanto riguarda un sistema di N particelle, con $r = 1, \dots, N$ di massa m_r , tempo proprio ds^r , posizione x_r e quadrimomento P_r^μ si ha:

$$T_{particelle}^{\mu\nu} = \sum_r \frac{1}{m_r} \int_{\gamma_r} ds^r \delta^4(x - x_r) P_r^\mu P_r^\nu \quad (1.46)$$

Mentre per il campo elettromagnetico, dove $F^{\mu\nu}$ è il solito tensore doppio antisimmetrico e $\eta^{\mu\nu}$ è la metrica piatta si ha:

$$T_{campo}^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \quad (1.47)$$

Per dimostrare che le espressioni (1.46) e (1.47) sono le espressioni corrette cominciamo con calcolare $\partial_\mu T_{particelle}^{\mu\nu}$ (considero $c = 1 \Rightarrow p^\mu = m u^\mu$):

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T_{particelle}^{\mu\nu} &= \sum_r \int_{\gamma_r} P_r^\nu \frac{dx_r^\mu}{ds_r} \partial_\mu \delta^4(x - x_r) ds_r \quad \left(\frac{P_r^\mu}{m_r} = u_r^\mu = \frac{dx_r^\mu}{ds_r} \right) \\
&= - \sum_r \int_{\gamma_r} P_r^\nu \frac{\partial}{\partial S_r} \delta^4(x - x_r(s_r)) ds_r \quad (\text{regola a catena}) \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} \frac{d}{ds_r} (P_r^\nu) \delta^4(x - x_r(s_r)) ds_r \quad (\text{integrazione per parti}) \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} ds_r e_r F^{\nu\mu}(x_r) u_{r\mu} \delta^4(x - x_r) \quad (\text{vedi equazione di Lorentz}) \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} ds_r e_r F^{\nu\mu}(x_r) \frac{dx_{r\mu}}{ds_r} \delta^4(x - x_r) \\
&= F^{\nu\mu} j_\mu \quad (\text{vedi (1.44)}) \\
&= -j_\mu F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda $T_{campo}^{\mu\nu}$ si ha:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu T_{campo}^{\mu\nu} &= \partial_\mu \left[F^{\mu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right] \\
&= \partial_\mu F^{\mu\alpha} F_\alpha^\nu + F^{\mu\alpha} \partial_\nu F_\alpha^\nu + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial^\nu F_{\alpha\beta} \\
&= j^\alpha F^{\alpha\nu} - F^{\alpha\nu} \partial_\nu F_\alpha^\nu + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \partial^\nu F_{\alpha\beta} \partial^\nu F_{\alpha\beta} \quad (\text{antisimmetria di } F^{\mu\nu}) \\
&= j_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} [\partial^\nu F_{\alpha\beta} - 2\partial_\beta F_\alpha^\nu] \quad (\mu = \beta \text{ in quanto sommato}) \\
&= j_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} [\partial^\nu F_{\alpha\beta} - \partial_\beta F_\alpha^\nu + \partial_\alpha F_\beta^\nu] \\
&= j_\alpha F^{\alpha\nu} + \frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \underbrace{[\partial^\nu F_{\alpha\beta} + \partial_\beta F_\alpha^\nu + \partial_\alpha F_\beta^\nu]}_{\partial^{[\nu} F_{\alpha\beta]} = 0} \\
&= j_\alpha F^{\alpha\nu}
\end{aligned}$$

Come si vede le variazioni di $T_{particelle}^{\mu\nu}$ e di $T_{campo}^{\mu\nu}$ sono uguali e opposte, per cui la variazione della loro somma é nulla. Per convincere che le equazioni (1.46) e (1.47) sono corrette dimostriamo come si conciliano con i 4-momenti noti di paricelle e campi. Si ha:

$$\begin{aligned}
T_{particelle}^{\mu\nu} &= \sum_r \frac{1}{m_r} \int_{\gamma_r} dS^r \delta^4(x - x_r) P_r^\mu P_r^\nu \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} \frac{dt_r}{\gamma m_r} \delta(t - t_r) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r) P_r^\mu P_r^\nu \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} dt_r \delta(t - t_r) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r) \frac{P_r^\mu P_r^\nu}{P_r^0} \\
&= \sum_r \frac{P_r^\mu P_r^\nu}{P_r^0} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r(t))
\end{aligned}$$

dove γ é il fattore di Lorentz che lega la massa a riposo si una particella alla sua energia totale.

Di conseguenza si ottiene:

$$T^{\mu 0} = \sum_r P_r^\mu \delta^3(x - x_r(t))$$

$T^{\mu 0}$ indica la densità di momento di un sistema di particelle, per trovare il momento totale basterà integrare nello spazio in cui è distribuito il sistema:

$$P_{particelle}^\mu = \int d^3x T_{particelle}^{\mu 0} = \int d^3x \sum_r P_r^\mu \delta^3(x - x_r(t)) = \sum_r P_r^\mu$$

Alla fine si è ottenuto il semplice risultato che afferma: *il 4-momento totale di un sistema di particelle è la somma dei 4-momenti delle singole particelle.*

Ora condurremo un'analisi analoga per il tensore energia-momento del campo elettromagnetico. Da (1.47) si ha:

$$\begin{aligned} T_{campo}^{00} &= F^{0i} F_i^0 + \frac{1}{4} \eta^{00} (F^{0i} F_{0i} + F^{i0} F_{0i} + F_{ij}^{ij}) \\ &= \vec{E}^2 - \frac{1}{4} (\vec{E}^2 + \vec{E}^2 - 2\vec{B}^2) \\ &= \frac{\vec{E}^2 + \vec{B}^2}{2} \end{aligned}$$

dove si è ottenuta la solita espressione della densità di energia del campo elettromagnetico in unità naturali. Analogamente per la densità di momento so ha:

$$\begin{aligned} T_{campo}^{0i} &= F^{0i} F_j^i \quad (\eta^{0i} = 0) \\ &= (\vec{E} \times \vec{B})^i \\ &= S^i \end{aligned}$$

dove con S^i si è indicato la i -esima componente del vettore di Pointyng che dá il flusso di energia o la densità di momento del campo elettromagnetico. Naturalmente se c'è interazione fra particelle e campo non si conserveranno separatamente i 4-momenti di particelle e campo ma la quantità conservata sarà il 4-momento totale; di conseguenza le quantità conservate saranno:

$$\begin{aligned} P^0 &= P_{part}^0 + P_{campi}^0 = \sum_r P_r^0 + \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \\ \vec{P} &= \vec{P}_{part} + \vec{P}_{campo} = \sum_r \vec{P}_r \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

1.11.1 Il momento angolare

Prima di chiudere questa sezione daremo una rapida analisi del momento angolare e poi passeremo ad approfondire meglio la relazione fra simmetrie del sistema e quantità conservate con il principio di minima azione e il teorema di Noether.

In tre dimensioni, se P^i è la quantità di moto di una particella e x^i la sua posizione rispetto ad un asse di rotazione che coincide con origine degli assi, il suo momento angolare è definito come:

$$L^{ij} = x^i P^j - x^j P^i$$

La conservazione del momento angolare deriva dall'invarianza delle leggi della fisica per il gruppo $SO(3)$ che ha tre generatori, da cui le tre quantità conservate che sono le tre componenti del momento angolare. Se passo in 4 dimensioni, il gruppo $SO(3)$ si allarga a $SO(1,3)$ che ha sei generatori, di conseguenza ci saranno 6 quantità conservate. Si definisce la densità di momento angolare nel seguente modo:

$$M^{\rho\mu\nu}(x) = 2x^{[\mu}T^{\nu]\rho} = x^{\mu}T^{\nu\rho} - x^{\nu}T^{\mu\rho}$$

$M^{\rho\mu\nu}$ á antisimmetrico il $\mu\nu$ e bisogna verificare che $\partial_{\rho}M^{\rho\mu\nu} = 0$ e, come si vedrá, aver supposto il tensore energia-momento simmetrico é essenziale ai fini della dimostrazione:

$$\begin{aligned}\partial_{\rho}M^{\rho\mu\nu} &= \partial_{\rho}(x^{\mu}T^{\nu\rho} - x^{\nu}T^{\mu\rho}) \\ &= (\partial_{\rho}x^{\mu}) \cdot T^{\nu\rho} + x^{\mu}\partial_{\rho}T^{\nu\rho} - (\partial_{\rho}x^{\nu})T^{\mu\rho} - x^{\nu}\partial_{\rho}T^{\mu\rho} \\ &= \delta_{\rho}^{\mu}T^{\nu\rho} + 0 - \delta_{\rho}^{\nu}T^{\mu\rho} - 0 \\ &= T^{\mu\nu} - T^{\nu\mu} = 0\end{aligned}$$

Di conseguenza il momento angolare di un sistema si otterrá integrando la densità di momento angolare nello spazio dove é definito il sistema:

$$L^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0\mu\nu} \quad (1.49)$$

Nel caso di un sistema di particelle si ottiene:

$$\begin{aligned}L_{particelle}^{\mu\nu} &= \int d^3x \left(x^{\mu}T_{part}^{\nu 0} - x^{\nu}T_{part}^{\mu 0} \right) \\ &= \sum_r x_r^{\mu}P_r^{\nu} - x_r^{\nu}P_r^{\mu}\end{aligned}$$

Se $\mu\nu \rightarrow ij$ ottengo il solito momento angolare, mentre se $\mu\nu \rightarrow 0i$ ottengo i generatori delle trasformazioni di Lorentz. Infine concludo questa sezione ricordando che, per come é definito $L^{\mu\nu}$ é un tensore per $SO(1,3)$, mentre nel caso delle traslazioni si ha:

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + a^{\mu} \Rightarrow L^{\mu\nu} \rightarrow +a^{\mu}P^{\nu} - a^{\nu}P^{\mu}$$

1.12 Il principio di minima azione e il teorema di Noether

Il principio di minima azione, o principio variazionale, é un modo compatto per descrivere le equazioni del moto di un sistema. Inoltre l'esistenza di un tensore energia-impulso é associata all'esistenza di un'azione dal quale derivano le equazioni del moto. Nel caso dell'elettromagnetismo le variabili dinamiche sono il 4-vettore posizione delle cariche $x_r^{\mu}(t)$, se uso il tempo come variabile indipendente, e il 4-potenziale $A^{\mu}(t, \vec{x}) = A^{\mu}(x)$. Se ci sono r particelle, per definire le coordinate spaziali serviranno 3 funzioni per ogni particella, per un totale di $3r$ funzioni. Il potenziale A^{μ} , dato da ogni particella, é definito in ogni punto dello spazio, per cui, introducendo l'indice continuo \vec{x} si può esprimere $A^{\mu}(x)$ come $A_{\vec{x}}^{\mu}(t)$. L'azione $I[x_r^{\mu}(\lambda), A^{\mu}(x)]$ é un funzionale, ossia mappa \mathbb{R}^n in \mathbb{R} . Per calcolare le equazioni del moto si richiede che l'azione sia stazionaria per la variazione dei campi fisici coinvolti. Si richiede che l'azione sia invariante per il gruppo di Poincaré, di conseguenza le equazioni del moto saranno covarianti nel passare

da un sistema di riferimento ad un altro. Il punto fondamentale dall'approccio variazionale é l'equivalenza:

$$\text{equazioni del moto} \Leftrightarrow \delta I = 0$$

dove l'azione viene fatta variare mantenendo le variazioni dei campi fisici nulle agli estremi. I cardini della formulazione variazionale sono 3:

- $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$ dove L é la lagrangiana del sistema.
- $\delta I = 0 \Leftrightarrow$ equazioni del moto
- Dal teorema di Noether ricavo le quantità conservate.

Nel caso di un sistema discreto, come un insieme di particelle, la lagrangiana dipende dalla coordinate lagrangiane $q_n(t)$ e $\dot{q}_n(t)$ che fissano posizione e velocità di ogni particella, di conseguenza ho $L(q_n(t), \dot{q}_n(t))$, che contiene infiniti gradi di libertà. Nel caso dei campi la legrangiana dipende da infiniti gradi di libertà, uno per ogni posizione dello spazio, di conseguenza viene espressa come l'integrale nello spazio di una funzione \mathcal{L} che dipende dai campi e dalle loro derivate prime in ogni punto dello spazio, ossia

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi_r(x), \partial_\mu \phi_r(x))$$

dove si é inteso che ci sono r campi, ognuno dei quali assume un valore in ogni punto dello spazio, avendo quindi infiniti gradi di libertà. Nel caso delle particelle si ha

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L(q_r, \dot{q}_r) dt$$

Imponendo $\delta I = 0$ con la condizione $\delta q_r(t_1) = \delta q_r(t_2) = 0$, mentre per il resto $\delta q_r(t)$ é arbitraria, si ottengono le solite equazioni di Eulero-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_r} = 0$$

Per i campi, invece, ci si propone di dimostrare che imporre la variazione dell'azione con la condizione $\delta \phi_r(\vec{x}, t_1) = \delta \phi_r(\vec{x}, t_2) = 0 \quad \forall \vec{x}$ é equivalente a risolvere le seguenti equazioni:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \mathcal{L})} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} = 0$$

dove \mathcal{L} é la densità di lagrangiana. Infatti si ha:

$$\delta I = \int d^4x \delta \mathcal{L} \quad \text{con} \quad \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi_r, \partial_\mu \phi_r)$$

per cui variando \mathcal{L} funzionalmente si ottiene:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \delta \phi_r + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta (\partial_\mu \phi_r)$$

Ora uso il fatto che posso invertire gli operatori δ e ∂ : $\delta \partial_\mu = \partial_\mu \delta$ e utilizzo la regola di Leibniz scritta nel seguente modo:

$$f'g = (fg)' - fg'$$

dove con “ \prime ” si é indicato l’operatore di derivazione. Ottengo quindi:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} + \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}\delta\phi_r}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) - \partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) \delta\phi_r$$

Mettendo insieme i pezzi ottenuti e separando la derivata temporale da quelle spaziali nel secondo pezzo ottengo:

$$\delta I = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\delta\phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \right) \delta\phi_r + \int dt d^3x \partial_i \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta\phi_r \right) + \int dt d^3x \partial_0 \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} \delta\phi_r \right)$$

Ora, se applico il teorema delle divergenza di Gauss al secondo integrale ottengo 0 perché mi trovo a calcolare la variazione di ϕ_r all’infinito spaziale, ma all’infinito spaziale i campi sono nulli, di conseguenza lo sono anche le loro variazioni. Per quando riguarda il terzo integrale noto il seguente fatto:

$$dt\partial_0 = dt \frac{d}{dt} = d$$

per cui il terzo integrale é equivalente a:

$$\int d^3x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}_r} \delta\phi_r \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

poiché si richiede la stazionarietà di $\delta\phi_r$ calcolata in t_1 e t_2 . Alla fine resta solo in primo integrale per cui si é dimostrato che:

$$\delta I = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi_r)} = 0 \quad (1.50)$$

C’è una proprietà di \mathcal{L} che vale la pena di notare: se considero le due densità di lagrangiana \mathcal{L} e $\mathcal{L} + \partial_\mu g^\mu(\phi_r)$ ottengo le stesse equazioni di Lagrange infatti si ha:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt d^3x (\partial_\mu g^\mu) = \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \partial_i g^i + \int_{t_1}^{t_2} dt d^3x \partial_0 g^0$$

Ora l’integrale in $\partial_i g^i$ va a zero per il teorema della divergenza di Gauss e l’integrale in g^0 va a zero perché é equivalente a calcolare la variazione di g^μ a t_1 e t_2 che é $g^\mu(\phi_r) = \frac{\partial g^\mu}{\partial\phi_r} \delta\phi_r$ e $\delta\phi_r$ che é nulla agli estremi t_1 e t_2 .

Quello che ci si propone di fare ora é trovare un’espressione per l’azione di un sistema di particelle e campi che dia le giuste equazioni del moto che sono state trovate in precedenza: si vorrá ottenere l’equazione che dá la forza di Lorentz

$$\frac{dP_r^\mu}{ds} = e_r F^{\mu\nu} u_{r\nu}$$

per le cariche di posizione x_r e carica e_r , mentre si vorrá ottenere l’equazione di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

per il campo A^μ infine si ricorda la definizione del tensore doppio antisimmetrico $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. L’azione che si richiede dovrà essere sia Lorentz che gauge-invariante, e la sua forma é la seguente:

$$I = - \sum_r m_r \int_{t_1}^{t_2} ds_r - \frac{1}{4} \int_{t_1}^{t_2} d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \int_{t_1}^{t_2} d^4x j_\mu A^\mu \quad (1.51)$$

Il primo integrale dá la propagazione libera delle particelle ed é Lorentz-invariante, in quanto sia il 4-intervallo ds_r che la massa a riposo m_r sono invarianti di Lorentz. Ci si puó chiedere perché l'espressione dell'azione sia proprio questa. Per rendersi conto della plausibilitá di questa espressione si puó calcolarne il limite a bassa energia, ossia quando la velocitá delle particelle in gioco é molto minore della velocitá della luce. So che in generale vale $ds_r = dt_r \sqrt{1 - v_r^2} \approx 1 - \frac{v_r^2}{2}$ se $v_r \ll 1$ (in unitá naturali) per cui l'azione per la propagazione libera della materia diventa:

$$I = -m_r \int_{\gamma_r} \left(1 - \frac{v_r^2}{2}\right) = \int_{\gamma_r} -m_r + \frac{1}{2} m_r v_r^2 \quad (1.52)$$

ché l'energia cinetica classica di una particella, a meno di una costante che non dará contributo alle equazioni del moto. Inoltre la lagrangiana é definita come la differenza di energia cinetica e potenziale, ma nel caso di propagazione libera manca la parte potenziale per cui la lagrangiana coincide con l'energia cinetica. Intanto si é visto che il primo dei tre integrali di (1.52) dá il corretto limite classico, poi si vedrá che dá anche la corrette equazioni del moto.

Il secondo integrale dá la propagazione libera del campo elettromagnetico ed é invariante di Lorentz in quanto il prodotto tensoriale $F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ é uno scalare ed é invariante di gauge in quanto si é visto che $F^{\mu\nu}$ é invariante di gauge. L'ultimo termine di (1.52) esprime l'interazione fra campo elettromagnetico e materia ed é come gli altri gauge e Lorentz-invariante. Dopo aver puntualizzato le caratteristiche essenziali dell'azione (1.52) non resta altro che calcolare le equazioni del moto del campo em e della materia che da essa derivano. Comincio con le equazioni del moto di A^μ : si tratta di calcolare le equazioni (1.50)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = 0 \quad (1.53)$$

dove $\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - j_\mu A^\mu$ si ottiene quindi:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} (1 + 1) = -F^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\partial_\mu F^{\mu\nu}$$

ricordando l'antisimmetria di $F^{\mu\nu}$ e la sua espressione in termini di A^μ . Si ha anche:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -j^\mu$$

Mettendo insieme i pezzi si é ritrovata l'equazione di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Ora passiamo a calcolare le equazioni del moto per la distribuzione di cariche che generano i campi: la corrente di cariche sará data da (1.44) e dovremmo occuparci del primo e del terzo integrale di (1.52). Per quanto riguarda il terzo pezzo si ha:

$$\int d^4x j^\mu A_\mu = \int d^4x \underbrace{\sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^\mu \delta^4(x - x_r)}_{j^\mu} A_\mu(x) = \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^\mu A_\mu(x_r)$$

Ora vario l'azione ottenuta rispetto alle coordinate x_r^μ ricordando che i pezzi dipendenti dalle coordinate sono A_μ e dx_r^μ :

$$\begin{aligned}
\sum_r e_r \delta \int_{\gamma_r} dx_r^\mu A_\mu(x_r) &= \sum_r e_r \delta \int_{\gamma_r} \left(dx_r^\mu \frac{\partial A_\mu(x_r)}{\partial x_r^\nu} \delta x_r^\nu + A_\mu(x_r) (\delta dx_r^\mu) \right) \\
&= \sum_r e_r \delta \int_{\gamma_r} \left(dx_r^\mu \frac{\partial A_\mu(x_r)}{\partial x_r^\nu} \delta x_r^\nu + A_\mu(x_r) d(\delta x_r^\mu) \right) \\
&= \sum_r e_r \delta \int_{\gamma_r} \left(dx_r^\mu \frac{\partial A_\mu(x_r)}{\partial x_r^\nu} \delta x_r^\nu + \underbrace{d(\delta x_r^\mu A_\mu(x_r))}_{0 \text{ valutato agli estremi}} - \delta x_r^\nu \frac{\partial A_\nu(x_r)}{\partial x_r^\mu} dx_r^\mu \right) \\
&= \sum_r e_r \int_{\gamma_r} \frac{dx_r^\mu}{dS_r} F_{\nu\mu}(x_r) \delta x_r^\nu dS_r \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} e_r u_r^\mu F_{\nu\mu}(x_r) \delta x_r^\nu dS_r
\end{aligned}$$

Ora considero il primo pezzo di (1.52) e vario anche qui l'azione:

$$\begin{aligned}
\delta \left(\sum_r m_r \int_{\gamma_r} dS_r \right) &= \delta \sum_r m_r \int_{\gamma_r} \sqrt{dx_r^\mu dx_{r\mu}} \\
&= \sum_r m_r \int_{\gamma_r} \frac{1}{2S_r} \cdot 2dx_r^\mu d\delta x_{r\mu} \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} P_r^\mu \delta dx_{r\mu} \\
&= \sum_r \int_{\gamma_r} \underbrace{d(P_r^\mu \delta x_{r\mu})}_{0 \text{ valutato agli estremi}} - \int_{\gamma_r} \frac{dP_r^\mu}{dS_r} \delta x_{r\mu} dS_r \\
&= - \sum_r \int_{\gamma_r} \frac{dP_r^\mu}{dS_r} \delta x_{r\mu} dS_r
\end{aligned}$$

Per avere stazionarietà dell'azione si ha che la somma dei pezzi del primo e del terzo integrale é nulla, il che comporta la seguente relazione fra gli integrali:

$$e_r u_r^\mu F_{\mu\nu}(x_r) \delta x_r^\nu dS_r - \frac{dp_r^\mu}{dS_r} \delta x_{r\mu} dS_r = 0$$

poiché il segno “-” davanti al terzo integrale di (1.52) si elide poiché sono passato da $F^{\nu\mu}$ che compariva nel calcolo della variazione $\delta(j^\mu A_\mu)$ a $F^{\mu\nu}$. Di conseguenza si ottiene, eliminando i pezzi comuni:

$$\frac{dp_r^\mu}{dS_r} = e_r F^{\mu\nu}(x_r) u_{r\nu}$$

ché l'equazione relativistica del moto per la particelle.

1.12.1 Teorema di Noether

Alla fine si é visto che l'azione data in (1.52) é quella giusta, in quanto porge le equazioni del moto corrette e, a basse velocità, si riduce all'azione classica. L'ultimo argomento che viene

trattato prima di chiudere il capitolo sulla relatività ristretta è la connessione fra invarianza per trasformazioni e quantità conservate. Non tratteremo qui la quantità conservata derivante dall'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo, che poi è la carica elettrica, poiché tale argomento verrà discusso nel prossimo capitolo, che sarà un breve confronto fra le teorie di gauge abeliane, come l'elettromagnetismo, e quelle non abeliane, o teorie di Yang-Mills. Intanto vediamo come si arriva al teorema di Noether per i campi:

Considero una densità di Lagrangiana $\mathcal{L}(\phi)$ dove $\phi \equiv \phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_M$ e di conseguenza l'azione è

$$I = \int_{t_1}^{t_2} d^4x \mathcal{L}(\phi)$$

So che se impongo la stazionarietà dell'azione per variazioni nulle agli estremi di integrazione ottengo le equazioni del moto per i campi

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} = 0$$

Ora considero cosa succede se una determinata trasformazione lascia la lagrangiana invariata ossia se c'è una trasformazione $\delta\phi$ tale che $\delta\mathcal{L} = 0$. Calcolo la variazione in generale della lagrangiana che assumo dipendere dai campi e dalle loro derivate prime: $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. Si ottiene

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi)$$

Ora utilizzo la solita regola di Leibniz a rovescio per cui l'espressione scritta sopra diventa:

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right] + \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right]}_{0 \text{ per le equazioni del moto}} \delta\phi = 0$$

Di conseguenza, se definisco

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi$$

dove è sottintesa una sommatoria su tutti i campi (vedi la definizione di ϕ nelle ipotesi del teorema) ho un'equazione di continuità della forma:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

e come si è visto in precedenza, ci sarà una corrispondente quantità conservata che è

$$Q = \int d^3x j^0$$

Usando questo teorema si può mostrare che l'invarianza per traslazioni porta alla conservazione del 4-momento totale di un sistema di particelle libere, mentre l'invarianza per rotazioni porta alla conservazione del momento angolare. Infine, per concludere, ricordo che ad ogni invarianza corrisponde una legge di conservazione, per cui il numero di quantità conservate sarà pari al numero di generatori del gruppo di simmetria (3 per le rotazioni spaziali, 6 per il gruppo di Lorentz, 10 per quello di Poincaré e così via).

Capitolo 2

Teorie di Yang-Mill abeliane e non

In questo breve capitolo si parlerá delle teorie di Yang-Mills, ossia delle teorie basate su un'invarianza di gauge: da questo punto di vista l'elettromagnetismo é una teoria di gauge, per quanto visto nel capitolo precedente, e anche la relativitá ristretta e generale lo sono. Infatti l'invarianza di gauge della relativitá ristretta é data dall'invarianza per il gruppo di Poincaré, mentre, come si vedrá meglio piú avanti, l'invarianza di gauge della relativitá generale é l'invarianza per diffeomorfismi.

Questo capitolo, non fondamentale per la comprensione di ciò che segue, opera un confronto fra le teorie di Yang-Mills in generale e la relativitá generale: si definiranno concetti come quello di *derivata covariante* che avrá poi una formulazione specifica, in termini della metrica, nella relativitá generale per cui offre una visione generale di quelli che saranno poi i problemi che nascono nell'estendere la relativitá ristretta ai campi gravitazionali.

Prima di iniziare é bene puntualizzare i risultati ottenuti nel capitolo precedente che serviranno nel seguito: si é visto che, nel caso delle equazioni di Maxwell, si può definire un quadrivettore A_μ la cui componente temporale é la densitá di carica moltiplicata per la velocitá della luce, mentre le sue componenti spaziali sono la densitá di corrente. l'Invarianza di gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ porta alla conservazione della carica elettrica e, data l'azione, le equazioni del moto per i campi sono date da (1.50). In generale una teoria di Yang-Mills potrebbe introdurre M campi di gauge A_μ^a e non solo uno come nel caso di Maxwell.

Per cominciare considero una teoria di Yang-Mills abeliana e dipendente da un campo complesso $\phi(x)$, dove il termine *abeliano* sta a significare che il gruppo di simmetria della teoria é abeliano, ossia i suoi generatori commutano, come nel caso delle traslazioni. L'azione per questo campo é:

$$I[\phi] = \int d^4x (\partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 (\phi^* \phi)) \phi = 0 \quad (2.1)$$

dove “ m ” é la massa del campo per una ragione che si vedrá fra poco e ricordo che l'azione é reale e invariante di Lorentz. Le equazioni del moto (una per ogni campo, vediamo quella per ϕ^*) si trovano applicando (1.50) alla densitá di lagrangiana presente in (2.1) e si ottiene:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi = (\square + m^2) \phi = 0 \quad (2.2)$$

Se si passa nello spazio di Fourier si ha la consueta corrispondenza $\partial_\mu \rightarrow -ip_\mu$ dove p_μ é il 4-momento, di conseguenza l'equazione precedente diventa

$$(-p^\mu p_\mu + m^2) \hat{\phi} = 0$$

ossia $p^\mu p_\mu = m^2$ da cui l'identificazione di m come la massa (a riposo) del campo scalare. Ora considero cosa succede se trasformo i campi con un elemento del gruppo $U(1)$ globale: il gruppo $U(1)$ globale é formato dalle trasformazioni di fase indipendenti dallo spazio, ossia $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\Lambda}\phi(x)$ dove $\Lambda \in \mathbb{R}$ é un parametro indipendente dallo spazio. Di conseguenza $\phi^* \rightarrow \phi'^* = e^{-i\Lambda}\phi^*(x)$ e per i termini con le derivate si ha:

$$\partial_\mu \phi'(x) = e^{i\Lambda} \partial_\mu \phi(x) \quad \partial_\mu \phi'^*(x) = e^{-i\Lambda} \partial_\mu \phi^*(x)$$

Quando inserisco i campi cosí trasformati nella lagrangiana, mi accorgo che questa rimane invariata in quanto compare sempre il prodotto $\phi^* \phi$. Questo é il primo risultato importante: la lagrangiana in (2.1) é invariante per il gruppo $U(1)$ globale. Dato che ho rilevato un'invarianza ne cerco la corrispondente legge di conservazione usando il teorema di Noether. Intanto noto che avró una corrente conservata in quanto il gruppo di simmetria della lagrangiana dipende da un parametro e la sua espressione sará:

$$j^\mu = \sum_r \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r$$

dove la somma é estesa ai due campi ϕ e ϕ^* e

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - m^2 (\phi^* \phi)$$

Se considero una trasformazione infinitesima vale

$$e^{i\Lambda} = 1 + i\Lambda \Rightarrow \phi \rightarrow \phi + i\Lambda\phi \Rightarrow \delta\phi = i\Lambda\phi$$

La corrente conservata sará quindi:

$$j^\mu = (\partial^\mu \phi^*) i\Lambda\phi + (\partial^\mu \phi) (-i\Lambda\phi^*) = i\Lambda [(\partial^\mu \phi^*) \phi + c.c.]$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato. Si é visto quindi che l'azione $I[\phi]$ é invariante per il gruppo $U(1)$ globale. Ora invece vediamo cosa succede se si vuole l'invarianza per trasformazioni di fase dipendenti punto per punto dallo spazio-tempo ossia se si vuole l'invarianza per $U(1)$ locale:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \phi(x)$$

e per le derivate si ha:

$$\partial_\mu \phi' = \partial_\mu \left(e^{i\Lambda(x)} \phi(x) \right) = e^{i\Lambda(x)} \partial_\mu \phi(x) + i (\partial_\mu \Lambda) e^{i\Lambda(x)} \phi(x)$$

Come si vede ora $I[\phi]$ non é invariante per $U(1)$ locale (per il campo ϕ^* si avrá la trasformazione complessa-coniugata). Per preservare l'invarianza di $I[\phi]$ sotto $U(1)$ locale introduco un campo di gauge $A_\mu(x)$ che si chiama *connessione* di gauge abeliana. Ora faccio un'imposizione: se per la trasformazione di gauge $\phi(x) \rightarrow e^{i\Lambda(x)} \phi(x)$ allora il campo $A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \partial_\mu \Lambda$. Ora introduco il concetto, che avrá importanza in particolare nella formulazione della relativitá generale, di *derivata covariante*: la derivata covariante é una forma di derivazione diversa dalla derivazione ordinaria e nella sua definizione entra la connessione $A_\mu(x)$:

$$\Delta_\mu(x) = \partial_\mu(x)\phi + iA_\mu\phi = (\partial_\mu(x) + iA_\mu)\phi \quad (2.3)$$

Ora calcolo come trasforma $\Delta_\mu\phi$ sotto gauge:

$$\begin{aligned}
\Delta'_\mu\phi' &= \partial_\mu\phi' + iA'_\mu\phi' \\
&= e^{i\Lambda(x)}\partial_\mu\phi(x) + i(\partial_\mu\Lambda)e^{i\Lambda(x)}\phi(x) + i(A_\mu - \partial_\mu\Lambda)\left(e^{i\Lambda(x)}\phi(x)\right) \\
&= e^{i\Lambda(x)}\partial_\mu\phi(x) + iA_\mu e^{i\Lambda(x)}\phi(x) \\
&= e^{i\Lambda(x)}\Delta_\mu\phi
\end{aligned}$$

Il risultato appena trovato permette di dire che la (densità di) lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\Delta_\mu\phi)^*(\Delta^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi$$

é invariante sotto $U(1)$ locale, in quanto i campi (e le derivate dei campi) ϕ e ϕ^* trasformano con fattori di fase opposti che si elidono. Se voglio che il campo A_μ si possa propagare dovrà esserci un termine cinetico nella lagrangiana e abbiamo appena visto, che per come é definita la trasformazione di A_μ , il campo di gauge non é gauge-invariante.

Se calcolo $(\Delta_\mu\Delta_\nu\phi)$ ottengo $e^{i\Lambda}\Delta_\mu\Delta_\nu\phi$ per quanto visto sopra e in generale:

$$\Delta_\mu\Delta_\nu\phi = (\partial_\mu + iA_\mu)(\partial_\nu + iA_\nu)\phi$$

Ora calcolo $2\Delta_{[\mu}\Delta_{\nu]}\phi = (\Delta_\mu\Delta_\nu - \Delta_\nu\Delta_\mu)\phi$ ottenendo:

$$2\Delta_{[\mu}\Delta_{\nu]}\phi = i(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\phi = iF_{\mu\nu}\phi$$

La quantità $F_{\mu\nu}$ appena definita é gauge-invariante e permette di definire il termine cinetico del campo A_μ che compare nella lagrangiana

$$\mathcal{L} = (\Delta_\mu\phi)^*(\Delta^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

L'espressione per la corrente conservata sará, al solito:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi + c.c. = i(\Delta^\mu\phi^*)\phi + c.c.$$

mentre le equazioni per il moto del campo saranno:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

Un ultima osservazione sulle teorie di gauge abeliane, come l'elettromagnetismo: se $\phi = 0$ la corrente é nulla. Questo significa che la carica conservata é portata dal campo ϕ e non dal campo di gauge introdotto. Parafrasato nel caso elettromagnetico significa che il campo di gauge $A_{\mu em}$ non trasporta carica elettrica, ossia la particella associata al campo, che é il fotone, é elettricamente neutro, come si osserva.

2.1 Teorie di Yang-Mill non abeliane

In questa sezione trattiamo le teorie di Yang-Mills non abeliane, ossia teorie nelle quali il gruppo di simmetria associato é non abeliano. Iniziamo definendo i campi in gioco:

$$\{\phi_r\}_{r=1,\dots,N} \equiv \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} = \Phi$$

Tutti gli N campi ϕ_r hanno la stessa massa m e non avr o pi  campi e loro complessi coniugati, ma matrici (vettori) e loro aggiunti. Per analogia al caso precedente la densit  di lagrangiana sar :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

Definisco il gruppo di simmetria *globale* $\Phi' = U\Phi$ ossia in componenti $\phi'_r = U_{rs}\phi_s$. L'aggiunto Φ^\dagger trasformer  come $\Phi'^\dagger = \Phi^\dagger U^\dagger$. Se inserisco i campi trasformati in \mathcal{L} ottengo:

$$\mathcal{L}' = \partial_\mu (\Phi^\dagger U^\dagger) \partial_\mu (U\Phi) - m^2 \Phi^\dagger U^\dagger U \Phi = \mathcal{L} \Leftrightarrow U^\dagger U = 1_{N \times N}$$

Il gruppo di simmetria globale   quindi quello delle matrici unitarie $N \times N = U(N)$ e posso quindi rappresentarle in forma esponenziale

$$U = e^\Lambda \Rightarrow U^\dagger U = 1_{N \times N} \Leftrightarrow U^\dagger = U^{-1} \Leftrightarrow \Lambda^\dagger = -\Lambda$$

dove Λ   un operatore (in questo caso una matrice quadrata $N \times N$). Ora le matrici $U(N)$ formano un'algebra di Lie di dimensione N^2 poich  per scrivere una matrice di $U(N)$ ho bisogno in generale di N^2 matrici. Ad esempio in dimensione 2×2 le matrici di Pauli e la matrice identit  formano una base per $U(2)$. L'operatore Λ di e^Λ sar  una combinazione lineare degli N^2 generatori dell'algebra di Lie di $U(N)$:

$$\Lambda = \Lambda^a T^a$$

Ricordo che per i generatori di un'algebra di Lie vale:

$$[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$$

e i generatori possono essere normalizzati in modo che $tr(T^a T^b) = \delta^{ab}$.

Ricapitolando: nella simmetria $U(N)$ globale ho N^2 parametri globali (tanti quanti i generatori), di conseguenza ho N^2 campi di gauge e la connessione (data dai campi di gauge)   non abeliana.

Ora vediamo, analogamente al caso non abeliano, cosa succede se si vuole l'invarianza per il gruppo $U(N)$ *locale*. Ora si ha:

$$\partial_\mu \Phi' = \partial_\mu (U\Phi) = U \partial_\mu \Phi + (\partial_\mu U) \Phi$$

poich  ora anche U   funzione delle coordinate. Ora introduco la connessione $A_\mu(x) = A_\mu(x)^a T^a$, dove $A_\mu(x)^a$   una matrice $N \times N$ come i generatori T^a . Come detto prima, i campi di gauge necessari sono N^2 , pari al numero dei generatori dell'algebra di Lie. Come prima impongo la trasformazione di gauge e precisamente:

$$A'_\mu(x) = U A_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger = T^a A'^a_\mu(x)$$

e definisco

$$\Delta_\mu \Phi = (\partial_\mu - A_\mu) \Phi$$

Ora calcolo $\Delta'_\mu \Phi'$:

$$\begin{aligned} \Delta'_\mu \Phi' &= \partial_\mu \Phi' - A'_\mu \Phi' \\ &= \partial_\mu (U\Phi) - \left(U A_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger \right) U\Phi \\ &= U \partial_\mu \Phi + (\partial_\mu U) \Phi - U A_\mu \Phi - (\partial_\mu U) \Phi \\ &= U (\partial_\mu - A_\mu) \Phi \\ &= U \Delta_\mu \Phi \end{aligned}$$

Analogamente a prima la densità di Lagrangiana gauge-invariante é

$$\mathcal{L} = (\Delta_\mu \Phi)^\dagger (\Delta_\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

poiché $\Delta'_\mu \Phi'^\dagger = \Delta_\mu \Phi^\dagger U^\dagger$ e $U^\dagger U = 1$.

Ora considero le trasformazioni infinitesime di $A_\mu^a(x)$:

$$U = e^\Lambda = 1 + \Lambda$$

e non considero termini in Λ^2 o successivi. Quindi, per il campo generico di gauge si ha:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= T^a A_\mu^a \\ &= U A_\mu U^\dagger + (\partial_\mu U) U^\dagger \\ &= (1 + \Lambda) A_\mu (1 - \Lambda) + (\partial_\mu \Lambda) (1 + \Lambda) \\ &= (1 + \Lambda) A_\mu (1 - \Lambda) + \partial_\mu \Lambda + O(\Lambda^2) \\ &= A_\mu + [\Lambda, A_\mu] + \partial_\mu \Lambda \\ &= A_\mu^a T^a + [\Lambda^b T^b, A_\mu^c T^c] + \partial_\mu (\Lambda^a T^a) \end{aligned}$$

Poiché sto considerando un'algebra di Lie vale sempre

$$[\Lambda^b T^b, A_\mu^c T^c] = f^{abc} \Lambda^a A_\mu^a$$

dove f^{abc} sono i coefficienti di struttura. Alla fine dall'equazione precedente ottengo:

$$\delta A_\mu^a = A_\mu^{\prime a} - A_\mu^a = \partial_\mu \Lambda^a + f^{abc} \Lambda^a A_\mu^a$$

La curvatura associata alla connessione é definita come un commutatore di derivate covarianti:

$$\begin{aligned} (\Delta_{[\mu} \Delta_{\nu]} \Phi)' &= U \Delta_{[\mu} \Delta_{\nu]} \Phi \\ &= -\frac{1}{2} U F_{\mu\nu} \Phi \\ &= -\frac{1}{2} F'_{\mu\nu} \Phi' \\ &= -\frac{1}{2} F'_{\mu\nu} U \Phi \Rightarrow F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger \end{aligned}$$

Arrivati a questo punto si può scrivere la lagrangiana contenente anche il termine cinetico di propagazione dei campi di gauge $F^{\mu\nu a}$:

$$\mathcal{L} = \Delta_\mu \Phi^\dagger \Delta^\mu \Phi + \frac{1}{4} Tr (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) - m^2 \Phi^\dagger \Phi$$

La densità di lagrangiana appena scritta é invariante per $U(1)$ locale, l'unico termine per cui non é evidente é il termine in $F^{\mu\nu}$:

$$Tr (F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu}) = Tr (U F^{\mu\nu} U^\dagger U F_{\mu\nu} U^\dagger) = Tr (U F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} U^\dagger) = Tr (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$$

poiché U é un operatore unitario.

Considerando che ho N^2 campi di gauge quando si scrive $F^{\mu\nu}$ si intende $\sum_{r=1}^a F^{\mu\nu a}$ di conseguenza per la traccia di ha:

$$Tr (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = Tr (F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu a})$$

dove

$$F^{\mu\nu a} = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + f^{adc} A_\mu^b A_\nu^c$$

Come si vede $Tr(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$ contiene termini di ordine 3 e 4 in A , mentre nel caso abeliano si avevano al massimo termini di ordine 2. Questo significa che i campi di gauge introdotti per preservare l'invarianza locale della lagrangiana possono formare vertici fra di loro, ossia esistono termini di autointerazione dei campi di gauge. Per concludere questo capitolo vediamo le equazioni del moto che si ottengono:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu a} = j^{\nu a}$$

che vale per ciascuno degli N^2 campi di gauge e l'espressione per le N^2 correnti conservate. Se si calcolano le correnti conservate si vede che se i campi (non quelli di gauge) sono nulli si ha comunque una corrente diversa da zero. Questo significa che i campi di gauge sono carichi. Una teoria di gauge non abeliana é la teoria elettrodebole, dove il gruppo di simmetria é $SU(2) \times U(1)$ e i bosoni vettoriali W^+, W^-, Z^0 hanno carica debole e i W^\pm anche carica elettrica. Infatti é possibile il processo

$$W^+ + W^- \rightarrow Z_0$$

che rappresenta un'interazione fra i campi di gauge della teoria.

Capitolo 3

Il principio di Equivalenza

Nella visione newtoniana la gravit a   una forza che si esercita a distanza fra due corpi qualsiasi,   proporzionale al prodotto delle masse, decresce con il quadrato della distanza,   diretta come la congiungente dei centri di massa dei due corpi ed   sempre attrattiva, differenziandosi in questo dall'elettromagnetismo. La forza di gravit a agente su due corpi di massa m_1, m_2 che distano uno dall'altro r_{12}  :

$$\vec{F} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \frac{\vec{r}}{|r|} \quad G = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{cm^3}{s^2g} \quad (3.1)$$

Se considero due masse M, m dove $m \ll M$ posso pensare che la massa m sente una forza poich  la massa M ha creato un campo gravitazionale nello spazio circostante ad essa. Il concetto di campo evita i problemi connessi con le azioni a distanza poich  rende l'interazione locale: in un certo punto una massa sente una forza poich  in quel punto c'  un certo valore del campo gravitazionale generato da un'altra massa. In questa linea di pensiero riscrivo (3.1) come:

$$\vec{F} = m \frac{GM}{r^2} \frac{\vec{r}}{|r|} = m \vec{\nabla} \Phi$$

dove si   introdotto il potenziale gravitazionale (che   uno scalare) Φ , il cui gradiente   il campo gravitazionale:

$$\Phi = -G \frac{M}{r}$$

Ricordando le propriet  delle distribuzioni viste nel primo capitolo si pu  scrivere un'equazione che ricorda l'elettromagnetismo:

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = -GM \vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = GM 4\pi \delta^3(\vec{x}) = 4\pi MG \rho$$

dove ρ   la densit  di massa. Si vede come l'equazione appena scritta ricorda l'equazione valida in elettromagnetismo

$$\vec{\nabla}^2 A_0 = -\rho_e$$

3.1 Tentativi (falliti) per generalizzare Φ alla relativit  generale

1. Un primo tentativo sarebbe di considerare il potenziale gravitazionale Φ come la componente 0 di un quadrivettore $B^\mu = (\Phi = B^0, \vec{B})$ per  si possono fare due osservazioni:

- Nell'elettromagnetismo ho cariche positive e negative e ho sia repulsione che attrazione, mentre le masse sono sempre attrattive.
- Otterrei una corrente conservata $\tilde{j}_m^\nu = \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu}$ = corrente di massa da cui ricaveri che la quantità conservata é $Q = \int d^3x \tilde{j}^0$ che é la somma delle masse, ma ciò non é vero

Un tale modello porterebbe a concludere che la sorgente del campo gravitazionale é la massa e non l'energia, per cui un fotone non risentirebbe del campo gravitazionale mentre si é osservato che non é cosí.

2. Un secondo modo, seguito da Einstein fino al 1912, consiste nel considerare Φ un campo scalare come nell'equazione classica $\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi G\rho$. Si é visto che nel passaggio dalla fisica classica alla relativitá ristretta l'operatore scalare laplaciano é stato rimpiazzato dall'operatore d'alambertiano per cui opero nel seguente modo:

$$\vec{\nabla}^2 \rightarrow \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2 = \square \Rightarrow -\square \Phi = 4\pi G T_\mu^\mu$$

dove T_μ^μ é la traccia del tensore energia-momento che a piccole energie dá la densitá di energia peró mi scontro con un problema: si é visto che il tensore energia-momento del campo elettromagnetico é

$$T_\nu^\mu = F^{\nu\alpha} F_{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \eta_\nu^\mu F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$$

In questo modo si trova $T_\mu^\mu = 0$ per cui un campo elettromagnetico non darebbe contributo ad un campo gravitazionale pur avendo energia.

3. Dopo aver fallito con vettori e scalari proviamo i tensori di rango due e già si aprono due strade:
 - Un tensore antisimmetrico $\Phi_{\mu\nu} = -\Phi_{\nu\mu}$ ma si può vedere che questo tentativo é equivalente ad un campo scalare.
 - Non resta che tentare un tensore simmetrico (visto che abbiamo visto che un tensore può essere scomposto in una parte antisimmetrica e in una simmetrica) $\Phi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}$ e l'equazione di partenza sarebbe $\square \Phi_{\mu\nu} = 4\pi G T_{\mu\nu}$ ma in questa non soddisfa il principio di equivalenza (vedi dopo)

Tra i tentativi falliti questo é senz'altro il migliore perché, come si vedrá, al primo membro delle equazioni di Einstein compare un tensore di rango due simmetrico, ma non é un "semplice" d'alambertiano.

3.2 L'origine del principio di equivalenza

Visto che la relativitá generale dá cosí tanti problemi proviamo a ritornare alla relativitá ristretta per vederne i fondamenti e capire come possa essere generalizzata ad includere la gravitazione. Si é visto che la relativitá ristretta é basata sull'esistenza di riferimenti inerziali. Posso prendere come riferimento particelle neutre a massa nulla perché non sentono interazione elettromagnetica. Ora, nella formulazione del principio di equivalenza risulta fondamentale un'esperimento condotto per la prima volta da Eotvos nel 1889 il cui risultato é: *la massa*

inerziale e la massa gravitazionale di un corpo coincidono: considero un corpo che risente della forza gravitazionale ossia $F = F_g$

$$\begin{cases} \vec{F} &= m_i \vec{a} \\ \vec{F}_g &= m_g \vec{g} \end{cases} \Rightarrow \vec{a} = \frac{m_g}{m_i} \vec{g}$$

dove m_i é la massa inerziale del corpo (definita operativamente come rapporto tra la forza applicata ad un corpo e la conseguente accelerazione che subisce), m_g é la massa gravitazionale, rapporto fra la forza di gravitá subita da un corpo e la sua conseguente accelerazione. Ció che si osserva per ogni coppia di corpi é che $m_i = m_g$ per cui si potrebbe fare il seguente ragionamento: visto che la forza di gravitá é proporzionale alla massa *inerziale* di un oggetto sembrerebbe equiparabile ad una forza di inerzia, tipo la forza centrifuga o di Coriolis, per cui con un opportuno cambiamento di coordinate potrei eliminarla e ricondurmi alla relativitá ristretta. Ma vediamo con i calcoli questo ragionamento: l'accelerazione subita da un corpo cui sono applicate varie forze esterne il aggiunta alla gravitá é:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{g} + \frac{\vec{F}_{ext}}{m_i}$$

Ora opero la seguente trasformazione *non lineare* di coordinate:

$$\begin{cases} \vec{x}' &= \vec{x} - \frac{1}{2}gt^2 \\ t' &= t \end{cases}$$

da cui ottengo

$$\frac{d^2 \vec{x}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - \frac{1}{2}g \frac{d^2(t^2)}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - g = \frac{\vec{F}_{ext}}{m_i}$$

Ho trovato una trasformazione di coordinate non lineare che elimina il campo gravitazionale; questo sistema di riferimento si dice in “caduta libera” e naturalmente vale se \vec{g} é costante, altrimenti nel derivare rispetto al tempo bisogna tenerne conto. Ora si puó finalmente il principio di equivalenza:

Per ogni punto P dello spazio tempo o piú propriamente per ogni evento, é possibile scegliere un sistema di riferimento detto localmente inerziale tale che in un intorno sufficientemente piccolo di P le leggi della fisica sono quelle della relativitá ristretta, ossia si é in assenza di gravitá. Di questo principio si possono dare tre formulazioni:

Formulazione debole: vale solo per l'interazione gravitazionale.

Formulazione media: vale per tutto tranne l'interazione gravitazionale.

Formulazione forte: vale per ogni legge.

Noi assumeremo la formulazione forte.

3.3 La connessione affine

Considero un punto P e costruisco un riferimento localmente inerziale (vale la relativitá ristretta) in tale punto. Le coordinate di P in tale riferimento le denoto con $\xi^\alpha(P)$. Considero una particella libera massiva, quindi vale:

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} = 0 \quad \text{con} \quad s = \text{tempo proprio e } \eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = ds^2$$

Se avessi considerato un fotone, non avrei potuto derivare rispetto al tempo proprio in quanto $ds = 0$ per particelle senza massa, e scelto un parametro p avrei avuto $\xi^\alpha(p) = u^\alpha(p)$ con $u^2 = u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = 0$. Ora mi metto nel sistema di riferimento del laboratorio, dove denoto le coordinate con $x^\mu = x^\mu(\xi)$ e invertendo $\xi^\mu = \xi^\mu(x)$. Ora passo ai differenziali:

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu = \partial_\mu \xi^\alpha dx^\mu$$

quindi il 4-intervallo (che é un invariante) ds^2 diventa:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu \partial_\mu \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta \eta_{\alpha\beta} = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}$$

dove si é definita la metrica $g_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta \eta_{\alpha\beta}$. In un sistema di coordinate inerziale rispetto al laboratorio vale

$$ds^2 = dx'^\mu dx'^\nu g'_{\mu\nu} \Rightarrow g'_{\mu\nu} = \partial'_\mu \xi^\alpha \partial'_\nu \xi^\beta \eta_{\alpha\beta}$$

dove $\partial'_\mu \xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\mu}$ per cui alla fine

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\delta}{\partial x'^\nu} g_{\gamma\delta}$$

dove $g_{\gamma\delta}$ á la metrica definita prima (era $g_{\mu\nu}$). Ora arriva la parte importante:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} &= \frac{d}{ds} \frac{d\xi^\alpha}{ds} \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{ds} \right) \\ &= \partial_\mu \xi^\alpha \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{d}{dx^\nu} \partial_\mu \xi^\alpha \end{aligned} \quad (3.2)$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene con la regola di Leibniz. Ricordo che vale

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial \xi^\beta} = \delta^\alpha_\beta$$

per cui moltiplicando a sinistra (3.2) per $\frac{\partial x^\rho}{\partial x^\alpha}$ si ottiene

$$\frac{d^2 x^\rho}{ds^2} + \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\alpha} (\partial_\mu \partial_\nu \xi^\alpha) u^\mu u^\nu = 0 \quad (3.3)$$

dove u^μ é la quadri-velocitá $\frac{dx^\mu}{ds}$. Arrivati a questo punto si possono definire i simboli di Christoffel o connessioni affini:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = (\partial_\mu \partial_\nu \xi^\alpha) \frac{dx^\rho}{d\xi^\alpha} \quad (3.4)$$

Con questa definizione l'equazione (3.3) diventa:

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.5)$$

Si é detto che nel punto P la metrica é quella piatta cioè $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ perché il sistema di riferimento ξ^α é localmente inerziale in P e il moto é uniforme. Se voglio ricavare $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ a partire dalla metrica $g_{\alpha\beta}$ devo specificare in modo meno vago il significato di "sufficientemente vicino" che compare nella formulazione del principio di equivalenza. In P ho introdotto le coordinate

ξ^α localmente inerziali; denoto con $g_{\alpha\beta}^P(\xi)$ in fatto che ho inerzialitá in P . Se passo ad un sistema di riferimento generico avró la solita trasformazione della metrica:

$$g_{\mu\nu}(x \text{ generico}) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} g_{\alpha\beta}^P(\xi) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\nu}$$

Fatto questo posso definire in modo preciso la nozione di riferimento localmente inerziale in P :

- In P si deve avere la metrica piatta: $g_{\alpha\beta}^P(\xi(p)) = \eta_{\alpha\beta}$
- le derivate prime della metrica rispetto alle coordinate devono essere nulle in P :

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\alpha} \right) \Big|_{(\xi(P))} = 0$$

Prima ho legato $g_{\alpha\beta}(x(P))$ a $g_{\alpha\beta}^P(\xi)$ però non posso derivare quell'espressione rispetto a x poiché la conosco solo in $x(P)$. Però, se ricordo come é stata definita la connessione in (3.4) vedo che posso scrivere:

$$\frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \Big|_{x=x(p)} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \Big|_{x=x(p)} \cdot \Gamma_{\mu\nu}^\rho(x(P))$$

Ora posso derivare $g_{\mu\nu}(x \text{ generico})$ valutandolo in P :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x \text{ generico}) &= 2 (\partial_\rho \partial_{(\nu} \xi^\alpha) \partial_{\nu)} \xi^\beta g_{\alpha\beta}^P(\xi) \Big|_{\xi=\xi(P)} + \partial_\mu \xi^\alpha \partial_\nu \xi^\beta \underbrace{\frac{\partial \xi^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \xi^\lambda} \Big|_{\xi=\xi(P)}}_0 \\ &= 2 (\partial_\rho \partial_{(\nu} \xi^\alpha) \partial_{\nu)} \xi^\beta \eta_{\alpha\beta} \\ &= 2 \partial_\lambda \xi^\alpha \Gamma_{\rho(\mu}^\lambda \partial_{\nu)} \xi^\beta \eta_{\alpha\beta} \\ &= 2 \Gamma_{\rho(\mu}^\lambda g_{\nu)\lambda} \end{aligned}$$

per cui ho valutato le derivate prime della metrica in P (dove posso farlo) secondo un sistema di riferimento arbitrario. Esplicitando le componenti simmetrizzate e permutando i nomi degli indici coinvolti posso scrivere:

$$\begin{aligned} \partial_\lambda g_{\mu\nu} &= \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\nu\rho} + \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} \\ \partial_\mu g_{\lambda\nu} &= \Gamma_{\mu\lambda}^\rho g_{\nu\rho} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho g_{\lambda\rho} \\ -\partial_\nu g_{\mu\lambda} &= -\Gamma_{\nu\mu}^\rho g_{\lambda\rho} - \Gamma_{\lambda\nu}^\rho g_{\mu\rho} \end{aligned}$$

Sommando membro a membro ottengo:

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\lambda\nu} - \partial_\nu g_{\mu\lambda} = 2 \Gamma_{\lambda\mu}^\rho g_{\nu\rho}$$

Ora introduco la metrica inversa $g^{\alpha\beta}$ definita dalla relazione $g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$ e moltiplico entrambi i membri dell'equazione precedente per $g^{\alpha\beta}$ ottenendo:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\delta} (\partial_\mu g_{\delta\nu} + \partial_\nu g_{\delta\mu} - \partial_\delta g_{\mu\nu}) \quad (3.6)$$

Si vede che $\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho$ per la simmetria della metrica $g_{\mu\nu}$ e per come é costruito.

Arrivati a questo punto é utile riepilogare alcune equazioni che si sono ricavate ora e anche quando si é trattato la relativitá ristretta:

- Il quadri-intervallo ds^2 é legato alla metrica $g_{\mu\nu}$ da:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(x)$$

- Per la 4-velocitá $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$ vale:

$$u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1$$

- L'equazione per una particella libera nella metrica piatta, $\frac{du^\mu}{ds} = 0$ é sostituita, in presenza di una metrica non banale, dall'equazione della geodetica:

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0$$

che vale per una particella di massa non nulla. Tra l'altro si vede che a meno di costanti $\frac{du^\alpha}{ds}$ é la quadriforza per cui posso scrivere:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = -f^\alpha$$

- Nel caso di particelle a massa nulla non posso definire il tempo proprio e devo utilizzare un paramatro diverso dal tempo proprio per parametrizzare la traiettoria. Se $k^\mu = \frac{ds^\mu}{ds}$ é la tangente alla traiettoria valgono le equazioni:

$$\begin{aligned} k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} &= 0 \\ \frac{dk^\mu}{dp} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu k^\alpha k^\beta &= 0 \end{aligned}$$

- Si é definito un riferimento localmente inerziale in un certo punto P affermando che in quel punto la metrica deve esser quella piatta e le derivate prime della metrica rispetto alla spazio-tempo devono essere nulle. Questo significa che la metrica inizia a variare con le derivate seconde e le gravitá si fa sentire con le derivare seconde della metrica. Va precisato anche che un riferimento inerziale é determinato a meno di una trasformazione di Poincaré, poiché la metrica piatta é invariante per trasformazioni appartenenti al gruppo di Poincaré.
- $\partial_\rho g_{\mu\nu}(x_0)$ é un tensore per trasformazioni li Lorentz: valendo 0 in un sistema di riferimento, vale 0 in tutti i sistemi di riferimento.
- Non é piú vero che la velocitá della luce vale c in tutti i sistemi di riferimento perché ora non mi limito alle trasformazioni del gruppo di Poincará ma posso fare arbitrari cambiamenti di coordinate: ora la legge per particelle come i fotoni generale é:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = 0$$

e in generale non é soddisfatta da $\vec{x} = \vec{n}ct$

- Infine ricordo che in un sistema di riferimento localmente inerziale i simboli di Christoffel sono nulli, in quanto lineari nelle derivate prime della metrica.

Questo capitolo segna un ponte, piú concettuale che tecnico, fra la relativitá ristretta e quella generale. Anche se si é lontani da una formulazione matematica della relativitá generale, con i risultati fin qui ottenuti si possono dimostrare alcuni fatti non banali ai quali sará dedicata l'ultima sezione di questo capitolo. Dopo si abbandonerá la fisica per trattare la branca della matematica necessaria per sviluppare il formalismo della relativitá generale che é la geometria differenziale. Dopo aver acquisito il bagaglio matematico necessario si potrà tornare alla fisica e ricavare le equazioni di Einstein che descrivono il campo gravitazionale. Ma intanto vediamo i tre fatti che possono essere ricavati anche adesso.

3.4 Tre fatti

3.4.1 Le geodetiche estremizzano l'azione

L'azione che descrive la propagazione libera di una particella é, a meno del termine costante di massa:

$$I = - \int_a^b dS = - \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu} \quad (3.7)$$

Analogamente a quanto visto alla fine del primo capitolo impongo la stazionarietá dell'azione per variazione dei campi coinvolti con la condizione che la variazione sia nulla agli estremi: $\delta x^\mu|_{a,b} = 0$. Nel variare l'azione devo tener conto che non sono piú nel caso della relativitá ristretta dove la metrica era costante per cui si ha:

$$\begin{aligned} \delta I &= - \int \frac{1}{2ds} [(\partial_\rho g_{\mu\nu}) \delta x^\rho dx^\mu dx^\nu + 2g_{\mu\nu} d\delta x^\mu dx^\nu] \\ &= - \frac{1}{2} \int \left(\partial_\rho g_{\mu\nu} \delta x^\rho \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} ds \right) \\ &= - \frac{1}{2} \int \left(\partial_\rho g_{\mu\nu} \delta x^\rho u^\mu u^\nu + 2g_{\mu\nu} \frac{d\delta x^\mu}{ds} u^\nu \right) ds \\ &= \left(- \frac{1}{2} \int \delta x^\rho \left[\partial_\rho g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu - 2g_{\mu\rho} \frac{dx^\mu}{ds} - 2u^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\rho} u^\mu \right] ds \right) - \frac{1}{2} 2g_{\mu\nu} \underbrace{\delta x^\mu}_0 u^\nu \Big|_a^b \\ &= - \frac{1}{2} \int \delta x^\rho \left([\partial_\rho g_{\alpha\beta} - 2\partial_\alpha g_{\beta\rho}] u^\alpha u^\beta - 2g_{\mu\rho} \frac{du^\mu}{ds} \right) ds \end{aligned}$$

dove si é usata la regola di Leibniz per la derivata di un prodotto di 3 funzioni e si sono rinominati gli indici sommati a piacimento. Ora noto che dalla definizione di $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ posso scrivere

$$\partial_\rho g_{\alpha\beta} - \partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\rho g_{\beta\alpha} = \partial_\rho g_{\alpha\beta} - 2\partial_\alpha g_{\beta\rho} = -2g_{\rho\mu} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu$$

e sostituendo nell'ultima equazione che dava la variazione dell'azione ho:

$$\delta I = \int_a^b \delta x^\rho g_{\mu\rho} \left[\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha u^\beta \right] ds = 0$$

Se voglio che $\delta I = 0$ per trasformazioni arbitrarie deve essere identicamente nullo il pezzo tra parentesi ma questo é equivalente a richiedere che sia soddisfatta l'equazione della geodetica (3.5).

3.4.2 Limite Newtoniano

In questa sottosezione si ricava l'equazione della geodetica nel limite di campo debole e statico. Significa che si prenderá l'equazione della geodetica, si espliciteranno le componenti della connessione affine in funzione della metrica e le componenti della quadri-velocitá con i seguenti constraint:

- $g_{\mu\nu}$ é statico: $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$
- Il campo é debole ossia la metrica differisce di poco dalla metrica piatta. Piú precisamente si ha:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

- Sono nel limite non-relativistico: se pongo la velocità della luce pari a uno allora le velocità in gioco v sono tali che $v \ll 1$.

La quadrivelocità $u^\alpha = dx^\alpha/ds$ e nell'approssimazione a basse velocità si ha:

$$\frac{dx^i}{ds} / \frac{dx^0}{ds} = \frac{dx^i}{dx^0} = v^i \ll 1 \Rightarrow \frac{dx^i}{ds} \text{ trascurabile rispetto a } u^0 = \frac{dt}{ds}$$

In questo limite la 4-velocità assume la forma

$$u^\alpha = \left(\frac{dt}{ds}, \vec{0} \right)$$

e l'equazione della geodetica (3.5) assume la semplice forma

$$\frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{00}^\alpha \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \quad (3.8)$$

poiché le componenti spaziali della 4-velocità sono nulle e la componente temporale è dt/ds . l'equazione (3.8) è utile separare l'equazione (3.8) nella componente temporale e in quelle spaziali:

$$\begin{cases} \alpha = 0 & \Rightarrow \frac{d^2 t}{ds^2} + \Gamma_{00}^0 \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \\ \alpha = i & \Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} + \Gamma_{00}^i \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 = 0 \end{cases}$$

In generale le connessioni affini sono date da (3.6). In questo caso $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ e considero solo termini di primo grado in $h_{\mu\nu}$. Quindi (3.6) si specializza nella forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^\mu &= \frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} (\partial_0 h_{\mu 0} + \partial_0 h_{\mu 0} - \partial_\delta h_{00}) \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{\mu\delta} \partial_\delta h_{00} \end{aligned}$$

poiché le derivate temporali della metrica sono nulle. Separando la parte spaziale da quella temporale si ha:

$$\begin{cases} \Gamma_{00}^0 &= -\frac{1}{2} \eta^{0\delta} \partial_0 h_{00} = 0 \\ \Gamma_{00}^i &= -\frac{1}{2} \eta^{i\delta} \partial_\delta h_{00} = -\frac{1}{2} \partial^i h_{00} = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} \end{cases}$$

Sostituendo i valori di Γ_{00}^0 e di Γ_{00}^i nella parte temporale e spaziale dell'equazione della geodetica trovo:

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 = 0 &\Rightarrow \frac{d^2 t}{ds^2} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{ds} = k = \text{costante} \Rightarrow dt = k ds \\ \Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \partial_i h_{00} &\Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{ds^2} = k^2 \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \partial_i h_{00} k^2 \Rightarrow \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} \end{aligned}$$

Confrontando con l'equazione newtoniana

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi$$

dove ϕ è il potenziale gravitazionale si ottiene che, nel limite di campo debole, $h_{00} = g_{00} - \eta_{00} = 2\phi$. Prima di concludere questo argomento sarebbe bene capire quando l'approssimazione di

campo debole é valida e per far ciò é utile impostare un'analisi dimensionale: l'energia di una particella immersa in un campo gravitazionale di potenziale ϕ é

$$\frac{1}{2}mv^2 + m\phi$$

da cui si vede che ϕ deve avere le stesse dimensioni fisiche di v^2 . Di conseguenza se cerco un potenziale gravitazionale a-dimensionale da paragonare agli elementi di $h_{\mu\nu}$ che sono a-dimensionali, dovró dividere il potenziale gravitazionale classico per una velocità al quadrato e la velocità piú naturale da usare é la velocità della luce. Quindi calcolo la combinazione

$$\Phi = -\frac{GM}{rc^2}$$

dove M é la massa del corpo che genera il campo, r la distanza dal centro di una massa di prova che é immersa nel campo generato dal corpo di massa M. Il calcolo di Φ sulla superficie di alcuni corpi significativi porge:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{protone} \sim 10^{-39} \\ \text{Terra} \sim 10^{-9} \\ \text{Sole} \sim 10^{-6} \\ \text{nana bianca} \sim 10^{-4} \end{array} \right.$$

per cui l'aprossimazione di campo debole é valida per una vasta gamma di corpi, anche compatti come una nana bianca.

3.4.3 Red-shift gravitazionale

Considero l'intervallo fra due eventi e, una volta fissato un sistema di riferimento, misuro il tempo con un orologio. Vale, al solito

$$ds = \sqrt{dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(x)} = dt \sqrt{\frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{dt} g_{\mu\nu}(x)} = dt \sqrt{v^\mu v^\nu g_{\mu\nu}(x)}$$

dove ho definito la 4-quantitá (non é un quadrivettore poiché dt non é un invariante) $v^\mu = dx^\mu/dt$. Se mi metto in un riferimento localmente inerziale il 4-intervallo diventa:

$$ds = \sqrt{d\xi^\alpha d\xi^\beta \eta_{\alpha\beta}} = d\xi^0 \sqrt{1 - \frac{d\xi^i}{d\xi^0}} = d\xi^0 \sqrt{1 - v_\xi^2} = d\tilde{\xi}^0$$

dove $d\tilde{\xi}^0$ é il tempo proprio misurato in un sistema di riferimento inerziale dove l'orologio é fermo. Se l'orologio é fermo nel laboratorio, cioè $d\vec{x}/dt = 0$, si ottiene $ds = dt\sqrt{g_{00}} \Rightarrow dt = ds/\sqrt{g_{00}}$. Si é visto nella sottosezione precedente che, nel caso di campi deboli

$$g_{00} = 1 + 2\phi = 1 - \frac{2GM}{r} < 1$$

per cui $dt > ds$, ossia il tempo scorre piú velocemente nel sistema di riferimento in cui si é fermi.

Considero ora il campo gravitazionale dato dalla Terra e dal Sole e lo considero statico perciò $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$. Considero un treno di fotoni emesso dal Sole il un tempo dt_{Sole} : essendo fotoni vale $ds^2 = 0$ ossia:

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{0i}dx^i dt + g_{ij}dx^i dx^j = 0$$

Per i ragionamenti visti prima

$$dt_{Sole} = \frac{ds}{\sqrt{g_{00}(Sole)}}$$

mentre sulla Terra si avrà analogamente

$$dt_{Terra} = \frac{ds}{\sqrt{g_{00}(Terra)}}$$

Ora considero la frequenza dei fotoni emessi dal Sole e ricevuti sulla Terra: andrà come l'inverso del tempo impiegato dal treno d'onde per essere emesso:

$$\frac{\nu_{Sole}}{\nu_{Terra}} = \sqrt{\frac{g_{00}(Sole)}{g_{00}(Terra)}} = \sqrt{\frac{1 + 2\phi(Sole)}{1 + 2\phi(Terra)}} \sim 1 + \phi(Sole) - \phi(Terra) \sim 1 + \phi(Sole)$$

poiché sia il campo del Sole e quello della Terra sono deboli, ma quello della Terra é anche molto piú piccolo di quello del Sole. Ciò che cerco é la variazione di frequenza subita dai fotoni emessi dal Sole nel giungere alla Terra:

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\nu_{Sole} - \nu_{Terra}}{\nu(Terra)} = \phi(Sole) - \phi(Terra) \sim \phi(Sole)$$

Quindi la diminuzione relativa di frequenza subita dai fotoni emessi é $\phi(Sole) = -M_{Sole}G/r_{Sole} = -2.12 \cdot 10^{-6}$. Se tutto questo ragionamento appare contorto é perché il primo a non averlo capito sono io che scrivo. Comunque alla fine il messaggio fisico é chiaro: i fotoni che vengono emessi dal Sole perdono frequenza (e quindi energia) nel giungere sulla Terra perché devono risalire il campo gravitazionale del Sole, un fenomeno analogo alla diminuzione di velocità di un sasso lanciato verso l'alto, solo che i fotoni corrono di piú e sfuggono al campo del Sole. Se, però, volessi fare un calcolo piú accurato dovrei tener conto dell'effetto doppler poiché gli atomi di idrogeno che emettono sono in movimento. Tra l'altro le misure sperimentali fatte per misurare il red-shift gravitazionale sono in accordo con gli esperimenti. In particolare si é misurata la frequenza di raggi γ emessi verso l'alto da atomi di ferro posti ad una distanza verticale di 22.6 metri. La diminuzione di frequenza nel risalire il campo terrestre per 22.6 metri é $gh/c^2 = 2.46 \cdot 10^{-15}$ e i risultati ottenuti, $(2.57 \pm 0.26) \cdot 10^{-15}$ sono in accordo con le previsioni teoriche.

3.5 Il principio di covarianza generale

Con questa sezione si chiude il capitolo dedicato al principio di equivalenza e la prima parte del lavoro, in cui si é trattato espesamente della relatività ristretta e si é introdotto il principio di equivalenza che é alla base della relatività generale. Ci si é resi conto delle difficoltà concettuali e matematiche nell'estendere la relatività ristretta a comprendere la gravità. Infatti la prossima parte sará dedicata a sviluppare la branca della matematica necessaria per formalizzare la relatività generale, ossia la geometria differenziale. Bisogna dire che in questo aspetto Einstein é stato piú fortunato di Newton: mentre Newton, per sviluppare la sua fisica, si é dovuto inventare gli strumenti matematici necessari Einstein si é reso conto che il calcolo differenziale assoluto, sviluppato nella seconda metà dell' '800 per ragioni puramente matematiche da personalità come Tullio Levi Civita, Gregorio Ricci Cubastro, Luigi Bianchi, lo stesso Christoffel, era proprio ciò che gli serviva per estendere la relatività ristretta a includere la gravitazione. Questo non significa che il compito si fosse reso improvvisamente facile,

poiché dalla formulazione della relatività ristretta a quella generale passarono 10 anni di duro lavoro. Comunque, passando oltre agli aspetti storici su Einstein, enunciamo il “Principio di covarianza generale”: *Le leggi della fisica in presenza della gravità sono tali che se la metrica $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu}$ e, di conseguenza, la connessione affine $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} \rightarrow 0$ si riottengono le leggi della relatività ristretta e inoltre la leggi della fisica in presenza di gravità devono avere la stessa forma in tutti i sistemi di coordinate, cioè si richiede covarianza per trasformazioni generali di coordinate, o diffeomorfismi, denotati con $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x^{\mu})$.*

Si può vedere infine che le due affermazioni che compongono il principio di covarianza generale sono equivalenti al principio di equivalenza.

Parte II

Dalla geometria differenziale alle equazioni di Einstein

Capitolo 4

Elementi di geometria differenziale

4.1 Varietá

Una *varietá differenziale* di dimensione D é uno spazio topologico di Hausdorff, localmente omeomorfo a R^D con funzioni di transizione C^∞ . In generale le varietá differenziali non hanno una struttura lineare come gli spazi vettoriali. Comunque, per capire con cosa si sta trattando é bene vedere il significato di ogni termine che compone la definizione di varietá differenziale. Uno *spazio topologico* é dato da un'insieme M e una collezione $U_\alpha \subset M$ di sottoinsiemi detti aperti tali che la famiglia di aperti $F = U_\alpha$ soddisfi le seguenti condizioni:

1. $\emptyset, M \in F$
2. $\bigcup_{i=1}^\infty U_\alpha \in F$
3. $\bigcap_{i=1}^{n < \infty} U_\alpha \in F$

Gli elementi $P \in M$ sono gli eventi.

Uno spazio *di Hausdorff* é uno spazio separabile: dati due elementi P_1, P_2 di M , con $P_1 \neq P_2$ allora esistono U_1 intorno di P_1 e U_2 intorno di P_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Definire la locuzione *localmente omeomorfo a R^D* richiede piú lavoro. Dato $U_\alpha \in F$ (definiti come sopra) definisco un intorno coordinato, ossia una coppia (U_α, ϕ_α) nel seguente modo:

1. $\phi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \tilde{U}_\alpha \subset R^D$
2. ϕ_α é un omeomorfismo: é una funzione continua, invertibile e con inversa continua (bicontinua)

Per come é costruita ϕ_α mappa un evento $P \in U_\alpha$ in una enupla di coordinate $x^\mu (\mu = 1, \dots, D)$ ed essendo un omeomorfismo mappa aperti in aperti. Le coordinate x^μ sono le coordinate di P nella carta (U_α, ϕ_α) . Ora introduco la definizione di *atlante*: una famiglia di carte $\{U_\alpha, \phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ forma un atlante se $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M =$ tutto lo spazio. Considero due aperti $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$. Posso mapparli in due aperti distinti (usando due omeomorfismi diversi, ϕ_α, ϕ_β) $\tilde{U}_\alpha, \tilde{U}_\beta \in R^D$. Potendo invertire le mappe, nell'intersezione fra $\tilde{U}_\alpha, \tilde{U}_\beta$ posso costruire la mappa composta:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \tilde{U}_\alpha \in R^D \implies \tilde{U}_\beta \in R^D$$

Potendo costruire tale mappa composta solo nell'intersezione fra due aperti U_α, U_β posso scrivere:

$$\phi_{\alpha\beta} \equiv \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

Si vede che per come é definita $\phi_{\alpha\beta}^{-1} = \phi_{\beta\alpha} = \phi_{\alpha} \circ \phi_{\beta}^{-1}$

Se $\phi_{\alpha\beta}$ é una funzione di classe C^k (continua e derivabile con la derivata k -esima continua) allora l'insieme $\{U_{\alpha}, \phi_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ si chiama C^k -atlante. Se $\phi_{\alpha\beta}$ é di classe C^{∞} allora $\{U_{\alpha}, \phi_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ si chiama C^{∞} -atlante e suppongo che valga ciò. Infine si chiama atlante massimale un atlante, data una varietà, che contenga ogni altro atlante.

A questo punto sono stati definiti tutti i termini che compongono la definizione di varietà differenziale e si può dimostrare il seguente teorema : *Una varietà differenziale C^{∞} di dimensione D é uno spazio topologico di Hausdorff se possiede un atlante C^{∞} con funzioni di transizione $\phi_{\alpha\beta} : R^D \rightarrow R^D$.*

Come esempio considero la superficie di una sfera. Potrei associare ogni punto della sfera ad un punto di un piano sul quale giace la sfera nel seguente modo: partendo dal punto opposto a quello di contatto (polo nord) traccio segmenti che intersecano la sfera in ogni direzione e poi le prolungo fino ad incontrare il piano mettendo in corrispondenza ogni punto della sfera con una del piano. Però sorge un problema: il polo nord incontra il piano all'infinito, ossia non posso proiettarlo in questo modo. Quindi per proiettare la sfera mi serviranno due carte per cui una parte della superficie della sfera sarà proiettata in due modi e in questa parte potrò costruire una funzione di transizione.

Allo stesso modo mi servirebbero due carte per proiettare un toro su un piano.

Le funzioni di transizione $\phi_{\alpha\beta}$ sono funzioni continue, derivabili infinite volte con derivate continue, e sono invertibili con inversa ugualmente continua e derivabile. Funzioni con tali caratteristiche si dicono diffeomorfismi e corrispondono ad un cambiamento di coordinate poiché vanno da R^D a R^D cioè $x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu}(x^{\mu})$.

Considero ora i diffeomorfismi fra varietà M e M' di dimensione D . Considero ora un omeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M'$ che associa ogni punto $P \in M$ con $P' \in M'$. Considero le due carte (U, ϕ) in M e (U', ϕ') in M' . Definisco la seguente mappa composta:

$$\Lambda \equiv \phi' \circ \Phi \circ \phi^{-1} \tag{4.1}$$

Ricordo i seguenti fatti:

- $\phi^{-1} : R^D \rightarrow M$
- $\Phi : M \rightarrow M'$
- $\phi' : M' \rightarrow R^D$

Mettendo tutto insieme si ha che: $\Lambda : R^D \rightarrow R^D$.

A questo punto si dá la seguente definizione: L'omeomorfismo $\Phi : M \rightarrow M'$ con M, M' varietà si dice differenziabile C^{∞} se prese le carte (U, ϕ) in M e (U', ϕ') in M' la mappa Λ definita in (4.1) é C^{∞} . Se poi anche Φ^{-1} é differenziabile, Φ é un diffeomorfismo e la varietà M, M' si dicono diffeomorfe.

Nel caso particolare in cui le due varietà coincidono si ha $\Phi = id$. da cui $\Lambda = \phi' \circ \phi^{-1} =$ funzione di transizione.

Per concludere questa sezione restringo il campo delle varietà che saranno considerate: si considerano varietà differenziali C^{∞} , connesse (per avere continuità), senza bordo (per poter integrare per parti) e para-compatte. La paracompattezza é equivalente all'esistenza di una metrica $g_{\mu\nu}(x)$ ed é equivalente a dire che la varietà é metrizzabile, ossia posso introdurre una funzione con le proprietà di una distanza (definita positiva, omogenea, sub-additiva).

4.2 Tensori

Si definiscono vettori controvarianti tutti i vettori appartenenti allo spazio tangente di un punto generico P (saranno tutti i vettori che hanno prodotto scalare nullo con la normale alla varietà nel punto P), mentre gli elementi dello spazio cotangente si chiamano 1-forme differenziali o vettori covarianti.

Considero una funzione a valori reali definita sulla varietà M di dimensione D $f : M \rightarrow R$. Richiedo che f sia C^∞ richiedendo che $f \circ \phi_\alpha^{-1} : R^D \rightarrow R \in C^\infty$ dove $\phi_\alpha : M \rightarrow R^D$ é un diffeomorfismo fra la varietà e un aperto di R^D .

Considero ora lo spazio tangente nel punto P appartenente alla varietà M , T_P . Definisco una curva γ che passa per P : γ é una mappa che associa ad ogni punto di \mathbb{R} un punto della varietà con la sola condizione che γ passi per P :

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \rightarrow P(t) \in M \quad \gamma(0) = P$$

dove ho usato la libertà di ridefinire il parametro t in modo che passi per $P = \gamma(0) = \gamma|_{t=0}$. Analogamente a prima richiedo che $\phi_\alpha \circ \gamma : R \rightarrow R^D \in C^\infty$.

Data una curva γ passante per P e una funzione $f : M \rightarrow R$ considero la mappa lineare in f chiamata V_γ :

$$V_\gamma : f \rightarrow \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) \Big|_{t=0} \quad f \circ \gamma : R \rightarrow R$$

Noto che posso scrivere:

$$f \circ \gamma = \underbrace{f \circ \phi_\alpha^{-1}}_{f(x^\mu)} \circ \underbrace{\phi_\alpha \circ \gamma}_{x^\mu(t)} = f(\underbrace{x(t)}_{\text{curva}})$$

Ora applico V_γ alla funzione f :

$$V_\gamma f = \frac{d}{dt} (f \circ \gamma) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t=0} = \frac{\partial_\mu f}{\partial x^\mu} \Big|_{x(t_0)} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \Big|_{t_0}$$

Astraendo dalla particolare funzione su cui agisce V_γ lo definisco nel seguente modo :

$$V_\gamma = \frac{dx^\mu}{dt}(0) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv V^\mu \partial_\mu \quad (4.2)$$

$\{V_\gamma\} \equiv T_P$ é uno spazio vettoriale lineare ed é detto lo spazio tangente nel punto $P = \gamma(0)$; V^μ sono le componenti del vettore V nella base ∂_μ . Su una funzione scalare f , V agisce nel seguente modo:

$$V(f) = (V^\mu \partial_\mu) f = V^\mu \partial_\mu f \quad f : M \rightarrow R \quad V^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \Big|_{t=0}$$

In particolare se faccio agire V sulle componenti x^ρ che identificano il punto P ottengo:

$$V(x^\rho) = V^\mu \partial_\mu x^\rho = V^\mu \delta_\mu^\rho = V^\rho$$

Passo ora ai campi vettoriali $P \rightarrow T_P$ cioè $x^\mu \rightarrow V^\mu(x)$. Sotto un cambiamento di carta $V = V^\mu(x) \partial_\mu$ e cambiando carta (V é un invariante) $V'^\mu(x') \partial'_\mu$ e $\partial'_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}$. Se voglio preservare l'invarianza di V allora V^μ dovrà trasformare con la trasformazione inversa di ∂_μ :

$$V'^\mu(x') = \frac{\partial'^\mu}{\partial x^\rho} V^\rho(x) = \text{legge di trasformazione di un campo vettoriale}$$

Definisco lo spazio cotangente T_P^* in P: $T_P^* \equiv$ duale di T_P . La dimensione di T_P é la stessa della varietà perché ho una base $\{\partial_\mu\}$ e $\forall V \in T_P$ posso scrivere $V = V^\mu \partial_\mu$. Se $V \in T_P$ e $\omega \in T_P^*$ si ha:

$$\begin{aligned}\omega & : T_P \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{funzionale lineare su } T_P) \\ \omega & : V \rightarrow \omega(V) = (\omega, V)\end{aligned}$$

Se passo in coordinate cerco la base duale di ∂_μ e la indico con dx^μ , Si ha:

$$(dx^\rho, \partial_\mu) = \delta_\mu^\rho \quad \omega = dx^\rho \omega_\rho$$

dove ω_ρ sono le componenti della 1-forma nella base dx^ρ .

Sotto un cambiamento di carta devo avere $(dx'^\mu, \partial'_\nu) = \delta_\nu^\mu$ e vale $\partial'_\nu = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \partial_\rho$ da cui si ha:

$$\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} (dx'^\mu, \partial_\rho) = \delta_\nu^\mu$$

Moltiplicando a sinistra per $\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}$ ottengo

$$(dx'^\mu, \partial_\alpha) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}$$

e moltiplicando a destra per $\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}$ ottengo

$$\left(dx'^\mu \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}, \partial_\alpha \right) = \delta_\alpha^\beta = \left(dx^\beta, \partial_\alpha \right) \Rightarrow dx'^\mu = dx^\rho \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}$$

per cui alla fine

$$dx'^\nu \omega'_\nu = dx^\rho \omega_\rho = dx'^\nu \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \omega_\rho \Rightarrow \omega'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \omega_\nu$$

Mettendo tutto insieme ricavo il seguente invariante per diffeomorfismi:

$$(\omega, V) = (dx^\rho \omega_\rho, V^\mu \partial_\mu) = \omega_\rho V^\mu (dx^\rho, \partial_\mu) = \omega_\rho V^\mu \delta_\mu^\rho = \omega_\mu V^\mu \quad (4.3)$$

Definisco il differenziale di una funzione nel seguente modo: data $f : M \rightarrow R$ si ha:

$$df \in T_P^* \quad \text{tale che} \quad (df, V) \equiv V(f) = V^\mu \partial_\mu f$$

Uso l'identificazione naturale per df : $df = dx^\rho \partial_\rho f$, infatti si ha:

$$(dx^\rho \partial_\rho f, V^\mu \partial_\mu) = ((\partial_\rho f) V^\mu, dx^\rho \partial_\mu) = ((\partial_\rho f) V^\mu, \delta_\mu^\rho) = V^\mu \partial_\mu f$$

Dopo aver introdotto scalari, vettori e 1-forme e aver visto che con vettori e 1-forme si posso costruire invarianti come $(\omega, V) = \omega_\mu V^\mu$. Ora si é pronti per generalizzare a tensori con un numero arbitrario di indici covarianti e controvarianti. Intanto definisco il prodotto tensoriale Π_s^r :

$$\Pi_s^r = \underbrace{T_p^* \times \cdots \times T_p^*}_r \text{ spazi cotangenti} \times \underbrace{T_p \times \cdots \times T_p}_s \text{ spazi tangenti}$$

Definisco un tensore T_s^r con r indici in alto e s indici in basso come un elemento del duale di Π_s^r ossia come l'insieme dei funzionali multilineari definiti su Π_s^r :

$$T_s^r \supset T : \Pi_s^r \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ossia} \quad (\omega_1, \dots, \omega_r, V_1 \dots V_s) \rightarrow T(\omega_1, \dots, \omega_r, V_1 \dots V_s) \quad (4.4)$$

ed essendo la mappa T multilineare (lineare in ogni variabile), se $\omega_i = dx^\mu \omega_{i\mu}$, $V^j = V^{j\mu} \partial_\mu$ allora si ha:

$$T(\omega_1, \dots, \omega_r, V_1 \dots V_s) = \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{r\mu_r} V^{1\nu_1} \dots V^{s\nu_s} T(dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_r}, \partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_s})$$

Cerco ora una base di funzionali lineari definita su Π_s^r ossia cerco una base per i tensori T_s^r . A tal proposito definisco:

$$E_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\nu_1 \dots \nu_s} \equiv dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \in T_s^r$$

in modo che si abbia

$$E_{\mu_1 \dots \mu_r}^{\nu_1 \dots \nu_s} (\omega_1 \dots \omega_s, V^1 \dots V^s) = \omega_{1\mu_1} \dots \omega_{r\mu_r} V^{1\nu_1} \dots V^{s\nu_s}$$

Un generico elemento T_s^r sarà:

$$T_s^r = dx^{\nu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_s} \otimes \partial_{\mu_1} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_r} \underbrace{T_{\nu_s \dots \nu_1}^{\mu_r \dots \mu_1}}_{\text{coefficienti della base}}$$

Al di lá del formalismo usato per definire i tensori in generale, ciò che poi sarà di grande utilizzo é il modo in cui i tensori trasformano sotto cambiamenti di coordinate: in generale un tensore trasforma con una trasformazione diretta per ogni indice controvariante e con una trasformazione inversa per ogni indice covariante. Con un esempio si chiarisce cosa si vuole dire:

$$T_\nu^{\mu'}(x') = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\delta}{\partial x^{\nu'}} T_\delta^\rho(x) \quad \text{se } x \rightarrow x'(x)$$

4.2.1 k-forme

In generale gli elementi dello spazio tangente sono tensori di tipo T_0^1 , mentre i tensori dello spazio cotangente sono del tipo T_1^0 , dove 1 e 0 indicano il numero totale di indici covarianti e controvarianti. Considero invece un generico elemento di $\Lambda_k \subset T_k^0$ e lo chiamo *k-forma*. Λ_k contiene elementi ω_k definiti nel seguente modo:

$$\omega_k = \frac{1}{k!} dx^{\mu_1} \otimes \dots \otimes dx^{\mu_k} \omega_{\mu_k \dots \mu_1}$$

e impongo la condizione di totale antisimmetria:

$$\omega_{\mu_k \dots \mu_1} = \omega_{[\mu_k \dots \mu_1]}$$

Introduco la seguente notazione per i differenziali:

$$dx^\mu \otimes dx^\nu \equiv dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv dx^\mu dx^\nu$$

e l'algebra dei differenziali soddisfa:

$$dx^\mu dx^\nu = -dx^\nu dx^\mu$$

A questo punto introduco il prodotto fra forme: $(\Lambda_k, \Lambda_m) \rightarrow \Lambda_{k+m}$:

$$\chi_{k+m} = \omega_k \phi_m = \frac{1}{k!} \frac{1}{m!} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_k} \omega_{\mu_k \dots \mu_1} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_m} \phi_{\nu_m \dots \nu_1}$$

dove, naturalmente, $\Lambda_{k+m} \in T_{k+m}^0$, $\omega_k \in T_k^0$, $\phi_m \in T_m^0$. Considerando le proprietà dei differenziali (se i differenziali sono antisimmetrici allora in un prodotto tensoriale solo la parte antisimmetrica dell'altro tensore conta) si ha:

$$\chi_{k+m} = \frac{1}{m!k!} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_k} dx^{\nu_1} \dots dx^{\nu_m} \omega_{[\mu_k \dots \mu_1]} \phi_{[\nu_m \dots \nu_1]}$$

mentre usando la definizione di $(k+m)$ -forma si ha:

$$\chi_{k+m} = \frac{1}{(m+k)!} dx^{\rho_1} \dots dx^{\rho_{m+k}} \chi_{\rho_{m+k} \dots \rho_1}$$

Confrontando queste due equazioni si ha:

$$\chi_{\rho_1 \dots \rho_{m+k}} = \frac{(m+k)!}{m!k!} \chi_{[\rho_1 \dots \rho_m \rho_{m+1} \dots \rho_{m+k}]}$$

Per le k-forme valgono inoltre le seguenti proprietà:

- $\omega_k \Phi_m = (-1)^{mk} \Phi_m \omega_k$
- $\omega_k \omega_k = 0$ se k è dispari. (conseguenza dell'antisimmetrizzazione)
- $\omega_k = 0$ se $k > D =$ dimensione dello spazio tempo.

Definisco ora la metrica: la metrica g è un tensore $\in T_2^0$ che agisce sui vettori e soddisfa le seguenti proprietà:

- simmetria: $g(V_1, V_2) = g(V_2, V_1)$
- g non degenera o invertibile: $g(V, W) = 0 \forall V \Leftrightarrow W = 0$
- le componenti di $g_{\mu\nu}(x)$ si trovano applicandola alla basi dei vettori: $g_{\mu\nu}(x) = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$

Una metrica che soddisfa tali proprietà si dice metrica riemanniana e una varietà differenziale dotata di una metrica riemanniana si dice varietà riemanniana. Si possono definire due tipi di derivate che non necessitano della metrica per essere definite: la differenziazione sulle k-forme e la derivata di Lie. Nella prossima sotto-sezione vediamo come si definisce in generale la derivata di Lie per mezzo della mappa indotta e calcoleremo la derivata di Lie in casi significativi (scalari, vettori, covettori, tensori a due o tre indici).

4.3 Derivate di Lie

Considero una mappa differenziabile Φ fra due varietà $M \in M'$ e i punti $Q \in M$, $P \in M'$. Tale mappa Φ indurrà una mappa fra i tensori di M e quelli di M' , cioè una mappa indotta $\tilde{\Phi}$:

$$\tilde{\Phi} : T_s^r(Q) \rightarrow (\tilde{\Phi} T_s^r)(P)$$

Specializzo la definizione data a casi particolari:

- funzioni scalari $f : M \rightarrow R$

$$\tilde{\Phi} = f \circ \Phi^{-1}$$

poiché $f : M \rightarrow R$, $\Phi : M \rightarrow M' \rightarrow f \circ \Phi^{-1} : M' \rightarrow M$.

- vettori (dato una funzione scalare f):

$$V \rightarrow (\tilde{\Phi}V)(f) = V(f \circ \Phi)$$

poiché $f \circ \Phi : M' \rightarrow R$ e i vettori agiscono sugli scalari.

- 1-forme

$$\omega \rightarrow (\tilde{\Phi}\omega, V) = (\omega, \tilde{\Phi}^{-1}V)$$

Se T_α^μ e W_ν^β sono tensori anche il loro prodotto $T_\alpha^\mu W_\nu^\beta$ lo é e se T_α^μ é un tensore allora T_μ^μ é uno scalare.

La mappa indotta che si é definita prima preserva i prodotti e le contrazioni:

$$(\omega, V) \rightarrow (\tilde{\Phi}\omega, \tilde{\Phi}V) = (\omega, \tilde{\Phi}^{-1}\tilde{\Phi}V) = (\omega, V)$$

Per poter arrivare a definire le derivate di Lie, che sono derivate direzionali, devo prima definire cos'è una curva integrale $x^\mu(t)$ associata ad un campo vettoriale $W^\mu(x)$: $x^\mu(t)$ si dice curva integrale associata al campo vettoriale $W^\mu(x)$ e passante per il punto Q di coordinate Y^μ se soddisfa a:

1. $W^\mu(x(t)) = \frac{dx^\mu}{dt}$
2. $x^\mu(0) = Y^\mu \equiv Q$

Naturalmente la seconda condizione sta a significare che la curva integrale dipende anche dal punto Y^μ .

Considero una famiglia di diffeomorfismi $\{\Phi_t\}$ fra un intorno del punto Q e una varietà M : $\Phi_t : Q \rightarrow \Phi_t(Q) = P$ o, in coordinate, $Y^\mu \rightarrow x^\mu(Y, t)$. Si dimostra il seguente teorema:

sia W^μ un campo vettoriale C^∞ e sia $W \neq 0$ nel punto Q , allora $\forall Q$ passa una e una sola curva integrale ed esiste un intorno U di Q ed un $\epsilon > 0$ tale che $\{\Phi_t\}$ costituisce un gruppo di diffeomorfismi locali $\Phi_t : U \rightarrow M$ ad un parametro se $|t| < \epsilon$.

Ricordo che $\{\Phi_t\}$ costituiscono un gruppo di diffeomorfismi ad un parametro se soddisfano le seguenti condizioni:

1. $\Phi_0 = 1$
2. $\Phi_s \circ \Phi_t = \Phi_{s+t}$
3. $\Phi_t^{-1} = \Phi_{-t}$

Sviluppando in serie di Taylor e fermandomi al primo ordine (t é piccolo) $Y^\mu \rightarrow x^\mu(Y, t)$ si ha:

$$x^\mu(Y, t) = Y^\mu + tW^\mu(x(0)) + O(t^2)$$

dove, seguendo la stessa notazione usata per definire le curve integrali, si ha:

$$x(0) = Y \quad W^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$$

Invertendo la relazione precedente si ha:

$$Y^\mu(x, t) = x^\mu - tW^\mu(x) + O(t^2)$$

Arrivati a questo punto si può definire la derivata di Lie $L_W T$ di un generico tensore T_s^r nel punto x^μ lungo il campo vettoriale W^μ :

$$L_W T = -\frac{d}{dt} \left(\tilde{\Phi}_t T \right) \Big|_{t=0} \quad (4.5)$$

La derivata di Lie soddisfa a 4 importanti proprietà:

1. $L_W T \in T_s^r$ se $T \in T_s^r$ ossia la derivata di Lie di un tensore é un tensore.
2. $L_W (T \cdot T') = (L_W T) \cdot T' + T \cdot (L_W T')$ ossia soddisfa alla regola di Leibniz.
3. L_W é una mappa lineare e preserva le contrazioni.
4. se f é un tensore di tipo T_0^0 , una funzione scalare, allora $L_W f = W^\mu \partial_\mu f$

Si può dimostrare con un calcolo diretto l'ultima proprietà scritta:

$$\begin{aligned} L_W f &= -\frac{d}{dt} (f \circ \Phi_t^{-1}) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{d}{dt} f(Y(x, t)) \Big|_{t=0} \quad (\Phi_t^{-1} : x \Rightarrow Y(x(t))) \\ &= -\frac{\partial f}{\partial Y^\alpha} \frac{\partial Y^\alpha}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \left(-\frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \right) (-W^\alpha(x)) \quad (Y^\mu(x, t) = x^\mu - tW^\mu(x)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} W^\alpha(x) \end{aligned}$$

Nel caso dei vettori il procedimento é piú complesso: intanto ricordo che $(\tilde{\Phi}_t V)(f) = V(f \circ \Phi_t)$ e che $V(x^\mu) = V^\alpha \partial_\alpha x^\mu = V^\alpha \delta_\alpha^\mu = V^\mu$. Di conseguenza $(\tilde{\Phi}_t V)^\mu = (\tilde{\Phi}_t V) x^\mu = V(x^\mu \circ \Phi_t) = V(x^\mu(Y, t)) = V^\alpha \partial_\alpha x^\mu(Y, t)$ dove si é usato che $\Phi_t : Y \rightarrow x(Y(t))$ e $V \equiv V^\alpha \partial_\alpha$. Con queste premesse posso calcolare la derivata di Lie di un generico vettore rispetto ad un campo vettoriale W :

$$\begin{aligned} L_W V^\mu &= -\frac{d}{dt} \left(V^\alpha(Y) \frac{\partial x^\mu(Y, t)}{\partial Y^\alpha} \right) \Big|_{t=0} \\ &= -\frac{\partial Y^\beta}{\partial t} \frac{\partial V^\alpha}{\partial Y^\beta} \Big|_{t=0} \cdot \frac{\partial x^\mu}{\partial Y^\alpha} \Big|_{t=0} - V^\alpha(Y) \partial_\alpha W^\mu \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio deriva dal seguente fatto:

$$x^\mu(Y, t) = Y^\mu + tW^\mu(x(0)) \Rightarrow \frac{\partial x^\mu}{\partial Y^\alpha} = \frac{\partial W^\mu}{\partial x^\alpha} t$$

Ricordando che

$$Y^\mu(x, t) = x^\mu - tW^\mu(x) + O(t^2) \Rightarrow \frac{\partial Y^\beta}{\partial t} = -W^\beta$$

e che

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial Y^\alpha} \Big|_{t=0} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\mu$$

Alla fine mettendo tutto insieme si ottiene:

$$L_W V^\mu = W^\alpha \partial_\alpha V^\mu - V^\alpha \partial_\alpha W^\mu = [V, W]^\mu = -[W, V]^\mu = -L_V W^\mu$$

dove si é introdotta la notazione con i piú familiari commutatori.

Per ricavare la derivata di Lie di una 1-forma opero nel seguente modo: $\omega_\mu V^\mu$ é uno scalare per cui vale:

$$L_W \omega_\mu V^\mu = W^\alpha \partial_\alpha (\omega_\mu V^\mu)$$

ma sfruttando la regola di Leibniz vale anche:

$$L_W \omega_\mu V^\mu = (L_W \omega_\mu) V^\mu + \omega_\mu (L_W V^\mu)$$

e uguagliando le due espressioni, avendo già calcolato $L_W V^\mu$ trovo:

$$L_W \omega_\mu = W^\alpha (\partial_\alpha \omega_\mu) + (\partial_\mu W^\alpha) \omega_\alpha$$

Visto questo la generalizzazione ad un tensore di rango qualsiasi é piuttosto diretta. Visto che é utile riassumo le derivate di Lie di tensori a 0, 1, 2 indici:

f scalare	$L_W f = W^\mu \partial_\mu f$
V^α vettore	$L_W V^\alpha = W^\mu \partial_\mu V^\alpha - V^\mu (\partial_\mu W^\alpha)$
V_α 1-forma	$L_W V_\alpha = W^\mu \partial_\mu V_\alpha + (\partial_\alpha W^\mu) V_\mu$
$g_{\mu\nu}$ tensore (0, 2)	$L_W g_{\mu\nu} = W^\alpha \partial_\alpha g_{\mu\nu} + (\partial_\mu W^\alpha) g_{\alpha\nu} + (\partial_\nu W^\alpha) g_{\mu\alpha}$
g_μ^ν tensore (1, 1)	$L_W g_\mu^\nu = W^\alpha \partial_\alpha g_\mu^\nu + (\partial_\mu W^\alpha) g_\alpha^\nu - g_\mu^\alpha (\partial_\alpha W^\nu)$
$g^{\mu\nu}$ tensore (2, 0)	$L_W g^{\mu\nu} = W^\alpha \partial_\alpha g^{\mu\nu} - g^{\alpha\nu} (\partial_\alpha W^\mu) - g^{\mu\alpha} (\partial_\alpha W^\nu)$

Se si é dato cosí tanto spazio alle derivate di Lie é per la loro connessione con i diffeomorfismi infinitesimi: considero un cambiamento *infinitesimo* di coordinate:

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

Indico con $\delta_\epsilon T_s^r(x)$ la trasformazione infinitesima di un tensore in seguito al cambiamento infinitesimo di coordinate scritto sopra, ossia:

$$\delta_\epsilon T_s^r(x) \equiv T_s'^r(x) - T_s^r(x)$$

dove si considerano solo termini *lineari* in ϵ (considero cambiamenti infinitesimi). La connessione con le derivate di Lie é espressa dal seguente teorema:

$$\delta_\epsilon T_s^r(x) = -L_\epsilon T_s^r(x) \tag{4.6}$$

Non si dará una dimostrazione generale del teorema ma ci si limiterá a verificarlo nei casi piú semplici.

- funzioni scalari:

$$f'(x') = f(x) \rightarrow f'(x + \epsilon) = f(x) \Rightarrow f'(x) + \epsilon^\alpha \partial_\alpha f'(x) + O(\epsilon^2) = f(x)$$

per cui si ha

$$\delta_\epsilon f = f'(x) - f(x) = -\epsilon^\alpha \partial_\alpha f = -L_\epsilon f$$

- vettori:

$$V'^{\mu}(x') = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} V^{\alpha}(x) \quad x' = x + \epsilon$$

da cui, sviluppando in serie di Taylor

$$V'^{\mu}(x+\epsilon) = V'^{\mu}(x) + \epsilon^{\alpha} \partial_{\alpha} V^{\mu}(x) = \frac{\partial(x+\epsilon)}{\partial x^{\alpha}} V^{\alpha}(x) = [\partial_{\alpha}(x^{\mu} + \epsilon^{\mu})] V^{\alpha} = \underbrace{\delta_{\alpha}^{\mu}}_{V^{\mu}} V^{\alpha} + \partial_{\alpha} \epsilon^{\mu} V^{\alpha}$$

per cui si ha:

$$\delta_{\epsilon} V^{\mu} = V'^{\mu}(x) - V^{\mu}(x) = -\epsilon^{\alpha} \partial_{\alpha} V^{\mu} + V^{\alpha} \partial_{\alpha} \epsilon^{\mu} = -L_{\epsilon} V^{\mu}$$

- 1-forme: si usa il metodo seguito prima per ricavare la derivata di Lie di una 1-forma: la combinazione $\omega_{\alpha} V^{\alpha}$ é uno scalare per cui $\delta_{\epsilon}(\omega_{\alpha} V^{\alpha}) = -L_{\epsilon}(\omega_{\alpha} V^{\alpha})$ e vale anche la regola di Leibniz. Alla fine si ottiene

$$\delta_{\epsilon} \omega_{\alpha} = -L_{\epsilon} \omega_{\alpha}$$

- tensori di rango superiore: se volessi trovare $\delta_{\epsilon}(T_{\nu}^{\mu})$ allora costruisco lo scalare $T_{\nu}^{\mu} \omega_{\mu} V^{\nu}$ di cui conosco la variazione e confrontando con lo sviluppo dato dalla regola di Leibniz (conosco tutti i pezzi a parte $\delta_{\epsilon} T_{\nu}^{\mu}$) ricavo il risultato cercato. In questo modo posso verificare il teorema suddetto per ogni caso (anche se si farebbe prima a dimostrarlo in generale).

Prima di concludere questa sezione enuncio alcuni risultati significativi:

- L_{ϵ} é il generatore del gruppo dei diffeomorfismi.
- se considero i commutatori si ha:

$$[L_{\epsilon}, L_{\epsilon'}] = L_{[\epsilon, \epsilon']}$$

- gli L_{ϵ} formano un'algebra di Lie infinito-dimensionale.
- la derivata di Lie é un operatore covariante: da un tensore ne ottengo un altro dello stesso rango.

Come detto precedentemente si possono definire due derivazioni che non necessitano della metrica: in questa sezione se é discussa la derivata di Lie, nella prossima si vedrá l'operatore differenziale “ d ”, definito sulle k -forme.

4.4 L'operatore differenziale “ d ”

Si definisce in operatore differenziale “ d ” che agisce sulle k -forme:

$$d : \Lambda_k \rightarrow \Lambda_{k+1}$$

$$\omega_k \rightarrow d\omega_k$$

dove $\omega_k \in \Lambda_k$ e $\omega_{k+1} \in \Lambda_{k+1}$. In generale una k -forma ω_k ha la seguente forma:

$$\omega_k = \frac{1}{k!} dx^{\mu_1 \dots \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}$$

L'operatore differenziale $d \equiv dx^\alpha \partial_\alpha$ agisce, per definizione, nel seguente modo:

$$d\omega_k = \frac{1}{k!} dx^{\mu_1 \dots \mu_k} \underbrace{dx^{\mu_{k+1}} \partial_{[\mu_{k+1}}}_{d} \omega_{\mu_k \dots \mu_1]}$$

Per come é definito l'operatore “ d ” soddisfa le seguenti proprietá:

- “ d ” lineare
- $d^2 = 0$ poiché le derivate commutano cioè $\partial_{[\mu} \partial_{\nu]} = 0$
- $d(\omega_k \Phi_m) = \omega_k d\Phi_m + (-1)^m (d\omega_k) \Phi_m$ con $\omega_k \in \Lambda_k, \Phi_m \in \Lambda_m$

Puó essere utile verificare l'ultima proprietá con un esempio: se f é una funzione scalare (una zero forma) e Φ_1 é una 1-forma si ha:

$$\begin{aligned} d(f\Phi_1) &= d(f(x)dx^\alpha \Phi_\alpha) \quad (\text{definizione di 1 - forma}) \\ &= d(dx^\alpha f \Phi_\alpha) = dx^\alpha dx^\beta \partial_{[\beta} (f \Phi_{\alpha]}) \quad (\text{definizione di } d) \\ &= dx^\alpha dx^\beta [(\partial_{[\beta} f) \Phi_{\alpha]} + f (\partial_{[\beta} \Phi_{\alpha]})] \quad (\text{regola di Leibniz}) \\ &= - \left(dx^\beta \partial_\beta f \right) dx^\alpha \Phi_\alpha + f dx^\alpha dx^\beta \partial_\beta \Phi_\alpha \quad (\text{algebra dei differenziali}) \\ &= -df\Phi_1 + f d\Phi_1 \end{aligned}$$

poiché $d = dx^\beta \partial_\beta$ e $\Phi_1 = dx^\alpha \Phi_\alpha$. Infine c'è un'ultima proprietá importante di “ d ”: se $\omega_k \in \Lambda_k$, ossia ω_k é un tensore di rango $(0,k)$ allora $d\omega_k \in \Lambda_{k+1}$ ossia $d\omega_k$ é un tensore. Questa proprietá, che si puó mostrare con un calcolo diretto, deriva dall'antisimmetria che introduce il differenziale che agisce sulle k -forme. Nella prossima sottosezione si tratterá brevemente dell'integrazione invariante delle k -forme, ma prima é utile ricordare alcune definizioni e alcune proprietá della k -forme.

- ω é una forma chiusa se vale $d\omega = 0$ il che significa che si ha uguaglianza delle derivate miste, visto che il differenziale antisimmetrizza una k -forma.
- ω é una forma esatta se $\omega = d\Phi$ ossia se esiste una forma Φ che, differenziata, dia ω .
- ogni forma esatta é chiusa poiché si é visto che $d^2 = 0$
- ogni forma chiusa é localmente esatta.

4.4.1 Integrazione invariante

Considero una D -forma ω_D : per sua definizione sará

$$\int \omega_D = \frac{1}{D!} \int dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_D} \omega_{\mu_D \dots \mu_1}(x)$$

Si pone per definizione peró:

$$\int \omega_D \equiv \frac{1}{D!} \int \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \omega_{\mu_D \dots \mu_1}(x) d^D x \quad (4.7)$$

Dove si é introdotto il tensore totalmente antisimmetrico a D indici $\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D}$. Si può vedere che (4.7) é invariante per diffeomorfismi:

$$\left(\int \omega_D \right)' = \frac{1}{D!} \int d^D x' \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \omega'_{\mu_D \dots \mu_1}(x') = \frac{1}{D!} \int d^D x \underbrace{\left| \det \frac{\partial x'}{\partial x} \right|}_{\text{modulo}} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \underbrace{\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial x'^{\mu_D}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_D}}{\partial x'^{\mu_1}}}_{\det \frac{\partial x}{\partial x'}} \omega_{\alpha_1 \dots \alpha_D}(x)$$

Se $\det \frac{\partial x}{\partial x'} > 0$ le trasformazioni dell'elemento di volume D -dimensionale e della D -forma si elidono ottengo (4.7). Si é ottenuta l'invarianza per diffeomorfismi se é soddisfatta la condizione $\det \frac{\partial x}{\partial x'} > 0$. A tal proposito si introduce la definizione di orientabilitá di una varietá M : M si dice orientabile se $\forall U_\alpha, U_\beta$ aperti con $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ si ha $|\partial x^\alpha / \partial x'^\beta| > 0$ con x^α, x'^β coordinate su U_α, U_β . Tanto per fare un esempio, il nastro di Moebius non é orientabile.

Considero una funzione scalare $f(x)$: l'integrale

$$\int d^D x f(x)$$

non é invariante per diffeomorfismi. Questo porta ad un problema: se \mathcal{L} é una densitá di lagrangiana, che é scalare, allora

$$\int d^D x \mathcal{L}(x) \equiv I = \text{azione}$$

non é invariante per diffeomorfismi: però si richiede che l'azione sia invariante per diffeomorfismi. Di conseguenza si dovrá modificare l'espressione che dá l'azione in funzione della densitá di lagrangiana in modo da renderla invariante per diffeomorfismi. Per ottenere questo si introdurrá la metrica.

Considero la coppia (M, g) formata da una varietá riemanniana M e dalla metrica $g_{\mu\nu}(x)$, che é una matrice simmetrica che trasforma come:

$$g_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x)$$

Si sa che ogni matrice simmetrica può essere diagonalizzata ossia può essere messa nella forma

$$g_{\mu\nu} \equiv \text{diag}(g_{11} \dots g_{DD})$$

Se poi scalo le coordinate ossia $x'^\alpha = \lambda^\alpha x^\alpha$ con $\lambda^\alpha > 0$ posso mettere la metrica nella forma:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(\underbrace{1 \dots 1}_m, \underbrace{-1 \dots -1}_n \right)$$

da cui definisco la quantita $m-n$ che é detta segnatura della metrica ed é invariante su tutta la varietá. Se $D = 4$ scelgo la segnatura $(+, -, -, -)$ e la segnatura é invariante per similitudini: se ho una matrice A che ha una certa segnatura, allora la matrice OAO^T con $\det(O) \neq 0$ ha la stessa segnatura cioé ha lo stesso numero di autovalori positivi, negativi e nulli. Ora mi metto in 4D: il determinante della metrica é $\neq 0$ perché ha segnatura $(+, -, -, -)$. Definisco

$$g \equiv -\det g_{\mu\nu} > 0 \quad \text{se } D = 4$$

Sotto un diffeomorfismo di ha:

$$g'(x') = -\det g'_{\mu\nu}(x') = -\det \left(g_{\mu\nu} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 \right) = g \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2$$

Dalla relazione scritta sopra si ottiene:

$$\sqrt{g'(x')} = \sqrt{g(x)} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|$$

Ora posso risolvere il problema dell'integrazione invariante di funzioni scalari: se considero

$$\int d^D x \sqrt{g(x)} f(x)$$

dove $f(x)$ é uno scalare, vedo che ho invarianza per diffeomorfismi perché $\sqrt{g(x)}$ e $d^D x$ trasformano in modo da compensare le loro variazioni. Ora si può risolvere il problema dell'azione non invariante: se \mathcal{L} é la densità di lagrangiana allora l'azione corrispondente é

$$I = \int d^D x \sqrt{g(x)} \mathcal{L} \quad (4.8)$$

Dall'integrazione invariante si ricava anche un altro risultato: si é visto prima l'integrazione invariante per le k-forme (4.7) ma si ha anche:

$$\frac{1}{D!} \int \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D} \omega_{\mu_D \dots \mu_1}(x) d^D x = \frac{1}{D!} \int \underbrace{d^D x \sqrt{g}}_{\text{invariante}} \left[\frac{\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D}}{\sqrt{g}} \omega_{\mu_D \dots \mu_1}(x) \right]$$

Visto che il tutto deve essere invariante si ha che

$$\frac{\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_D}}{\sqrt{g}}$$

trasforma come un tensore.

Nella prossima sezione si tratterá la derivata covariante, la quale necessita della metrica per essere definita. Fin' ora si sono definite due forme di differenziazione che non necessitano della metrica: la derivata di Lie e la differenziazione sulla k-forme. Entrambi sono operatori covarianti, ossia applicati ad un tensore danno di nuovo un tensore. Si é visto che la derivata ordinaria applicata ad uno scalare dá un tensore, però, in generale, la derivata ordinaria, applicata ad un tensore, non dá un tensore. Ad esempio considero $\partial_\mu V^\alpha$. Sotto un diffeomorfismo diventa $\partial'_\mu V'^\alpha(x')$ con $V'^\alpha(x') = \partial_\beta x'^\alpha V^\beta(x)$. Mettendo insieme si nota che:

$$\partial'_\mu V'^\alpha(x') = \partial'_\mu \left(\partial_\beta x'^\alpha V^\beta(x) \right) \neq \frac{\partial x^\gamma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \partial_\gamma V^\beta$$

poiché la derivata agisce anche su $\partial_{beta} x'^\alpha$.

Lo scopo della prossima sezione sará definire una forma di derivazione covariante per diffeomorfismi: se T_s^r é un tensore di rango (r, s) cerco un operatore differenziale D_μ tale che:

$$T_s^r \rightarrow D_\mu T_s^r \in T_{s+1}^r$$

4.5 La derivata covariante

Le proprietà che si richiedono alla derivata covariante sono

1. $D_\mu T_s^r \rightarrow T_{s+1}^r$
2. D_μ lineare e rispetta le contrazioni: $(DT_\mu^\nu) \delta_\nu^\mu = D(T_\mu^\nu \delta_\nu^\mu) = D_\mu T_\mu^\mu$
3. Regola di Leibniz: $D_\mu (T \cdot T') = (D_\mu T) T' + T \cdot (D_\mu T')$
4. sugli scalari deve ridursi alla derivazione ordinaria: $D_\mu f = \partial_\mu f$

Usando le proprietà appena scritte ho:

$$\begin{aligned} D_\mu (\omega_\alpha V^\alpha) &\stackrel{4}{=} \partial_\mu (\omega_\alpha V^\alpha) = \omega_\alpha \partial_\mu V^\alpha + (\partial_\mu \omega_\alpha) V^\alpha \\ D_\mu (\omega_\alpha V^\alpha) &\stackrel{3}{=} (D_\mu \omega_\alpha) V^\alpha + \omega_\alpha (D_\mu V^\alpha) \end{aligned}$$

Confrontando le due espressioni si ha:

$$\omega_\alpha (D_\mu V^\alpha - \partial_\mu V^\alpha) = -V^\alpha (D_\mu \omega_\alpha - \partial_\mu \omega_\alpha)$$

Se ora introduco un ente a tre indici $\Gamma_{\mu\alpha}^\beta$, di cui non conosco la forma in funzione della metrica e non so nemmeno se sia o no un tensore, dalle relazioni precedenti vedo che posso caratterizzare la differenza fra la derivata covariante e quella ordinaria applicata ad un vettore o a una 1-forma:

$$\begin{aligned} D_\mu \omega_\alpha &= \partial_\mu \omega_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \omega_\beta \\ D_\mu V^\alpha &= \partial_\mu V^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha V^\beta \end{aligned}$$

Per ricavare la derivata covariante di un tensore a due indici uso il solito trucco di costruire uno scalare e derivare quello:

$$\begin{aligned} D_\mu (T_\alpha^\beta \omega_\beta V^\alpha) &\stackrel{4}{=} \partial_\mu (T_\alpha^\beta \omega_\beta V^\alpha) \\ &= (\partial_\mu T_\alpha^\beta) \omega_\beta V^\alpha + T_\alpha^\beta (\partial_\mu \omega_\beta) V^\alpha + T_\alpha^\beta \omega_\beta (\partial_\mu V^\alpha) \end{aligned}$$

però vale anche:

$$D_\mu (T_\alpha^\beta \omega_\beta V^\alpha) = (D_\mu T_\alpha^\beta) \omega_\beta V^\alpha + T_\alpha^\beta (D_\mu \omega_\beta) V^\alpha + T_\alpha^\beta \omega_\beta (D_\mu V^\alpha)$$

Confrontando le due espressioni e conoscendo la derivata covariante di vettori e 1-forme si ottiene:

$$D_\mu T_\alpha^\beta = \partial_\mu T_\alpha^\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\gamma T_\gamma^\beta + \Gamma_{\mu\gamma}^\beta T_\alpha^\gamma$$

Ora cerco di caratterizzare meglio la connessione introdotta, che ha lo scopo di “completare” la derivazione ordinaria in modo da renderla covariante. Intanto introduco il differenziale covariante: se D_μ indica la derivata covariante allora il differenziale covariante è $dx^\mu D_\mu$. Si ha quindi:

$$D\omega_\alpha = dx^\mu D_\mu \omega_\alpha = dx^\mu (\partial_\alpha \omega_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \omega_\beta) = d\omega_\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta \omega_\beta$$

dove si è introdotto

$$\Gamma_{\mu\alpha}^\beta = dx^\mu \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$$

Analogamente si otterrà

$$DV^\alpha = dV^\alpha + \Gamma^\alpha_\beta V^\beta$$

Essendo un vettore varrà

$$V'^\alpha(x') = U^\alpha_\beta V^\beta(x) \quad \text{con} \quad U^\alpha_\beta = \partial_\beta x'^\alpha$$

Per rendere piú snella la trattazione evito di scrivere gli indici e pongo:

$$V' = UV \quad DV = dV + \Gamma V \quad \Gamma \equiv \Gamma^\alpha_\beta$$

Visto che richiedo la covarianza (DV é un tensore ad un indice perché $V = V^\alpha$) impongo che:

$$(DV)' = U(DV)$$

e sviluppando il differenziale covariante si ha

$$DV' = dV' + \Gamma'V' = U(DV) = U(dV + \Gamma V)$$

da cui, ricordando che $V' = UV$ si ottiene

$$d(UV) + \Gamma'UV = UdV + U\Gamma V \Rightarrow (dU)V + UdV + \Gamma'UV = UdV + U\Gamma V$$

da cui, semplificando V ed eliminato UdV si ottiene

$$dU + \Gamma'U = U\Gamma$$

da cui, moltiplicando a destra per U^{-1} si ottiene:

$$\Gamma' = U\Gamma U^{-1} - (dU)U^{-1} \quad (4.9)$$

Arrivati a questo punto é bene reintrodurre gli indici ed esplicitare i vari oggetti con cui si sta trattando. Intanto ricordo che

$$U \equiv U^\alpha_\beta = \partial_\beta x'^\alpha \quad (U^{-1})^\alpha_\beta = \partial_\beta x'^\alpha$$

L'equazione (4.9) significa

$$\Gamma'^\alpha_\beta = U^\alpha_\delta \Gamma^\delta_\phi U^{-1\phi}_\beta$$

ed esplicitando completamente si ha

$$dx'^\epsilon \Gamma'^\beta_{\epsilon\alpha}(x') \partial_\delta x'^\beta dx'^\mu \Gamma^\delta_{\mu\phi} \partial'_\alpha x'^\phi + \partial_\gamma x'^\beta \underbrace{dx'^\epsilon \partial'_\epsilon \partial'_\alpha x'^\gamma}_d$$

per cui, moltiplicando a sinistra per ∂'_ϵ si ha alla fine:

$$\Gamma'^\alpha_{\epsilon\beta}(x') = \partial'_\epsilon x'^\mu \partial'_\alpha x'^\phi \partial_\delta x'^\beta \Gamma^\delta_{\mu\phi} + \partial_\gamma x'^\beta \partial'_\epsilon \partial'_\alpha x'^\gamma \quad (4.10)$$

Si vede che $\Gamma^\delta_{\mu\phi}$ non trasforma come un tensore a tre indici per cui $\Gamma^\delta_{\mu\phi}$ non é un tensore e viene chiamata connessione affine. Si vede anche che $\Gamma^\delta_{\mu\phi} = \Gamma^\delta_{\phi\mu}$. Fatto questo si puó verificare che la derivata covariante applicata ad un tensore dá ancora un tensore: usando la notazione di prima considero

$$V'^\alpha = U^\alpha_\beta V^\beta \quad DV^\alpha = dx^\gamma D_\gamma V^\alpha \quad (DV^\alpha)' = U(DV^\alpha)$$

dove $D = dx^\alpha D_\alpha$ é il solito differenziale covariante ed é un invariante. Quindi vale:

$$dx'^\gamma D'_\gamma V'^\beta = dx^\gamma D_\gamma U_\epsilon^\beta V^\epsilon$$

Si é visto che i differenziali trasformano come vettori:

$$dx'^\alpha = dx^\gamma \partial_\gamma x'^\alpha$$

e sostituendo nell'equazione precedente e semplificando dx^γ si ha:

$$\partial_\gamma x'^\alpha D'_\alpha V'^\beta = \partial_\epsilon x'^\beta D_\gamma V^\epsilon$$

da cui infine

$$D'_\alpha V'^\beta = \partial_\epsilon x'^\beta \partial'_\alpha x^\gamma D_\gamma V^\epsilon$$

ossia si é visto che $D_\gamma V^\epsilon$ trasforma come un tensore con un indice in alto e uno in basso per cui é un tensore. In modo assolutamente analogo di avrá

$$D\omega_\alpha = dx^\gamma D_\gamma \omega_\alpha = d\omega_\alpha + \Gamma^\beta_\alpha \omega_\beta$$

$(D\omega_\alpha)$ trasformerá come una 1-forma:

$$(D\omega_\alpha)' = D\omega_\alpha U^{-1}$$

Nella prossima sezione si tratterá la torsione e il trasporto parallelo, i quali serviranno per definire la curvatura dello spazio ed arrivare quindi verso la visione della gravitazione raggiunta da Einstein.

4.6 Torsione e trasporto parallelo

Si é visto nella sezione precedente che $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ sono state definite connessioni in quanto, non trasformando sotto diffeomorfismi come tensori, non possono essere classificati come tali. Si vede, però, che la differenza di due connessioni é un tensore : se indico, per brevità, con $\Gamma, \tilde{\Gamma}$, due connessioni si é visto che, sotto diffeomorfismi, trasformano come:

$$\begin{aligned}\Gamma' &= U\Gamma U^{-1} - (dU)U^{-1} \\ \tilde{\Gamma}' &= U\tilde{\Gamma}U^{-1} - (dU)U^{-1}\end{aligned}$$

dove U é la solita matrice del diffeomorfismo. Se ora faccio la differenza delle due equazioni precedenti ottengo:

$$\tilde{\Gamma}' - \Gamma' = U(\tilde{\Gamma} - \Gamma)U^{-1}$$

che é il modo in cui trasforma un tensore con un indice in basso e uno il alto: ricordo che $\Gamma = dx^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\beta}$. Vale anche il viceversa: la somma di un tensore di una connessione é ancora una connessione. Dopo questa premessa puó essere definita la torsione associata a una connessione: si dice torsione associata ad una connessione la parte antisimmetrica della connessione stessa:

$$T^\alpha_{\mu\nu} = \frac{\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}}{2} = \Gamma^\alpha_{[\mu\nu]} \quad (4.11)$$

Poiché la torsione $T^\alpha_{\mu\nu}$ é definita come la differenza di due connessioni é un tensore per quanto detto prima e ricordando che vale in generale:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{(\mu\nu)} + \Gamma^\alpha_{[\mu\nu]}$$

poiché $\Gamma_{[\mu\nu]}^\alpha$ é un tensore e $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ é una connessione allora anche $\Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha$ é una connessione. Posso affermare quindi data una connessione posso sempre individuare una connessione simmetrica: basta prendere la parte simmetrica della connessione stessa, mentre la parte antisimmetrica, detta torsione, é un tensore.

Dopo questa premessa si entra nel vivo dell'argomento di questa sezione: ci si propone di legare la metrica $g_{\mu\nu}$ e la connessione $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ al concetto di trasporto parallelo, in quale é un indicazione di una *curvatura* dello spazio. Considero una curva $x^\mu(\lambda)$ e uno spazio piatto (posso pensare a una curva in un piano). In questo caso lo spazio tangente della curva, poiché coincide con il piano, é costante lungo i punti della curva. Significa che un vettore tangente V^μ rimane invariato, se trasportato parallelamente a se stesso. Di conseguenza formulo cosí la richiesta di trasporto parallelo di un vettore tangente:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu(x(\lambda)) = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda} \Big|_{x=x(\lambda)} = 0$$

Ora $\frac{\partial V^\mu}{\partial x^\alpha}$ é una derivata ordinaria e non é covariante, mentre $\frac{\partial x^\alpha}{\partial \lambda}$ é la tangente alla curva ed é covariante.

Dopo aver considerato il piano considero la sfera: ho un vettore orientato in un certo modo al polo nord e lo trasporto mantenendolo parallelo a se stesso lungo un meridiano fino all'equatore; ora lo trasporto lungo l'equatore per un tratto, mantenendolo sempre costante rispetto allo spazio tangente, e poi ritorno al polo nord lungo un'altro meridiano. Trovo in generale un vettore diverso da quello di partenza anche se non sono mai uscito dagli spazi tangenti. Questo significa che la superficie della sfera é uno spazio curvo e se faccio varie prove vedo che il vettore che ottengo dipende dal percorso che ho seguito. Per il trasporto parallelo lungo una curva γ , parametrizzata da $x^\mu(s)$ e dato un generico tensore T_s^r , vale l'equazione:

$$\frac{d}{ds} T_s^r(x(s)) \equiv \frac{dx^\alpha}{ds} D_\alpha T_s^r = 0$$

Si richiede la costanza degli scalari trasportati parallelamente. Inoltre si impone che la torsione associata alla connessione sia nulla ossia $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{(\mu\nu)}^\alpha$. Impongo infine che i prodotti scalari si preservino sotto trasporto parallelo lungo ogni curva e per ogni coppia di vettori.

Dopo queste imposizioni considero due vettori V^μ e W^μ trasportati parallelamente lungo γ per cui valgono:

$$\frac{dx^\alpha}{ds} D_\alpha V^\mu = \frac{dx^\alpha}{ds} D_\alpha W^\mu = 0$$

Usando questi due vettori posso costruire lo scalare $g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ per cui si avrá:

$$0 = \frac{dx^\alpha}{ds} D_\alpha (g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu) = u^\alpha [(D_\alpha g_{\mu\nu}) V^\mu W^\nu + g_{\mu\nu} (D_\alpha V^\mu) W^\nu + g_{\mu\nu} V^\mu D_\alpha W^\nu]$$

Ma V^μ e W^ν sono trasportati parallelamente ossia

$$u^\alpha D_\alpha V^\mu = u^\alpha D_\alpha W^\mu = 0$$

ed essendo u^α, V^μ, W^ν arbitrari, se voglio la costanza di $g_{\mu\nu} V^\mu W^\nu$ sotto trasporto parallelo dovrá essere:

$$D_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \tag{4.12}$$

Si é ottenuto l'importante (e utile!) risultato che la derivata covariante della metrica é nulla e ora dimostriamo che anche $D_\alpha g^{\mu\nu} = 0$ dove di é definita la metrica inversa $g^{\mu\nu}$ che é legata a $g_{\mu\nu}$ da $g_{\mu\alpha}g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$: poiché δ_μ^ν é uno scalare vale

$$D_\beta (g_{\mu\nu}g^{\nu\alpha}) = (D_\beta g_{\mu\nu})g^{\nu\alpha} + g_{\mu\nu}D_\beta g^{\nu\alpha}$$

Ma il primo pezzo é nullo poiché $D_\beta g_{\mu\nu}$ é nullo e nel secondo posso prima fare le contrazioni e poi calcolare la derivata covariante di ciò che ottengo (la derivata covariante commuta con le contrazioni) per cui si ha:

$$g_{\mu\nu}D_\beta g^{\nu\alpha} = D_\beta \delta_\mu^\alpha = \partial_\beta \delta_\mu^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \delta_\mu^\gamma - \Gamma_{\beta\mu}^\epsilon \delta_\epsilon^\alpha = \Gamma_{\beta\mu}^\alpha - \Gamma_{\beta\mu}^\alpha = 0$$

Ora si potrebbero legare la derivata covariante e quella ordinaria per vedere come si può esprimere la connessione in funzione della metrica, e con artifici simili a quelli usati nel capitolo sul principio di equavalenza, alla fine si arriva alla definizione di connessione metrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2}g^{\alpha\gamma} (\partial_\mu g_{\nu\gamma} + \partial_\nu g_{\mu\gamma} - \partial_\gamma g_{\mu\nu}) \quad (4.13)$$

Dopo aver introdotto e caratterizzato il trasporto parallelo si può dare la definizione di geodetica: una curva $x^\mu(s)$ si dice geodetica se il vettore tangente alla stessa é trasportato parallelamente. Di conseguenza per una geodetica vale l'equazione

$$\frac{dx^\alpha}{ds} D_\alpha u^\beta = 0 \quad u^\beta = \frac{dx^\beta}{ds} \quad (4.14)$$

Esplicitando la derivata covariante si ha:

$$\frac{du^\beta}{ds} + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\alpha u^\gamma = 0$$

e le condizioni iniziali per definire la curva saranno $x^\mu(0) = x_0^\mu, u^\mu(0) = u_0^\mu$. Inoltre, come si era già visto nel capitolo sulla relatività ristretta

$$u_0^\mu u_0^\nu g_{\mu\nu}(x_0) = 1$$

se ho una particella massiva, mentre per un fotone vale

$$u_0^\mu u_0^\nu g_{\mu\nu} = 0$$

Se poi mi metto in un sistema localmente inerziale in x_0 allora si avrà:

$$g_{\mu\nu}(x_0) = \eta_{\mu\nu} \quad \Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x_0) = 0$$

Si ricorda, infine, che $\partial_\alpha g_{\beta\gamma}$ non é un tensore e che $D_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$. Nella prossima sezione si definirá la curvatura in modo analogo a quanto si era fatto nel trattare le teorie di Jang-Mills, ossia come un commutatore di derivate covarianti.

4.7 Il tensore di curvatura

Considero l'azione del differenziale covariante $D = dx^\mu D_\mu$ su k-forme che hanno anche indici esterni non antisimmetrizzati:

$$\phi_k^{\mu_1 \dots}{}_{\nu_1 \dots} = \frac{1}{k!} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_k} \phi_{\alpha_k \dots \alpha_1}^{\mu_1 \dots}$$

dove gli indici $\alpha_k \dots \alpha_1$ saranno antisimmetrizzati sotto l'azione del differenziale covariante, mentre il differenziale non agir  sui restanti indici:

$$D\phi_k^{\mu_1 \dots}{}_{\nu_1 \dots} = \frac{1}{k!} dx^{\alpha_1} \dots dx^{\alpha_k} D_{[\gamma} \phi_{\alpha_k \dots \alpha_1]}^{\mu_1 \dots}$$

Ora noto il seguente fatto: se sviluppo il differenziale covariante applicato a degli indici antisimmetrizzati ottengo:

$$\partial_\gamma \phi_{\alpha_k \dots \alpha_1} + \Gamma_{[\gamma \alpha_k]} \phi + \dots$$

ma i termini in Γ danno zero poich  ho imposto che la connessione sia simmetrica, ossia $\Gamma_{[\gamma \alpha_k]} = 0$. Alla fine, per quanto riguarda la derivazione covariante, contribuiscono solo gli indici sparsi ossia

$$D\phi_\mu^\nu = d\phi_\mu^\nu + \Gamma^\nu{}_\beta \phi_\mu^\beta - \Gamma^\beta{}_\mu \phi_\beta^\nu$$

dove $\Gamma^\nu{}_\beta = dx^\delta \Gamma_{\delta\beta}^\nu$.

Considero ora un vettore V^μ , che posso considerare come una 0-forma con un indice libero in alto. Di conseguenza DDV^μ   una 2-forma con un indice libero in alto. Calcolo ora DDV^μ :

$$\begin{aligned} DDV^\mu &= D(dx^\rho \partial_\rho V^\mu) = D(dV^\mu + \Gamma_\alpha^\mu V^\alpha) \\ &= d(dV^\mu + \Gamma_\alpha^\mu V^\alpha) + \Gamma_\beta^\mu (dV^\beta - \Gamma_\alpha^\beta V^\alpha) \\ &= \Gamma_\alpha^\mu dV^\alpha + d\Gamma_\alpha^\mu V^\alpha - \Gamma_\beta^\mu dV^\beta - \Gamma_\beta^\mu \Gamma_\alpha^\beta V^\alpha \\ &= \left(d\Gamma_\alpha^\mu - \Gamma_\beta^\mu \Gamma_\alpha^\beta \right) V^\alpha \end{aligned}$$

dove il segno "−" nella seconda riga deriva dall'anticommutazione del differenziale, si   usato il fatto che $ddV^\mu = 0$ e nella terza riga si   usata la regola di Leibniz. Ci  che conta   che   stata definita la 2-forma di curvatura, la quale   un tensore:

$$R_\nu^\mu = d\Gamma_\nu^\mu - \Gamma_\beta^\mu \Gamma_\nu^\beta \quad (4.15)$$

Essendo una 2-forma in generale la si pu  scrivere come:

$$R_\nu^\mu = \frac{1}{2} dx^\rho dx^\sigma R_{\nu\rho\sigma}^\mu \quad (4.16)$$

dove   stato definito il tensore di curvatura di Riemann $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$. Ora cerco di esprimere il tensore di Riemann $R_{\nu\rho\sigma}^\mu$ in funzione della connessione affine e per far ci  esplicito (4.15):

$$\begin{aligned} R_\nu^\mu &= d(dx^\rho \Gamma_{\rho\nu}^\mu) - dx^\rho \Gamma_{\rho\beta}^\mu dx^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \\ &= dx^\rho dx^\sigma \partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu + dx^\rho dx^\sigma \Gamma_{\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\sigma\nu}^\beta \end{aligned}$$

per cui, ricordando che il differenziale antisimmetrizza in ρ e σ si ha:

$$R_{\nu\sigma\rho}^\mu = 2 \left(\partial_\sigma \Gamma_{\rho\nu}^\mu - \Gamma_{[\sigma\beta}^\mu \Gamma_{\rho]\nu}^\beta \right)$$

ed essendo un tensore é covariante. In particolare, se é nullo in un sistema di riferimento, é nullo in tutti i sistemi di riferimento. Riassumendo posso scrivere

$$DDV^\mu = R_\nu^\mu V^\nu = \frac{1}{2} dx^\rho dx^\sigma R_{\nu\sigma\rho}^\mu V^\nu = dx^\rho dx^\sigma D_{[\sigma} D_{\rho]} V^\mu$$

per cui posso caratterizzare il tensore di curvatura nei seguenti termini:

$$R_{\nu\sigma\rho}^\mu = [D_\sigma, D_\rho] \quad (4.17)$$

4.7.1 Proprietá del tensore di Riemann

Vale innanzitutto l'identitá di Bianchi: $DR_\nu^\mu = 0$

Per quanto riguarda le simmetrie per scambio di indici si ha, a partire dalla sua definizione:

- $R_{\sigma\mu\nu}^\rho = -R_{\sigma\nu\mu}^\rho$
- $R_{\mu\nu\sigma\rho} = g_{\mu\alpha} R_{\nu\sigma\rho}^\alpha = -R_{\sigma\rho\nu\mu}$
- $R_{\delta[\sigma\mu\nu]} = 0$
- $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\sigma\rho\mu\nu}$
- $R_{(\alpha\beta)\mu\nu} = 0$

Tutte queste proprietá possono essere piú o meno verificate facilmente. In particolare l'identitá di Bianchi si presta ad analogia con argomenti visti in precedenza. L'identitá di Bianchi $DR_\nu^\mu = 0$ si puó mettere nella forma

$$D_{[\alpha} R_{\beta\gamma]}^\mu = 0$$

dove l'antisimmetrizzazione degli indici deriva dai differenziali coinvolti. L'equazione appena scritta é analoga all'equazione di Maxwell $\partial_\alpha F_{\beta\gamma}$ e all'equazione $\Delta_{[\alpha} F_{\beta\gamma]}$ che é l'identitá di Bianchi nelle teorie di Yang-Mills. Inoltre $F_{\mu\nu}$ era stato definito curvatura (commutatore di derivate covarianti) associata alla connessione A^μ che definiva la derivata covariante. Una differenza importante che si nota fra le teorie di Yang-Mills esposte precedentemente e la relativitá generale é la seguente: in Yang-Mills la connessione é fondamentale (non é definita in termini di altro) mentre in relativitá generale la connessione deriva dalla metrica. A partire dal tensore di Riemann si definiscono il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura: il tensore di Ricci é $R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu$ e per la proprietá del tensore di Riemann si ha $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. Contraendo con la metrica si ottiene lo scalare di curvatura R : $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$. Considerando le proprietá di antisimmetria del tensore di Riemann posso esplicitare l'identitá di Bianchi nel seguente modo:

$$D_\alpha R_{\beta\gamma\mu\nu} + D_\beta R_{\gamma\alpha\mu\nu} + D_\gamma R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$$

Ora moltiplico a sinistra per $g^{\alpha\mu}$ ricordando che la derivata covariante non agisce sulla metrica (agisce e dá zero per cui posso considerare la metrica come una costante rispetto a questo tipo di derivazione) per cui ottengo:

$$D_\alpha R_{\beta\gamma}^\alpha{}_\nu - D_\beta R_{\alpha\nu} + D_\gamma R_{\beta\nu} = 0$$

Con le stesse indicazioni di prima moltiplico contraggo a sinistra con $g^{\beta\nu}$ ottenendo

$$-D_\alpha R_\gamma^\alpha - D_\alpha R_\gamma^\alpha + D_\gamma R = 0 \Rightarrow D_\alpha \left[R^{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} R \right] = 0$$

dove l'ultima equazione é l'identitá di Bianchi contratta due volte. Posso definire il tensore, $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - 1/2g^{\mu\nu}R$ e tale tensore avrá per costruzione derivata covariante nulla. L'importanza di questo tensore, detto tensore di Einstein, é che entrerà nelle equazioni che descrivono il campo gravitazionale. Prima di passare a trattare la deviazione geodetica é opportuno puntualizzare alcune proprietá del tensore di Riemann:

- $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ é l'unico tensore che si può formare con $g_{\mu\nu}, \partial_\alpha g_{\mu\nu}, \partial_\alpha \partial_\beta$ che sia lineare nelle derivate seconde.
- Per come é definito $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ misura la non-commutativitá delle derivate seconde.
- Infine una varietá metrica (M, g) si dice *piatta* se $R_{\mu\nu\alpha\beta} = 0$.

4.7.2 Deviazione geodetica

La deviazione geodetica consiste nell'allontanamento fra due geodetiche (due particelle che seguono due geodetiche distinte, ossia sono in caduta libera, ma vicine e si vedono allontanarsi una dall'altra) ed é legato al tensore di Riemann. Fisicamente l'allontanamento é dovuto ad un campo gravitazionale non uniforme. La deviazione geodetica é legata al trasporto parallelo. Ricordo che, data una curva γ parametrizzata da un parametro λ ossia le coordinate sulla curva sono $x^\mu(\lambda)$ vale

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu u^\alpha V^\beta = 0$$

dove V^μ é un vettore trasportato parallelamente. Ora introduco il connettore $W_\beta^\alpha(\lambda)$ che dipenderá dalla curva γ e dagli estremi della curva P_i, P_f che considero. Il connettore *non* é un tensore e richiedo che valga

$$\frac{dW_\beta^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = -u^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha W_\beta^\phi(\lambda)$$

dove $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ é la solita 4-velocitá. $W_\beta^\alpha(\lambda)$ dovrá soddisfare le seguenti richieste:

- $W_\beta^\alpha(\lambda) = \delta_\beta^\alpha$
- $W_\beta^\alpha(\lambda)V^\beta(0) = V^\alpha(\lambda)$

Infatti, in questo modo si preserva l'equazione del trasporto parallelo: dato V^μ vettore tangente della geodetica, e quindi trasportato parallelamente, si ha

$$\frac{dV^\alpha}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} (W_\beta^\alpha(\lambda)) V^\beta(0) = -u^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha W_\beta^\phi(\lambda) V^\beta(0) = -u^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha V^\phi$$

Dalla definizione di connettore ho una soluzione implicita nella forma

$$W_\beta^\alpha(\lambda) = \delta_\beta^\alpha - \int_{0, \gamma}^\lambda \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha W_\beta^\phi$$

dove $\Gamma_{\gamma\phi}^\alpha = dx^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha = u^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha d\lambda$.

Ora considero il trasporto parallelo lungo una curva chiusa infinitesima (mi interessa vedere se il vettore tangente dopo aver fatto un giro completo é lo stesso di prima o no) per cui l'equazione di partenza é:

$$W_\beta^\alpha(c) = \delta_\beta^\alpha - \oint_c dx^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha W_\beta^\phi$$

Poiché sto considerando una curva infinitesima espando al primo ordine la connessione affine e il connettore attorno ad un punto di partenza x_0 per cui $W_\beta^\alpha(x_0) = \delta_\beta^\alpha$. Gli sviluppi saranno:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\gamma\phi}^\alpha(x) &= \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha(x_0) + (x - x_0)^\delta \partial_\delta \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha(x_0) \\ W_\beta^\alpha(x) &= \delta_\beta^\alpha + (x - x_0)^\delta \Gamma_{\delta\beta}^\alpha(x_0)\end{aligned}$$

Nell'integrale compare

$$\Gamma_\phi^\alpha(x) W_\beta^\phi(x) = dx^\gamma \left(\Gamma_{\gamma\phi}^\alpha(x_0) + (x - x_0)^\delta \partial_\delta \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha(x_0) \right) \left(\delta_\beta^\alpha + (x - x_0)^\delta \Gamma_{\delta\beta}^\alpha(x_0) \right)$$

ma gli unici termini che danno contributo sono il primo per il quarto e il secondo per il terzo: il primo per il terzo é costante e integrato su un circuito dá zero mentre il secondo per il quarto é di ordine due in $(x - x_0)$ e integrato diventerebbe di ordine 3. Poiché sto considerando una curva infinitesima mi fermo all'ordine due nell'integrale che significa ordine 1 nell'integrando. Mettendo tutto insieme si ha:

$$W_\beta^\alpha(c) = \delta_\beta^\alpha - \oint_c dx^\gamma (x - x_0)^\delta \left[\partial_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha(x_0) - \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha(x_0) \Gamma_{\delta\beta}^\phi(x_0) \right]$$

Analogamente a prima il pezzo in x^0 non contribuisce perché é costante (la parentesi quadra é una costante). Alla fine, integrando per parti e definendo le aree direzionate associate alla curva chiusa $s^{\delta\phi}$:

$$s^{\delta\phi} = \oint dx^\delta dx^\phi = -s^{\phi\delta}$$

si ottiene la relazione che lega il trasporto parallelo al tensore di Riemann (nella parentesi quadra compare il tensore di Riemann):

$$\Delta V^\alpha = V^\alpha(0^+) - V^\alpha(0^-) = \frac{1}{2} R_{\beta\gamma\delta}^\alpha s^{\gamma\delta} V^\beta(0) \quad (4.18)$$

Al di lá della dimostrazione che é obiettivamente nebulosa e lacunosa nelle spiegazioni ciò che conta é l'aver legato il trasporto parallelo lungo un percorso chiuso al tensore di Riemann: se il tensore di Riemann é nullo allora un vettore trasportato parallelamente lungo un percorso chiuso dopo un giro completo non é mutato. Piú precisamente, se $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ allora il connettore $W_\beta^\alpha(c) = \delta_\beta^\alpha$ per un circuito infinitesimo e questo risultato puó essere esteso ad un circuito finito. Analogamente ai ragionamenti che si fanno in meccanica sul potenziale derivante da una forza conservativa si puó caratterizzare questa condizione dicendo che il valore del connettore non dipende dalla curva ma solo dagli estremi ossia $W_\beta^\alpha(\gamma, ; p_i p_f) = W_\beta^\alpha(p_i p_f)$. Ricordando l'equazione cui soddisfa il connettore:

$$\frac{dW_\beta^\alpha(\lambda)}{d\lambda} = -u^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha W_\beta^\phi(\lambda) \Rightarrow \partial_\gamma W_\beta^\gamma u^\alpha = -u^\gamma \Gamma_{\gamma\phi}^\alpha W_\beta^\phi \quad \forall u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds}$$

da cui, usando $d = dx^\alpha \partial_\alpha$ e $\Gamma^\alpha_\gamma = dx^\beta \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, semplificando u^α posso scrivere

$$dW_\beta^\alpha = -\Gamma^\alpha_\phi W_\beta^\phi$$

da cui, invertendo le relazioni scrivo simbolicamente

$$\Gamma = -(dW) W^{-1}$$

Arrivati a questo punto, prima di passare ai postulati e alle simmetrie della relativitá generale, restano da vedere le caratterizzazioni equivalenti di spazio piatto.

4.7.3 Definizioni di spazio piatto

Daremo 5 modi diversi di definire uno spazio piatto e mostreremo che le 5 definizioni date sono equivalenti, nel senso che si può passare da una all'altra. Le definizioni sono:

1. $R^\mu_{\nu\alpha\beta} = 0$
2. Esiste una matrice di diffeomorfismo u^α_β tale che $\Gamma \equiv \Gamma^\alpha_\beta = -(dW)W^{-1}$
3. Il trasporto parallelo di un vettore tangente lungo un circuito chiuso è l'identità.
4. Il trasporto parallelo dipende solo dagli estremi.
5. Esiste un riferimento $\{x^\mu\}$ dove $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ globalmente

Ora cominciamo con le varie implicazioni:

- $1 \Rightarrow 2$: è stato visto poco sopra.
- $2 \Rightarrow 1$: senza scrivere tanti indici si che il tensore di Riemann è del tipo $R = d\Gamma - \Gamma\Gamma$ con $\Gamma = -(dU)U^{-1}$ e si ottiene $R = 0$
- $1 \Rightarrow 3$: basta sostituire $R = 0$ nella formula che lega il trasporto parallelo al tensore di Riemann.
- La condizione tre significa che vale l'equazione della geodetica $u^\gamma D_\gamma V^\alpha$ però u^α è arbitrario da cui $D_\gamma V^\alpha = 0 \Rightarrow D_{[\delta} D_{\gamma]} V^\alpha = R_{\delta\gamma}{}^\alpha{}_\beta V^\beta = 0$ e dovendo valere per ogni V^β si deve avere $R_{\delta\gamma}{}^\alpha{}_\beta = 0$.
- È banale vedere l'equivalenza fra 3 e 4.
- $5 \Rightarrow 1$: Se $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Gamma = 0 \Rightarrow R = d\Gamma - \Gamma\Gamma = 0$
- Resterebbero da vedere le implicazioni fra 2 e 5 ma vengono omesse per brevità (sono più complesse di quelle viste qui)

Comunque alla fine l'importante è ricordarsi come si può caratterizzare uno spazio piatto. Nella prossima sezione vedremo i postulati della relatività generale per poi passare ai vettori di Killing che sono legati alle simmetrie in relatività generale.

4.8 Postulati della relatività generale

Si richiede che siano soddisfatti i seguenti postulati:

1. Causalità.
2. Conservazione del tensore energia-impulso.
3. Eq. di Einstein: dinamica di $g_{\mu\nu}$.

Vediamo brevemente il punto 2: si richiede che le equazioni del moto di tutti i campi di materia (tranne $g_{\mu\nu}$) siano tali che esiste un tensore doppio $T^{\mu\nu}$ che è covariantemente conservato ossia $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. $T^{\mu\nu}$ sarà diverso da zero solo nei punti dove c'è materia o ci sono campi non nulli.

Ora passiamo al punto 1 la cui trattazione è più complessa. Infatti dividiamo la trattazione in tre parti:

- Causalit  locale
- Orientabilit  del tempo
- Principio di causalit  globale

Cominciamo con la causalit  locale. Asserisco che un segnale pu  congiungere due punti P e Q \Leftrightarrow esiste una curva $x^\mu(\lambda)$ riscalata in modo che $x^\mu(0) = P$ e $x^\mu(1) = Q$ che sia una curva *causale*: il vettore tangente $u^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ deve soddisfare due requisiti:

1. $u^\mu \neq 0 \forall \lambda$
2. $u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} \geq 0 \forall \lambda$

Data una curva $x^\mu(\lambda)$ che va da P a Q (posso pensare ad una linea curva disegnata su un piano) e dato un punto $P'(\lambda)$ tra P e Q so che esiste un riferimento localmente inerziale in P' di coordinate ξ^α e vale la seguente trasformazione di coordinate:

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial \lambda} \quad \text{con} \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} \quad \text{diffeomorfismo} \quad \Rightarrow \det \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^\beta} \neq 0$$

mentre $\partial \xi^\beta / \partial \lambda = \tilde{u}^\beta \neq 0$   la 4-velocit  nel riferimento localmente inerziale. Ora noto che vale

$$dx^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} d\lambda = u^\mu d\lambda$$

per cui il 4-intervallo posso scriverlo come:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu} = u^\mu u^\nu g_{\mu\nu} (d\lambda)^2$$

mentre nel riferimento localmente inerziale di ha

$$ds^2 = d\xi^\alpha d\xi^\beta \eta_{\alpha\beta} = dt^2 \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \vec{v} < c$$

In un riferimento localmente inerziale si ha una curva causale se $\vec{v} < c$ mentre in un riferimento generale devo esaminare il segno di $u^2 = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta}$ e faccio la seguente classificazione:

- $u^2 > 0 \Rightarrow$ vettore di tipo tempo.
- $u^2 = 0 \Rightarrow$ vettore di tipo nullo.
- $u^2 < 0 \Rightarrow$ vettore di tipo spazio.
- $u^2 \geq 0 \Rightarrow$ vettore di tipo-nonspazio.

Alla fine si dice che le 4-velocit  ammesse in relativit  generale sono 4-vettori di tipo tempo.

Passo ora all'orientabilit  del tempo: considero un punto P e un vettore $u^\alpha \in T_p =$ spazio tangente in P. Divido T_p nella parte di tipo tempo, di tipo nullo e di tipo spazio secondo la classificazione data prima. Le curve causali saranno contraddistinte dall'aver $u^\alpha \neq 0$ e $u^2 > 0$. Fissato T_p considero il riferimento localmente inerziale in P con 4-velocit  \tilde{u}^α e vale $\tilde{u}^2 \geq 0$ e $\tilde{u} \neq 0$. Considero la componente \tilde{u}^0 . \tilde{u}^0 pu  essere sia positivo che negativo ma non nullo altrimenti si avrebbe $\tilde{u}^\alpha = \tilde{u}^0 - \vec{u}^2 = -\vec{u}^2 \geq 0$ da cui $\vec{u} = 0$ e quindi $\tilde{u}^\alpha = 0$ contraddicendo il fatto di avere una curva causale. Ho visto che posso separare i vettori tangenti ammessi in

base al segno di \tilde{u}^0 per cui mantenendo le corrispondenze dei segni divido T_p in due parti tra loro sconnesse:

$$\begin{cases} T_p^+ & \equiv \text{vettori diretti nel futuro} \\ T_p^- & \equiv \text{vettori diretti nel passato} \end{cases}$$

Una varietà M si dice orientabile nel tempo se si può fare un'assegnazione di T_p^+ e T_p^- su tutto M con continuità ossia se, data una curva causale é verificato il seguente fatto: se $u^\alpha(p) \in T_p^+$ allora $u^\alpha(\lambda) \in T_p^+ \forall \lambda$ e analogamente si avrà per $u^\alpha(p) \in T_p^-$. Definisco $U(p)$ l'universo di P ossia l'insieme di tutti i punti Q appartenenti ad una varietà M collegabili a P da una curva causale. Anche l'universo di P potrà essere scomposto in due parti a seconda che il vettore tangente v^α della curva causale sia in T^+ o in T^- . Più precisamente

$$U_p = U_p^+ + U_p^-, \quad Q \in U_p^\pm \text{ se } u^\alpha \in T^\pm$$

inoltre U_p^+ si definisce futuro di P e U_p^- si definisce passato di P . Si definisce anche il cono di Luce di p L_P come il bordo dell'universo di P (che é formato da futuro e passato di P). Il futuro di P consiste nell'insieme di tutti gli eventi che possono essere influenzati da P , mentre il passato di P consiste nell'insieme di tutti gli eventi che possono influenzare P . Vale la seguente proposizione: $Q \in L_p$ se e solo se Q é causalmente collegabile a P solo attraverso geodetiche di tipo nullo e tali geodetiche costituiscono L_p . Se la varietà di partenza é di dimensione D allora L_p é un'ipersuperficie di tipo nullo: ha dimensione $D - 1$ e un vettore tangente in L_p é di tipo nullo.

L'ultima parte della trattazione della causalità in relatività generale consiste nel principio di causalità globale: prima ho definito il passato e il futuro di P con U_p^+ e U_p^- e in modo che l'universo di P sia l'unione di questi due insiemi. Il principio di causalità globale consiste nel richiedere che la loro intersezione sia nulla:

$$U_p^+ \cap U_p^- = \emptyset$$

La motivazione per cui si richiede questa condizione é presto detta: se non valesse il principio di causalità globale potrei farmi una situazione di questo tipo: ho un punto P senza particolari proprietà e un punto Q che si trova sia in U_p^+ che in U_p^- . Posso connettere P e Q attraverso una curva γ^+ di tipo non spazio (ha vettore tangente $u^2 \geq 0$) diretta nel futuro perché $Q \in T_p^+$. Però posso anche collegare P e Q attraverso una curva γ^- di tipo non spazio diretta nel passato perché vale anche $Q \in T_p^-$. Noto che la curva $-\gamma^-$ é una curva di tipo non spazio e diretta nel futuro, poiché si invertono i segni dei vettori tangenti e in particolare della componente zero. Costruisco la curva composta

$$\gamma \equiv \gamma^+ \circ (-\gamma^-)$$

che risulta una curva di tipo non spazio e diretta nel futuro cioè é una curva causale. Ma una curva del genere mi permetterebbe viaggi nel tempo perché mi permette di andare da P a P viaggiando nel futuro. Questa situazione nasce dalla contemporanea esistenza del punto Q sia in U_p^+ che in U_p^- per cui escludo questa situazione e posso formulare il principio di causalità globale nella seguente forma equivalente: richiedo che non possano esistere curve chiuse di tipo non spazio.

Per quanto riguarda i postulati della relatività quanto detto basta, ma prima di passare ai vettori di Killing diamo una caratterizzazione delle ipersuferfici di una varietà. Le ipersuferfici di una varietà M di dimensione D sono sottovarietà di dimensione $D - 1$ e le chiamo Σ . Posso definire un'ipersuferficie dando un vincolo in D coordinate, riducendomi quindi a $D - 1$

dimensioni: $\Sigma \equiv \varphi(x) = 0$. Considero ora lo spazio tangente T_p^Σ dell'ipersuperficie nel punto P. T_p^Σ ha dimensione $D - 1$ come l'ipersuperficie ed é definito come l'insieme dei vettori tangenti a curve di Σ . Data una curva $x(s) \in \Sigma$ si ha $\varphi(x(s)) = 0$ da cui, derivando:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial s} \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = 0$$

Posso interpretare l'equazione scritta sopra come un prodotto scalare fra i due vettori (anzi, uno é un covettore) $\partial x^\alpha / \partial s$ e $\partial_\alpha \varphi$. Poiché $\partial x^\alpha / \partial s$ é la tangente alla curva e il prodotto scalare con $\partial_\alpha \varphi$ é nullo significa che $\partial_\alpha \varphi \equiv n_\alpha$ é la normale alla varietá. Alla fine ho l'identificazione $V \in T_p^\Sigma \Leftrightarrow V^\mu n_\mu = 0$ con $n_\mu = \partial_\alpha \varphi$. Classifico le ipersuperfici Σ a seconda del vettore tangente n_μ :

- Σ é di tipo tempo se $n^2 < 0$ e in questo caso $V^2 \leq 0$.
- Σ é di tipo spazio se $n^2 > 0$ e in questo caso $v^2 < 0$.
- Σ é di tipo nullo se $n^2 = 0$ e in questo caso $V^2 \leq 0$.

Si puó verificare facilmente il secondo caso: n^2 é un invariante e posso calcolarlo nel sistema di riferimento che mi fa piú comodo: in un riferimento localmente inerziale $n^2 = n^\mu n^\nu \eta_{\nu\mu}$ e, se $n^2 > 0$ posso trasformarlo nella forma $n^\alpha = (1, \vec{0})$ di conseguenza $V^\alpha n_\alpha = V^0 = 0$ da cui $V^2 = V^{0^2} - \vec{V}^2 = -\vec{V}^2 < 0$. Mentre noto che su una ipersuperficie di tipo nullo ($n^2 = 0$) due punti qualsiasi possono essere collegati solo da curve di tipo spazio o nullo. Con questo la discussione sui postulati della relativitá generale é conclusa. Ora si passerá alle simmetrie in relativitá generale e all'analisi delle metriche significative in relativitá generale. Dopo di questo la parte dedicata alla geometria differenziale sará conclusa e si tornerá alla fisica con il preciso intento di ricavare le equazioni di Einstein.

4.9 Isometrie e vettori di Killing

I vettori di Killing e le isometrie sono in relazione con le simmetrie in relativitá generale e di conseguenza sono in relazione con le quantitá conservate che si ricavano con il teorema di Noether. A tal proposito é bene ricordare che, per poter estrarre quantitá conservate con il teorema di Noether, devo avere famiglie ad un parametro di trasformazione; simmetrie discreta non vanno bene. Fatta questa premessa considero in diffeomorfismo $\phi : M \rightarrow M$. tale diffeomorfismo genererá un diffeomorfismo indotto $\tilde{\phi}$ sui tensori, in particolare sulla metrica g . Se é verificata la seguente equazione:

$$\left(\tilde{\phi} g \right)_p = g_p \quad \forall p \quad (4.19)$$

allora ϕ si dice *isometra*. Poiché richiedo che (4.19) sia verificata per ogni punto P della varietá posso anche scrivere

$$\left(\tilde{\phi} g \right)_{\phi(P)} = g_{\phi(P)}$$

poiché il dominio e il codominio del diffeomorfismo ϕ coincidono. In coordinate ho le seguenti identificazioni:

$$\begin{aligned} \phi : P = x^\mu &\rightarrow \phi(P) = x'^\mu(x) \\ \tilde{\phi} : g_{\mu\nu}(P) = g_{\mu\nu}(x^\mu) &\rightarrow \tilde{\phi}(g(P)) = g'_{\mu\nu}(x^\mu) \end{aligned}$$

Quello che chiede l'equazione (4.19) é allora che:

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\mu\nu}(x')$$

dove x' é arbitrario. Ricordando come trasforma la metrica posso scrivere:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu}(x')$$

Ora si possono definire i vettori di killing: un vettore $k^\mu(x)$ si dice vettore di killing se la famiglia di diffeomorfismi ϕ_t da esso generata é una famiglia di isometrie ossia vale $\tilde{\phi}_t g = g \forall t$. Si possono caratterizzare i vettori di killing in tre modi equivalenti:

1. k^μ é vettore di Killing.
2. la derivata di Lie della metrica lungo k^μ , ossia $L_k g_{\mu\nu} = 0$
3. $D_{(\mu} k_{\nu)} = \frac{1}{2} (D_\mu k_\nu + D_\nu k_\mu) = 0$ dove D_μ é la derivata covariante.

Faremo ora vedere come i vari modi dati per caratterizzare i vettori di killing si implicano uno con l'altro. Vediamo come 1 \rightarrow 2:

$$L_k g = -\frac{d}{dt} (\tilde{\phi}_t g) \Big|_{t=0} = -\frac{d}{dt} (g) \Big|_{t=0} = 0 \quad \text{perch  vale } \tilde{\phi}_t g = g$$

Analogamente 2 \rightarrow 1:

$$\begin{aligned} L_k g &= -\frac{d}{dt} (\tilde{\phi}_t g) \Big|_{t=0} = 0 \\ \Rightarrow -\frac{d}{dt} (\tilde{\phi}_s \tilde{\phi}_t g) \Big|_{t=0} &= 0 \quad \text{poich  } \tilde{\phi}_s \text{   lineare} \\ \Rightarrow -\frac{d}{dt} (\tilde{\phi}_{t+s} g) \Big|_{t=0} &= -\frac{d}{ds} (\tilde{\phi}_{t+s} g) \Big|_{t=0} = -\frac{d}{ds} (\tilde{\phi}_s g) = 0 \end{aligned}$$

per cui $\tilde{\phi}_s$ non dipende da s ossia $\tilde{\phi}_s g = \tilde{\phi}_0 g = g$. Alla fine ho ritrovato la definizione originaria di vettore di killing. Ora resta da vedere l'equivalenza fra la definizione 2 e 3. Per far ci  é necessaria una premessa: considero un vettore V^α e la sua derivata su Lie lungo un vettore k^μ . Tale derivata di Lie é un vettore e la sua espressione esplicita é:

$$L_k V^\alpha = k^\mu \partial_\mu k^\alpha - V^\mu \partial_\mu V^\alpha$$

e definisco questa derivata di Lie $L_k(\partial)V^\alpha$. Ora definisco $L_k(D)v^\alpha$ che si ottiene sostituendo la derivata ordinaria con quella covariante:

$$L_k(D)v^\alpha = k^\mu D_\mu k^\alpha - V^\mu D_\mu V^\alpha$$

Ricordando le propriet  di covarianza della derivata di Lie, della derivata covariante, il fatto che somme e prodotto di tensori sono tensori, ne concludo che sia $L_k(\partial)V^\alpha$ che $L_k(D)v^\alpha$ sono tensori di conseguenza é un tensore anche

$$L_k(D)v^\alpha - L_k(\partial)V^\alpha$$

Si é visto che, se un tensore é nullo in un sistema di riferimento allora é nullo in ogni sistema di riferimento. La cosa interessante é che in un sistema di riferimento localmente inerziale

la derivata covariante e quella ordinaria coincidono per cui $L_k(D)v^\alpha - L_k(\partial)V^\alpha = 0$ in ogni riferimento. Questo risultato sta a dire che posso calcolare la derivata di Lie della metrica usando la derivata covariante anziché quella ordinaria e facendo così si trova:

$$L_k g_{\mu\nu} = k^\rho D_\rho g_{\mu\nu} + (D_\mu k^\rho) g_{\rho\nu} + (D_\nu k^\rho) g_{\rho\mu} = 0$$

Ricordando che la derivata covariante della metrica é nulla si ottiene

$$D_\mu k_\nu + D_\nu k_\mu = 2D_{(\mu} k_{\nu)} = 0$$

Prima di passare all'analisi di metriche fisicamente rilevanti va detto che i vettori di killing formano un'algebra di Lie. Infatti se k_1 e k_2 sono vettori di killing anche il commutatore $[k_1, k_2]$ é un vettore di killing ossia, detto in altro modo: se vale $L_{k_1} g_{\mu\nu} = L_{k_2} g_{\mu\nu} = 0$ allora vale anche $L_{[k_1, k_2]} g_{\mu\nu} = 0$. Inoltre ad ogni vettore di killing corrisponde una quantità conservata: ora dimostriamo che lungo una geodetica la quantità $u_\alpha k^\alpha$, dove u^α é la 4-velocità e k^α é un vettore di killing ossia soddisfa l'equazione di killing $D_{(\mu} k_{\nu)} = 0$. Ricordo l'equazione della geodetica:

$$\frac{dx^\beta}{ds} D_\beta u^\alpha = \frac{dx^\beta}{ds} (\partial_\beta u^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\gamma) = \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0$$

Calcolo $\frac{d}{ds} (u_\alpha k^\alpha)$ lungo la geodetica:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (u_\alpha k^\alpha) &= u^\beta \partial_\beta (u_\alpha k^\alpha) = u^\beta D_\beta (u_\alpha k^\alpha) \\ &= \underbrace{u^\beta (D_\beta u^\alpha)}_0 k_\alpha + u^\beta u^\alpha D_\beta k_\alpha = u^\alpha u^\beta D_{(\beta} k_{\alpha)} = 0 \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio deriva dalla simmetria per scambio degli indici α, β . Ad esempio per una particella immersa in un campo gravitazionale esterno indipendente dal tempo il 4-momento é $p^\alpha = m u^\alpha$ per cui la quantità $p^\alpha k_\alpha = m u^\alpha k_\alpha$ si conserva.

4.9.1 Metriche stazionarie

In una metrica stazionaria esiste un vettore di killing k^μ di tipo tempo cioè $k^2 = g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu > 0$ in una regione non vuota. Ciò succede se e solo se esiste un riferimento tale che $\frac{\partial}{\partial t} g_{\mu\nu}(x) = 0$ mentre la condizione $k^2 > 0$ corrisponde a $g_{00}(x) \geq 0$. Scelgo $k^\mu = (1, \vec{0})$ e dimostro che é soddisfatta l'equazione di killing $D_{(\mu} k_{\nu)} = L_k g_{\mu\nu} = 0$. Infatti

$$L_k g_{\mu\nu} = k^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + \underbrace{\partial_\mu k^\rho}_0 g_{\rho\nu} + \underbrace{\partial_\nu k^\rho}_0 g_{\rho\mu} = k^0 \partial_0 g_{\mu\nu} = \partial_0 g_{\mu\nu} = 0$$

poiché $k^\mu = (1, \vec{0})$ e la metrica non dipende dal tempo. E vale anche $k^2 = k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} = g_{00}$.

Posso anche fare il viceversa: considero $k^\mu k^\nu g_{\mu\nu} > 0$ in qualche regione non vuota e considero le curve integrali associate a k^μ definite al solito modo:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = k^\mu(x(\lambda))$$

Le curve integrali non si intersecano e, data un'ipersuperficie che taglia le curve integrali (posso pensare ad un piano che taglia piú o meno perpendicolarmente una serie di fili che non

si toccano l'uno con l'altro), posso individuare ogni punto dello spazio dando le $D-1$ coordinate x' del punto d'incontro fra l'ipersuperficie e la curva integrale appropriata (così individuo la curva integrale cui appartiene il punto in questione) più la coordinata λ del punto in questione (la curva integrale dipende da λ). Con queste coordinate il vettore di Killing diventa

$$k'(x'(\lambda)) = \frac{dx'^{\mu}}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}(\lambda, x' = \text{costante}) = (1, \vec{0}) = k$$

per cui $L_k g_{\mu\nu} = 0$ diventa $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ con $k^2 = g_{00} > 0$.

Se integro k^{μ} per trovare x^{μ} trovo

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{x}(P) = \text{costante} \\ t &= \lambda \end{cases}$$

Chiamo asse temporale di P la curva (che è unica) integrale di k^{μ} passante per P. k^2 divide lo spazio a seconda che $k^2 \leq 0$. Se P è all'interno del cono di luce vale $k^2 > 0$. Se P si trova nello spazio dove $k^2 < 0$ allora, data la forma di k^{μ} deve essere $g_{00}(x) < 0$ e in un tale riferimento non può esserci una particella ferma (questo risultato tornerà utile nell'analisi della metrica di Schwarzschild). Infine considero la superficie Σ definita da $k^2 = \phi = 0$. Se $P \in \Sigma$ allora $n_{\mu} = \partial_{\mu}\phi$ è la normale alla superficie Σ definita da $k^2 = 0$. In questo caso k è tangente al cono di luce perché $k^2 = 0$, ma k è tangente anche a Σ poiché vale $k^{\mu}n_{\mu} = 0$ dove $n_{\mu} = \partial_{\mu}k^2$ è la normale a Σ :

$$k^{\mu}\partial_{\mu}k^2 = k^{\mu}D_{\mu}k^2 = k^{\mu}D_{\mu}(g^{\alpha\beta}k_{\alpha}k_{\beta}) = 2k^{\mu}k^{\beta}D_{\mu}k_{\beta} = 2k^{\mu}k^{\beta}D_{(\mu}k_{\beta)} = 0$$

poiché la derivata covariante della metrica è nulla, gli indici μ, β sono simmetrici per scambio e vale l'equazione di Killing $D_{(\mu}k_{\beta)} = 0$.

È opportuno puntualizzare un aspetto legato ai vettori di Killing. Considero un diffeomorfismo del tipo $x'^{\mu} = x^{\mu} + k^{\mu}(x)$. Se k^{μ} è un vettore di Killing vale l'equazione $L_k g_{\mu\nu} = 0$. Si è visto, quando si è trattata la derivata di Lie, che le derivate di Lie sono in connessione con i diffeomorfismi infinitesimi per cui, lungo un vettore di Killing, si ha:

$$\delta_k g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x)|_{\text{lineare in } k} = 0$$

4.9.2 Metriche statiche

Si ha una metrica stazionaria se esiste un vettore di Killing k^{μ} che soddisfa $k_{\mu}dk_{\nu} = 0$ dove $d = dx^{\alpha}\partial_{\alpha}$ per cui $k_{\mu}dk_{\nu}$ è una 3-forma. $k_{\mu}dk_{\nu} = 0 \Leftrightarrow k_{[\mu}\partial_{\nu]}k_{\alpha]} = 0 \Leftrightarrow k_{[\mu}D_{\nu]}k_{\alpha]} = 0$. Ciò succede se e solo se esiste un riferimento tale che $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ e $g_{0i} = 0$ e in tale sistema $k^{\mu} = (1, \vec{0})$ e $k_{\mu} = g_{\mu\alpha}k^{\alpha} = g_{\mu 0} = (g_{00}, g_{0i} = 0)$ con $g_{00}(\vec{x}) \neq 0$. Visto che $k_i = 0$ si ha $k_{[\mu}\partial_{\nu]}k_{\alpha]} = k_{[0}\partial_{\nu]}k_{\alpha]} = 0$. Vedo che un riferimento dove $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$ e $g_{0i} = 0$ può esistere solo nella regione dove $k^2 \neq 0$ perché se $k^2 = 0$ si ha $g_{00} = 0$ ed avendo già $g_{0i} = 0$ si ha una metrica con determinante nullo e quindi non invertibile. Inoltre se k è statico cioè se $k_{[\mu}D_{\nu]}k_{\alpha]} = 0$ la superficie Σ definita dall'aver $k^2 = \phi = 0$ è di tipo nullo poiché la sua normale n^{μ} soddisfa $n^{\mu}n_{\mu} = 0$. Infatti si ha

$$k_{[\mu}D_{\nu]}k_{\alpha]} = k_{\mu}D_{\nu}k_{\alpha} + k_{\alpha}D_{\mu}k_{\nu} + k_{\nu}D_{\alpha}k_{\mu}$$

poiché, valendo l'equazione di Killing $D_{\alpha}k_{\beta} = -D_{\beta}k_{\alpha}$. Ora contraggo a sinistra con $k^{\mu}D^{\nu}k^{\alpha}$ e noto, dalla forma di k^{μ} , che si ha

$$\frac{k^{\mu}\partial_{\nu}k^{\mu}}{2} = \partial_{\mu}k^2 = 0$$

e sostituendo nell'equazione precedente ottengo

$$0 = k^2 (D^\nu k^\alpha D_\nu k_\alpha) - \frac{1}{4} (\partial_\nu k^2 \partial^\nu k^2) - \frac{1}{4} (\partial_\nu k^2 \partial^\nu k^2)$$

Ricordando che la normale n_μ é definita da $\partial_\nu k^2$ si ottiene

$$n^2 = 2k^2 (D^\nu k^\alpha D_\nu k_\alpha)$$

Ma Σ é definita dall'aver $k^2 = 0$ da cui $n^2 = 0$. Si é visto precedentemente che su una varietá di tipo nullo i vettori tangenti V soddisfano $V^2 \leq 0$. Tutto questo discorso, anche se obiettivamente nebuloso, sta arrivando alla fine: ricapitolando si puó affermare che, se $g_{\mu\nu}$ é statica allora sulla varietá Σ definire dall'aver $k^2 = 0$ sono verificate le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} k^\mu \text{ é tangente a } \Sigma \\ k^\mu \text{ é tangente al cono luce} \\ \Sigma \text{ é di tipo nullo} \end{cases}$$

Va inoltre precisato che il cono luce é tangente a Σ lungo k^μ altrimenti esisterebbero curve $\gamma \in \Sigma$ quindi con $V^2 \leq 0$ e interne al cono luce quindi con $V^2 > 0$ il che contraddice il requisito di causalitá. Ora arriva il punto notevole di tutta la questione: Σ é una superficie *semipermeabile* ossia puó essere attraversata solo in un senso. Posso scrivere $k^2 = g_{00}$ nel seguente modo:

$$k^2 = g_{00} = \left(1 - \frac{R_0}{|\vec{x}|}\right) \quad (4.20)$$

per cui $g_{00} > 0 \Leftrightarrow |\vec{x}| > R_0$ e $g_{00} < 0 \Leftrightarrow |\vec{x}| < R_0$. Queste considerazioni saranno importanti nel trattare le geodetiche nella metrica di Schwarzschild, quando si discuterá l'estensione massimale a buco bianco. Quello che si vuole dire é che le soluzioni tipo buco nero o tipo buco bianco sono separate nel senso che non posso attraversare quello che sará poi l'orizzonte degli eventi in entrambi i sensi di marcia.

4.9.3 Metriche invarianti per rotazioni

La definizione di metrica invariante per rotazioni (gruppo $SO(3)$) é la seguente: se esistono 3 vettori di Killing $k^{(i)} = k^{(i)\mu} \partial_\mu$ con $i = 1, 2, 3$ che soddisfano l'algebra $[k^{(i)}, k^{(j)}] = \epsilon^{ijk} k^{(k)}$ dove ϵ^{ijk} é il tensore totalmente antisimmetrico a tre indici allora si ha una metrica invariante per rotazioni.

Si puó vedere che esiste un riferimento tale che i vettori di Killing abbiano questa forma: $k^{(i)} = \epsilon^{ijk} x^j \partial_k$. Calcolo i diffeomorfismi finiti generati:

$$\frac{dx'^\mu}{d\lambda} = k^\mu(x(\lambda)) \quad (4.21)$$

Un k^μ generico della forma

$$k = \omega^i \epsilon^{ijk} x^j \partial_k \equiv k^\mu \partial_\mu \quad \Rightarrow \quad k^0 = 0 \quad k^i = \underbrace{\epsilon^{ijk} \omega^j}_{A^{jk}} x^k$$

dove A^{jk} é una matrice antisimmetrica per costruzione. Se ritorno alle curve integrale x^μ date da (4.21) ho il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{dx'^0}{d\lambda} = 0 \\ \frac{dx'^i}{d\lambda} = A^{ik} x^k \end{cases}$$

e integrando si ha

$$\begin{cases} x'^0 = x^0 \\ x'^i = [e^{\lambda A}]^{ij} x_j = R^{ij} x_j \quad \text{con} \quad R^T R = 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Ricordo la condizione generale perché un diffeomorfismo generi un'isometria:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = g_{\mu\nu}(x')$$

Il sistema (4.22) sta a significare che

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = 1 \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^0} = 0 \quad \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = R_j^i$$

Applicando la definizione di isometria separatamente alle componenti puramente spaziali ij , a quelle spazio temporali $0i, i0$ e quella puramente temporale 00 si ottiene:

$$\begin{cases} g_{00}(R\vec{x}, t) = g_{00}(\vec{x}, t) \Rightarrow \text{Scalare} \\ g_{0i}(R\vec{x}, t) = R_i^j g_{0j}(\vec{x}, t) \Rightarrow \text{Vettore} \\ g_{ij}(R\vec{x}, t) = R_i^m R_j^n g_{mn}(\vec{x}, t) \Rightarrow \text{Tensore di rango 2} \end{cases}$$

Visto che si sta considerando una metrica invariante per rotazione conviene passare in coordinate polari (r, θ, ϕ) . Avendo visto che g_{00} trasforma come uno scalare, g_{0i} come un vettore e g_{ij} come un tensore di rango due posso definire le componenti della metrica in questo modo:

$$\begin{cases} g_{00} = A(r, t) \\ g_{0i} = x^i \frac{B(r, t)}{r} \\ g_{ij} = -\delta^{ij} \frac{D(r, t)}{r^2} - \frac{x^{ij} C(r, t)}{r^2} \end{cases} \quad (4.23)$$

dove le funzioni incognite introdotte potranno dipendere solo dalla coordinata radiale r a causa dell'invarianza per rotazione. Ricordo che si era visto, ancora nel capitolo dedicato alla relatività ristretta che l'invariante ds^2 ha la forma:

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}$$

e sotto un diffeomorfismo si ha:

$$ds^2 = \left(dx'^\lambda \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \right) \left(dx'^\rho \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} \right) g_{\mu\nu}$$

per cui, per mantenere la stessa forma, posso definire una nuova metrica $G_{\lambda\rho}$ nel seguente modo:

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} g_{\mu\nu} \equiv G_{\lambda\rho}$$

e scrivere nel sistema "r"

$$ds^2 = dx'^\lambda dx'^\rho G_{\lambda\rho}$$

Ora noto che $\vec{x} \cdot d\vec{x} = xdx + ydy + zdz$ e in coordinate polari, poiché $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ da cui

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz$$

da cui si vede che $\vec{x} \cdot d\vec{x} = r dr$. Analogamente, se si esprimono (x, y, z) in funzione di (r, θ, ϕ) si ottiene:

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = r^2 \underbrace{(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)}_{d\Omega^2} + dr^2$$

Inserendo queste relazioni in (4.23) si ottiene la seguente forma per una metrica invariante per rotazioni

$$ds^2 = A dt^2 - 2 dt dr B - D d\Omega^2 - C dr^2 \quad (4.24)$$

Supponendo che $D > 0$ posso scalare la coordinate nel seguente modo:

$$\begin{cases} r' &= \sqrt{D(r, t)} \\ t' &= t \\ \phi' &= \phi \\ \theta' &= \theta \end{cases}$$

da cui ricavo, per i differenziali:

$$\begin{cases} dr' &= \frac{1}{2\sqrt{D}} \left(\frac{\partial D}{\partial t} dt + \frac{\partial D}{\partial r} dr \right) \\ dt' &= dt \\ d\phi' &= d\phi \\ d\theta' &= d\theta \end{cases}$$

da cui, senza indicare dappertutto i “ r ” si ottiene

$$ds^2 = A dt'^2 - 2 dt' dr' B - C dr'^2 - r'^2 d\Omega'^2$$

Quello che dá fastidio nella metrica espressa in questa forma é il termine fuori diagonale $-2B dt' dr'$ e si vorrebbe cercare di eliminarlo. Questo si può fare utilizzando la tecnica del fattore integrante per le 1-forme. Qui daremo solo la soluzione: una metrica invariante per rotaizioni si può scrivere nella forma

$$ds^2 = B(r, t) dt^2 + A(r, t) dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.25)$$

Un esempio notevole é la metrica di Robertson-Walker che si usa per descrivere l’universo in media: tale metrica, come si vedrá meglio piú avanti, non é solo invariante per rotazioni, ma anche per traslazioni. Questo significa che le funzioni incognite non dipenderanno neanche dalla coordinata radiale; restará solo la dipendenza dal tempo. In questo caso si una una coordinata radiale a-dimensionale, detta comovente, e in questa forma si ha:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (4.26)$$

dove c é la velocità della luce, K un parametro che può assumere i valori $1, 0, -1$ che esprime la curvatura dell’universo e $a(t)$ é una funzione detta fattore di scala o parametro di espansione. Comunque questa metrica verrà meglio definita piú avanti, verso la fine del lavoro, dopo che si sará definito cosa si intende per spazio massimalmente simmetrico.

Con questa parte si conclude il capitolo dedicato alla geometria differenziale e nel prossimo si tornerà alla fisica ricapitolando i risultati piú importanti ottenuti fin’ora e dando una ricetta che permetta di estendere un sistema che soddisfa la relatività ristretta ad uno che soddisfa la relatività generale. Fatto questo si ricaveranno le equazioni di Einstein, che legano la metrica al tensore energia-impulso.

Capitolo 5

Particelle e campi in Relatività Generale

In relatività il campo gravitazionale è legato alla metrica ed è legato al tensore energia-impulso attraverso le equazioni di Einstein, di cui si darà la derivazione alla fine di questo capitolo. Intanto diamo una serie di corrispondenze che permettano di estendere un sistema che soddisfa la relatività ristretta ad uno che soddisfa la relatività generale.

5.1 La ricetta minimale

Prima di dare il modo in cui passare da relatività ristretta a generale è bene ricordare che il principio di equivalenza (posso sempre trovare un sistema di riferimento localmente inerziale, nel quale valgono le equazioni della relatività ristretta) è equivalente al principio di covarianza generale che afferma l'invarianza della leggi della fisica in forma sotto diffeomorfismi e afferma che, nel limite in cui la metrica si riduce a quella piatta e, di conseguenza, i simboli di Christoffel vanno a zero, allora ottengo un sistema che soddisfa le leggi della relatività ristretta. Detto questo diamo la ricetta minimale per passare da un sistema che soddisfa la relatività ristretta a uno che soddisfa la relatività generale:

1. la metrica piatta $\eta_{\nu\mu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ metrica generale.
2. il tensore totalmente antisimmetrico $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \rightarrow \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{-g}}$ dove $g = \det g_{\mu\nu}$
3. la derivata ordinaria $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$ derivata covariante.
4. l'integrazione $\int d^4x \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g}$ che è l'integrazione invariante.
5. la delta di Dirac $\delta^4(x - y) \rightarrow \frac{\delta^4(x-y)}{\sqrt{-g}}$

Si è visto che in generale l'elemento di 4-volume $d^4(x)$ non è invariante per diffeomorfismi, e stessa cosa vale per la delta di Dirac. A tal proposito si introduce il determinante della metrica g , in particolare per ottenere un'azione invariante a partire dalla lagrangiana, che è uno scalare.

Detto questo si può vedere un'applicazione della ricetta minimale. Studiando l'elettromagnetismo si è introdotto il campo fondamentale $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ e si è scritta l'equazione di

Lorentz nella forma relativisticamente invariante

$$\frac{du_r^\alpha}{ds_r} = \frac{e_r}{m_r} F^{\alpha\beta} u_{r\beta}$$

dove tutte le grandezze in gioco si riferiscono alla particella r-esima, in particolare $F^{\alpha\beta} = \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ é la curvatura associata alla connessione A^α , e , m sono la carica e la massa della particella u^α é la sua 4-velocitá e s é il tempo proprio della particella. Le equazioni di Maxwell sono state scritte nella forma tensoriale

$$\begin{aligned} \partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu &= \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^\nu \delta^4(x - x_r) \end{aligned}$$

Vediamo come si estendono queste equazioni il relativitá generale:

$$\partial_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0$$

rimane invariata a causa dell'antisimmetrizzazione insita nella definizione di $F^{\mu\nu}$. Infatti posto $F \equiv dx^\mu dx^\nu F_{\mu\nu}$ e $A \equiv dx^\mu A_\mu$ si ha $F = dA = dx^\nu \partial_\nu A$. Nell'equazione di Lorentz

$$\frac{du_r^\alpha}{ds_r} = \frac{e_r}{m_r} F^{\alpha\beta} u_{r\beta}$$

si nota che

$$\frac{du_r^\alpha}{ds_r} = \frac{du_r^\alpha dx_r^\alpha}{dx_r^\alpha ds_r}$$

e poi si sostituisce la derivata ordinaria con quella covariante ottenendo

$$\frac{du_r^\alpha}{ds_r} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u_r^\beta u_r^\gamma = u_r^\gamma D_\gamma u_r^\alpha = \frac{e_r}{m_r} F^{\alpha\beta} u_{r\beta}$$

L'altra equazione di Maxwell

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

diventa

$$D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu = \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^\nu \frac{\delta^4(x - x_r)}{\sqrt{-g(x)}}$$

In relativitá ristretta si aveva la legge di conservazione $\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = \partial_\mu j^\nu = 0$. Ora si avrá la conservazione covariante della corrente:

$$D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = D_\mu j^\mu = 0$$

Infatti $D_\mu D_\nu F^{\mu\nu} = D_{[\mu} D_{\nu]} F^{\mu\nu}$ poiché, essendo $F^{\mu\nu}$ antisimmetrico, contribuisce solo la parte antisimmetrica di $D_\mu D_\nu$. Ricordando che il tensore di Riemann é stato definito come commutatore di derivate covarianti si puó verificare direttamente l'affermazione fatta. Dire che la corrente é conservata in modo covariante significa che

$$D_\mu j^\mu = \partial_\mu j^\mu + \Gamma_{\mu\nu}^\mu j^\nu = 0$$

Quello che ci si propone di fare ora é dimostrare la seguente equazione:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} \tag{5.1}$$

La dimostrazione di questo teorema é fatta di varie tappe: intanto scriviamo per esteso la connessione affine in funzione della metrica:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\rho\nu} (\partial_{\mu}g_{\nu\lambda} + \partial_{\lambda}g_{\nu\mu} - \partial_{\nu}g_{\mu\lambda})$$

di conseguenza

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_{\nu}g_{\nu\lambda} + g^{\mu\nu} \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \partial_{\nu}g_{\mu\lambda})$$

Indicando $\hat{g} \equiv g_{\mu\nu}$ e notando la ciclicitá dei termini dell'espressione precedente di ottiene questo primo risultato:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} (\hat{g}^{-1} \partial_{\lambda} \hat{g}) \quad (5.2)$$

Il secondo risultato parziale sará dimostrare che per ogni matrice simmetrica e positiva M si ha:

$$\ln \det M = \text{tr} \ln M \quad (5.3)$$

Infatti ogni matrice simmetrica può essere diagonalizzata: posso trovare una matrice O tale che $OO^T = 1$ ed esprimere M nel seguente modo:

$$M = O \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} O^T$$

di conseguenza

$$\det M = \det O \cdot \det O^T \cdot (\lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

da cui $\ln \det M = \sum_{i=1}^n \ln \lambda_i$ Allo stesso modo si ha:

$$\text{Tr} \ln \left(O \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} O^T \right)$$

poiché la traccia é ciclica posso estrarre il prodotto $O^T O$ che dá l'unitá per cui

$$\text{Tr} \ln \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = \text{Tr} \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \ln \lambda_n \end{pmatrix} = \sum_i \ln \lambda_i$$

Ora considero $M = e^A$: $\text{tr}(M^{-1} \delta M) = \text{tr}(e^{-A} \delta e^A) = \text{tr} \delta A$ poiché la traccia é ciclica (si può sviluppare in serie l'esponenziale). In questo caso $A = \ln M$ da cui $\text{tr} \delta A = \text{tr} \delta \ln M = \delta \text{tr} \ln M = \delta \ln(\det M)$ da cui infine $\text{tr}(M^{-1} \partial_{\mu} M) = \partial_{\mu}(\ln \det M)$. Scelgo $M = \hat{g}^2$ da cui $2 \text{tr}(\hat{g}^{-1} \partial_{\mu} \hat{g}) = 2 \partial_{\mu} \ln |\det \hat{g}|$. Ricordando che, al solito¹, $g = -\det g_{\mu\nu} = -\det \hat{g}$ si ottiene che $\text{tr}(\hat{g}^{-1} \partial_{\mu} \hat{g}) = \partial_{\mu} \ln g = 1/g \partial_{\mu} g$. Si verifica subito che

$$\frac{1}{g} \partial_{\mu} g = \frac{2}{\sqrt{g}} \partial_{\mu} \sqrt{g}$$

¹precedentemente si era usato $g = \det g_{\mu\nu}$: al fine di non fare confusione basta ricordare che sotto radice deve esserci una quantità positiva, ossia l'opposto del determinante della metrica

da cui il risultato cercato:

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\mu} \sqrt{g} \quad (5.4)$$

Proviamo ad applicare questo risultato alla conservazione covariante della corrente:

$$0 = D_{\mu} j^{\mu} = \partial_{\mu} j^{\mu} + \frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_{\mu} \sqrt{g}) j^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\mu} (\sqrt{g} j^{\mu}) \quad (5.5)$$

che vale in generale. Questo risultato sta a dire che esiste la seguente quantità conservata e invariante per diffeomorfismi:

$$Q = \int d^3x \sqrt{g} j^0 \quad (5.6)$$

Ricordando l'espressione generale per la 4-corrente:

$$j^{\mu} = \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^{\mu} \frac{\delta^4(x - x_r)}{\sqrt{g}}$$

si ottiene:

$$j^0 \sqrt{g} = \sum_r e_r \int_{\gamma_r} dx_r^0 \delta^4(x - x_r) = \sum_r e_r \delta^3(x - x_r)$$

quindi, per la quantità conservata Q , si ha:

$$Q = \int d^3x j^0 \sqrt{g} = \sum_r e_r \quad (5.7)$$

Si é trovato che la carica elettrica si conserva anche in relativitá generale ed é un invariante per diffeomorfismi.

5.2 Il tensore energia-momento

Si era visto che in relativitá ristretta il tensore energia-impulso di un sistema di particelle e del campo elettromagnetico é dato dall'espressione

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\alpha} F_{\alpha}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} + \sum_r e_r \int_{\gamma_r} ds_r u_r^{\mu} u_r^{\nu} \frac{\delta^4(x - x_r)}{\sqrt{g}} \quad (5.8)$$

In relativitá ristretta l'equazione (5.8) dava la legge di conservazione

$$\partial_{\mu} T^{\mu\nu} = 0$$

mentre ora, estendendo alla relativitá generale, si avrá la legge di conservazione covariante del tensore energia-momento:

$$D_{\mu} T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.9)$$

Il fatto che il tensore energia-momento del campo elettromagnetico piú quello delle particelle non si conserva deriva dal non aver considerato il contributo del campo gravitazionale. Per continuare quest'analisi considero un tensore generico $W^{\mu\nu}$ e calcolo $D_{\mu} T^{\mu\nu}$ ricordando il risultato trovato in (5.4). Si ha:

$$D_{\mu} W^{\mu\nu} = \partial_{\mu} W^{\mu\nu} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\lambda} \sqrt{g} \right) W^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} W^{\mu\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_{\mu} (\sqrt{g} W^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} W^{\mu\lambda}$$

Se $W^{\mu\nu}$ é antisimmetrico $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu W^{\mu\lambda} = 0$ perché ho il prodotto di un tensore simmetrico in μ, λ con uno antisimmetrico negli stessi indici per cui ottengo

$$D_\mu W^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} W^{\mu\nu})$$

e si verifica che vale $D_\nu D_\mu W^{\mu\nu} = 0$:

$$D_\nu D_\mu W^{\mu\nu} = D_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} W^{\mu\nu}) \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\nu \left(\sqrt{g} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} W^{\mu\nu}) \right) \right) = 0$$

sempre per il solito motivo di contrarre indici simmetrici con indici antisimmetrici. Se $W^{\mu\nu}$ é un tensore simmetrico, come il tensore energia-momento $T^{\mu\nu}$ si ottiene:

$$D_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} = 0$$

da cui

$$\partial_\mu (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) = \sqrt{g} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \neq 0$$

per cui

$$\hat{P}^\mu = \int d^3x \sqrt{g} T^{\mu 0}$$

non é conservato e non é un vettore.

Si é visto, alla fine del capitolo precedente, come le simmetrie in relativitá generale sono legate ai vettori di Killing, che generano isometrie della metrica: se k_μ é un vettore di Killing soddisfa l'equazione di Killing

$$D_{(\mu} k_{\nu)} = 0$$

Si vede che la quantitá $T^\mu(x) \equiv k_\nu T^{\nu\mu}$ é covariantemente conservata:

$$D_\mu T^\mu = D_{(\mu} k_{\nu)} T^{\nu\mu} + k_\nu D_\mu T^{\nu\mu} = 0$$

per cui

$$T = \int d^3x \sqrt{g} T^0 = \int d^3x \sqrt{g} k_\nu T^{\nu 0}$$

é una quantitá conservata.

5.2.1 Il fluido perfetto

L'universo, in media, puó essere descritto con il tensore energia-impulso di un fluido perfetto. Prima di questo, però, rivediamo alcune cose viste in relativitá ristretta: In ogni punto dello spazio é definita la 4-velocitá u^α . Se la velocitá spaziale, in un qualche sistema di riferimento, di una particella é \vec{v} allora la sua 4-velocitá é

$$u^\alpha = (u^0, \vec{u}) = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right)$$

dove $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ é il fattore di Lorentz e vale anche $u^\alpha u^\beta \eta_{\alpha\beta} = 1$ Per avere un fluido perfetto si richiede assenza di conduzione di calore e assenza di viscositá. L'analisi del tensore energia-momento risulta piú agevole se ci si mette nel riferimento inerziale comovente con il fluido: fissato un certo elemento del fluido sono nel riferimento comovente con questo elemento

del fluido se in questo riferimento l'elemento di fluido é fermo (e utilizzo le leggi della relativit  ristretta). Se indico con $T^{\mu\nu}$ il tensore energia-momento di un fluido perfetto, indico con $\tilde{T}^{\mu\nu}$ il tensore energia-momento dello stesso fluido nel riferimento comovente.

Valgono le seguenti equazioni:

- Conservazione ordinaria:

$$\partial_\mu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \tilde{P}^\mu = \int d^3x \tilde{T}^{\mu 0}$$

- Flusso del momento:

$$\frac{d\tilde{P}^\mu}{dt} = \int_{superficie} \tilde{T}^{i\mu} d\sigma^i$$

- non si ha conduzione di calore ossia

$$\frac{d\tilde{E}}{dt} = \int \tilde{T}^{i0} d\sigma^i = 0 \Rightarrow \tilde{T}^{i0} = 0$$

- la forza fra due elementi di fluido deve essere ortogonale alla superficie di separazione ossia

$$F^j = \frac{d\tilde{P}^j}{dt} = \int d\sigma^i \underbrace{T^{ij}}_{sforzo}$$

dove lo sforzo agente su una superficie non   altro che la forza che agisce per unit  di superficie. Richiedere che vi siano solo sforzi perpendicolari alla superficie di separazione significa identificare questo sforzo con la pressione agente per cui le componenti del tensore energia-impulso di un fluido perfetto nel riferimento comovente sono:

$$\begin{cases} \tilde{T}^{00} = \rho \\ \tilde{T}^{0i} = 0 \\ \tilde{T}^{ij} = p\delta^{ij} \end{cases}$$

Questo tensore energia-momento   isotropo perch  non privilegia particolari direzioni e la quadri velocit  di un elemento del fluido nel riferimento comovente assume la forma $\tilde{u}^\alpha = (1, \vec{0})$. Si verifica che si pu  esprimere il tensore energia-momento (in relativit  ristretta o in un riferimento dove vale la relativit  ristretta) in questa forma:

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \quad (5.10)$$

e vale la legge di conservazione

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

che corrisponde a 4 equazioni, una per ogni valore dell'indice ν . Se applicassi la legge di conservazione all'equazione (5.10) nel limite non relativistico ossia quando $|\vec{v}| \ll 1$ (in unit  naturali) e $p \ll \rho$ si ottengono le familiari equazioni:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{v} \cdot \rho) &= 0 \\ \rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) &= -\vec{\nabla} p \end{aligned}$$

che sono, rispettivamente, l'equazione di continuità e l'equazione di Eulero. Per completare il sistema devo dare un'equazione che legni la pressione alla densità, cioè un'equazione di stato $p = p(\rho)$. Nel caso non relativistico $p = 0$ ed è il caso dell'universo odierno. Nel limite ultrarelativistico, $|v| \sim c$, $p = \rho/3$ ed è il caso dell'universo primordiale. In relatività generale, seguendo la ricetta minimale, si avrà la seguente estensione:

$$T^{\alpha\beta} = (p + \rho) u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} p \quad \text{con} \quad u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1 \quad \text{e} \quad D_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad (5.11)$$

Nel calcolare la derivata covariante del tensore energia-impulso in (5.11) noto che:

$$D_\beta (g^{\alpha\beta} p) = -g^{\alpha\beta} D_\beta p = -g^{\alpha\beta} \partial_\beta p$$

poiché la derivata covariante della metrica è nulla e p è uno scalare. So che in generale vale

$$D_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^{\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\beta T^{\alpha\gamma}$$

però, ricordando (5.4) e ciò che ne seguiva posso scrivere

$$D_\beta T^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta} \partial_\beta p + \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\partial_\beta \left((p + \rho) u^\alpha u^\beta \sqrt{g} \right) \right] + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha (p + \rho) u^\alpha u^\beta = 0$$

5.3 Le equazioni di Einstein

In questa sezione verranno ricavate le equazioni di Einstein che legano la metrica al tensore energia-impulso. Prima di esporre le richieste alle quali le equazioni di Einstein dovranno soddisfare è utile riepilogare alcune equazioni già viste nei capitoli precedenti.

La forza di Lorentz, in notazione relativistica è:

$$\frac{du^\alpha}{ds} = \frac{e}{m} F^{\alpha\beta} u_\beta$$

dove $F^{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ è la curvatura associata alla connessione $A^\beta = (\phi, \vec{A})$.

L'equazione della geodetica in relatività generale è:

$$\frac{du^\alpha}{ds} = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma$$

e le equazioni di Maxwell posso essere espresse in forma covariante con due equazioni 4-vettoriali:

$$\begin{aligned} \partial_{[\alpha} F_{\beta\gamma]} &= 0 \\ \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu \end{aligned}$$

dove la prima equazione è l'identità di Bianchi nel caso dell'elettromagnetismo e la $j^\nu = (c\rho, \vec{j})$ è la 4-corrente. In relatività generale si ha l'identità di Bianchi legata al tensore di Riemann $R_{\beta\gamma\mu\nu}$:

$$D_{[\alpha} R_{\beta\gamma]\mu\nu} = 0$$

Infine ricordo che le equazioni di Maxwell sono lineari in A_μ poiché A_μ non porta carica elettrica mentre la metrica è carica, nel senso che porta energia per cui le equazioni di Einstein saranno non lineari nella metrica, analogamente alle teorie di Yang-Mills non abeliane.

Le richieste cui dovranno soddisfare le equazioni di Einstein sono le seguenti:

- Dovranno essere equazioni covarianti per diffeomorfismi: considero il principio di equivalenza nella formulazione forte.
- Devono dare un tensore energia-momento conservato covariantemente: $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$
- Nel limite statico e di campo debole ossia quando $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, $\vec{v} = 0$ e $g_{00} = 1 + 2\phi$ si vuole riottenere l'equazione di Poisson $\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho$ dove ρ é la densità di massa e $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ con la condizione $|h_{\mu\nu}| \ll 1$.

Per un sistema di particelle vale

$$T^{\mu\nu} = \sum_r \frac{P_r^\alpha P_r^\beta}{E_r} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r)$$

per cui la componente di densità ha la forma

$$T^{00} = \sum_r E_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r)$$

che nel limite statico assume la forma

$$T^{00} = \sum_r m_r \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_r) = \rho$$

mentre le componenti T^{ij} sono nulle. L'equazione di Poisson diventa

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \frac{g_{00}}{2} = 4\pi G \rho = 4\pi G T_{00} \Rightarrow \nabla^2 g_{00} = 8\pi G T_{00}$$

Arrivati a questo punto si opera un vero e proprio *ansatz*: ipotizzo l'esistenza di un certo tensore $G_{\mu\nu}$ che generalizza l'equazione precedente rendendola valida per ogni componente del tensore energia-impulso:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (5.12)$$

$G_{\mu\nu}$ dovrà soddisfare a tutta una serie di proprietà derivanti dall'equazione (5.12) e da quanto detto precedentemente sulle proprietà delle equazioni di Einstein:

1. $G_{\mu\nu}$ dovrà essere un tensore per la richiesta di covarianza per diffeomorfismi.
2. $G_{\mu\nu}$ dovrà essere simmetrico poiché il tensore energia-momento $T_{\mu\nu}$ é simmetrico.
3. dovrà essere costruito con le derivate seconde della metrica e/o con le derivate prime della metrica al quadrato.
4. dovrà essere covariantemente conservato perché anche il tensore energia-momento é covariantemente conservato.
5. nel limite di campo debole $G_{00} \rightarrow \nabla^2 g_{00}$ in modo da soddisfare l'equazione di Poisson

Le prime tre condizioni fissano $G_{\mu\nu}$ ad essere costruito con il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura:

$$G_{\mu\nu} = aR_{\mu\nu} + bg_{\mu\nu}R$$

Dalla quarta condizione si ha:

$$D_\mu G^{\mu\nu} = aD_\mu R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu} D_\nu R = 0$$

A questo punto ricordo l'identitá di Bianchi contratta due volte:

$$D_\mu \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) = 0 \leftrightarrow D_\mu R^{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} D_\mu R$$

e sostituendo in $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ si ottiene

$$\left(\frac{a}{2} + b \right) \partial_\mu R = 0$$

che ha due soluzioni:

- $b = -\frac{a}{2}$
- $\partial_\mu R = 0 \Rightarrow R = \text{costante}$.

Per discriminare quale é la soluzione giusta considero le seguenti equazioni:

$$G^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu} \Rightarrow G_\mu^\mu = 8\pi G T_\mu^\mu \quad \text{con} \quad G_\mu^\mu = G^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu}$$

Avendo visto la struttura di $G_{\mu\nu}$ vale

$$G_\mu^\mu = a g_{\alpha\mu} G^{\mu\alpha} + b g^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu} R = aR + b\delta_\mu^\mu R = (a + 4b)R$$

per cui vale l'equazione

$$(a + 4b)R = T_\mu^\mu$$

Se fosse vero che $\partial_\mu R = 0$ allora, per un sistema di particelle, si avrebbe $\partial_\mu T_\mu^\mu = 0$, che non é vero per un sistema di particelle. Dovrá essere allora $b = -a/2$ per cui posso concludere che

$$G_{\mu\nu} = a \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right)$$

Ora resta da determinare il parametro a e per fare ciò considero il limite di campo debole e statico: in questo limite $T_{00} = \rho$, $T_{ij} = 0$ e posso abbassare e alzare gli indici dei tensori in gioco con la metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$. Da $T_{ij} = 0$ ottengo $G_{ij} = 0$ da cui

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \eta_{ij} R \Rightarrow R_i^j = \frac{1}{2} \eta_{i\alpha} \eta^{\alpha j} R = \frac{1}{2} \delta_i^j R$$

contraendo ulteriormente gli indici spaziali si ha:

$$R_i^i = \frac{3}{2} R = \frac{3}{2} (R_0^0 + R_i^i)$$

da cui

$$R_i^i = -3R_0^0 \Rightarrow R = R_0^0 + R_i^i = -2R_0^0 \Rightarrow G_{00} = a \left(R_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} R \right) = a \left(R_{00} - \frac{R}{2} \right)$$

da cui

$$G_{00} = a \left(R_{00} - \frac{1}{2} (-2R_{00}) \right) = 2aR_{00}$$

Ora esprimo il tensore di Ricci in funzione dei simpboli di Crhistoffel, ricordando che in questo limite tutte le derivate temporali sono nulle, e considero solo pezzi lineari nelle connessioni:

$$R_{00} = R_{0\mu 0}^\mu = \partial_\mu \Gamma_{00}^\mu - \partial_0 \Gamma_{\mu 0}^\mu + 0(\Gamma^2) = \partial_i \Gamma_{00}^i$$

Ora esprimo i simboli Christoffel in funzione della metrica ricordando sempre che tutte le derivate temporali sono nulle:

$$\Gamma_{00}^1 = \frac{1}{2}g^{i\lambda}(\partial_0g_{\lambda 0} + \partial_0g_{\lambda 0} - \partial_\lambda g_{00}) = -\frac{1}{2}g^{ik}\partial_k g_{00}$$

Nel limite di campo debole, si ottiene

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2}\partial^i g_{00}$$

poiché in tale limite $g^{ik} \rightarrow -\delta^{ik} = \eta^{ij}$. Ricapitolando $R_{00} = \partial_i \Gamma_{00}^i = \partial_i \frac{1}{2}\partial^i g_{00} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00}$ e valendo anche $G_{00} = 2aR_{00}$ si ha $G_{00} = a\nabla^2 g_{00}$. Si è visto che nel limite statico deve valere $G_{00} = \nabla^2 g_{00}$ per cui $a = 1$. Si è arrivati al risultato di questa derivazione: le equazioni di Einstein che legano la metrica al tensore energia-impulso hanno la seguente forma:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (5.13)$$

Queste 16 equazioni, scritte nel 1915 da Einstein, non sono tutte indipendenti poiché $G_{\mu\nu}$ è simmetrico, infatti solo 10 sono indipendenti e non tutte sono gradi di libertà fisici a causa dell'invarianza per diffeomorfismi. Nel prossimo capitolo si analizzerà meglio quest'aspetto.

Quando queste equazioni furono scritte era considerato ovvio che l'universo fosse statico però le equazioni (5.13) non permettono soluzioni statiche. Per ottenere una soluzione statica nel 1917 Einstein aggiunse un nuovo pezzo alle sue equazioni rompendo la proprietà di $G_{\mu\nu}$ di essere costruito con due derivate della metrica, ma preservando tutte le altre proprietà. Le nuove equazioni diventano:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (5.14)$$

dove Λ è detta costante cosmologica e deve essere abbastanza piccola da non dare differenze con le equazioni di Newton nel limite statico e di campo debole. Sperimentalmente $\Lambda \sim 10^{-56} \text{cm}^{-2}$. Nel 1929 Hubble scoprì che l'universo è in espansione per cui la motivazione che aveva spinto Einstein ad introdurre la costante cosmologica cadde ed egli tornò alle sue equazioni nella forma (5.13). Nel 1999 però si è visto che $\Lambda \neq 0$ poiché l'universo si sta espandendo in modo accelerato.

Se passo Λ dal primo al secondo membro di (5.14) la interpreto come una forma di energia costante: posso scrivere

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G [T_{\mu\nu} + \tilde{\Lambda}g_{\mu\nu}]$$

dove $\tilde{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$ è una forma di energia costante. È interessante ricavare pressione e densità di una tale forma di energia: il tensore energia-momento del fluido perfetto ha la forma

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu}p$$

mentre nel caso della costante cosmologica vale:

$$T^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}g^{\mu\nu}$$

Queste due espressioni sono uguali se si ha:

$$p = -\tilde{\Lambda} \quad \rho = -p = \tilde{\Lambda}$$

La costante cosmologica é caratterizzata dal portare una pressione negativa: una pressione positiva significa piú attrazione gravitazionale poiché la pressione é energia cinetica e la sorgente del campo gravitazionale é l'energia; pressione negativa allora significa repulsione gravitazionale.

Si conclude questo capitolo con il calcolo del tensore di Ricci nel vuoto: dalle equazioni (5.13) ottengo, contraendo con $g^{\mu\nu}$:

$$R - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}R = R - \frac{1}{2}\delta_{\mu}^{\mu}R = R - 2R = -R = 8\pi GT_{\mu}^{\mu}$$

e, sostituendo in (5.13):

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\rho}^{\rho} \right]$$

Ora in assenza di materia le componenti del tensore energia-impulso sono nulle per cui vale

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{5.15}$$

Con questo si conclude il capitolo. Nel prossimo breve capitolo si studierá il problema dei gradi di libertá nell'elettromagnetismo e il relativitá generale per poi ricavare una soluzione famosa delle equazioni di Einstein, ossia la metrica di Schwarzschild.

Capitolo 6

Il problema di Cauchy in Maxwell e Einstein

Prima di discutere la soluzione di Schwarchild delle equazioni di Einstein, si discuterá in questo breve capitolo il problema di determinare gli effettivi gradi di libertá derivanti dalle equazioni di Maxwell e da quelle di Einstein.

Come prima cosa si definisce un grado di libertá del second'ordine: un campo scalare $\phi(x)$ descrive un grado di libertá del secondo ordine se soddisfa un'equazione del moto che determina $\phi(\vec{x}, t)$ una volta che sono note le condizioni al contorno $\phi(\vec{x}, t_0)$, $\partial_0\phi(\vec{x}, t)$. In equazione tipica in questo senso é l'equazione di Newton:

$$\ddot{x} = \frac{F}{m}$$

e, se sono date x_0 , \dot{x}_0 é determinata univocamente la traiettoria $x(t)$.

Piú in generale il prototipo di un'equazione del moto é qualcosa del tipo

$$\square\phi = j$$

dove j é una corrente nota e $\square = \partial_\mu\partial^\mu = \partial_t^2 - \vec{\nabla}^2$. Posso riscrivere come $\partial_t^2\phi = \vec{\nabla}^2\phi + j$ e, se conosco $\phi(\vec{x}, 0)$ determino $\partial_0^2\phi(\vec{x}, 0)$. Derivando ho $\partial_0^3\phi = \vec{\nabla}^2\partial_0\phi + \partial_0^3\phi$ da cui determino $\partial_0^3\phi(\vec{x}, 0)$. Alla fine, sviluppando in serie di Taylor, vedo che determino il generico $\phi(\vec{x}, t)$ una volta note le condizioni iniziali e la legge del moto.

6.1 L'invarianza di gauge in Maxwell

Si é visto che l'equazione del moto dell'elettromagnetismo puó essere messa nella forma

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{con} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

e si é già discussa l'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo: se

$$A'^\mu \rightarrow A'^\mu + \partial^\mu\Lambda$$

anche la nuova connessione A'^μ soddisfa le equazioni di Maxwell poiché $F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = F^{\mu\nu}$ Poiché la funzione scalare Λ che entra nell'invarianza di gauge é arbitraria posso definire

arbitrariamente il campo A^μ scegliendo opportunamente Λ . Si avranno quindi varie gauge possibili:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_\mu A^\mu = 0 & \text{é la gauge di Lorentz} \\ A^0 = 0 & \text{é la gauge assiale} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 & \text{é la gauge di Coulomb} \end{array} \right.$$

Scegliendo la gauge di Lorentz posso scrivere

$$\partial_\mu A'^\mu = \partial_\mu A^\mu + \square \Lambda = 0 \Rightarrow \square \Lambda = -\partial_\mu A^\mu$$

Si nota che, anche dopo aver fissato la gauge, resta una gauge residua: opero la trasformazione di gauge $A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ dove il campo di partenza A^μ soddisfa la gauge di Lorentz. Ho quindi

$$\partial_\mu (A^\mu + \partial^\mu \Lambda) = \square \Lambda = 0$$

Questo risultato sta a significare che, anche dopo aver fissato la gauge, posso operare un'ulteriore trasformazione di gauge con la condizione $\square \Lambda = 0$.

Ora passo a considerare le equazioni di Maxwell che posso mettere nella forma

$$H^\mu = \partial_\alpha F^{\alpha\mu} - j^\mu = 0$$

Ricordando che $F^{\mu\alpha}$ é antisimmetrico si ha la legge di conservazione

$$\partial_\mu \partial_\alpha F^{\mu\alpha} = \partial_\mu j^\mu = 0$$

che posso mettere nella forma

$$\partial_\mu H^\mu = 0 \Leftrightarrow \partial_0 H^0 = \partial_i H^i$$

Le equazioni di Maxwell sono quindi equivalenti al seguente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ll} H^i(\vec{x}, t) = 0 & 3 \text{ equazioni dinamiche} \\ H^0(\vec{x}, t) = 0 & \text{vincolo derivante da } \partial_0 H^0 = 0 \\ \partial_0 A^0 + \partial_i H^i = 0 & \text{condizione di gauge di Lorentz} \\ A^\mu \rightarrow A^\mu + \partial^\mu \Lambda \text{ con } \square \Lambda = 0 & \text{gauge residua} \end{array} \right.$$

Le condizioni iniziali su A^μ sono $A^i(\vec{x}, 0)$ e $\partial_0 A^i(\vec{x}, 0)$. Dalla definizione di H^0 si ha

$$H^0 = \partial_i (\partial^i A^0 - \partial^0 A^i) - j^0$$

e tale espressione non contiene derivate seconde rispetto al tempo. Il vincolo $H^0(\vec{x}, 0) = 0$, unito alla condizione di gauge permette di calcolare $A^0(\vec{x}, 0)$. A^0 non é una variabile dinamica poiché non ha una condizione iniziale fissata. Passo ora a considerare H^i :

$$H^i = \partial_0 (\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \partial_k F^{ki} - j^i$$

Da $H^i = 0$ determino $A^i(\vec{x}, t)$ una volta note $A^i(\vec{x}, 0)$ e $\partial_0 A^i(\vec{x}, 0)$ per cui ho 3 gradi di libertà.

Passo ora a considerare la gauge residua che é espressa dalla condizione $A' = A + \partial^\mu \Lambda$ con $\square \Lambda = 0$ che é determinata da $\Lambda(\vec{x}, 0)$ e $\partial_0 \Lambda(\vec{x}, 0)$. Avendo questa doppia dipendenza posso fare qualcosa di questo tipo: considero $A'_z = A_z + \partial_z \Lambda$ e scelgo Λ in modo che siano soddisfatte le condizioni

$$A'_z(\vec{x}, 0) = 0 \quad \partial_0 A'_z(\vec{x}, 0) = 0$$

per cui ho eliminato un'altro grado di libertà. Alla fine il risultato importante é il seguente: le equazioni di Maxwell descrivono due gradi di libertà che saranno poi i due stati di polarizzazione della luce.

Nella prossima sezione si vedranno considerazioni analoghe per le equazioni di Einstein dove l'invarianza di gauge é l'invarianza per diffeomorfismi.

6.2 L'invarianza di gauge in Einstein

Definisco $H^{\mu\nu}$ nel seguente modo:

$$H^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R - 8\pi GT^{\mu\nu} = 0$$

L'invarianza per diffeomorfismi si esprime nel solito modo:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu \equiv \Lambda^\mu(x)$$

Rispetto al caso di Maxwell ora ho 4 condizioni di gauge da imporre poiché un diffeomorfismo generico dipende da 4 parametri. La scelta della gauge é arbitraria e scegliamo la gauge armonica definita dalla condizione

$$g^{\alpha\beta}\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \equiv \Gamma^\gamma \quad (6.1)$$

Ora calcolo come cambierebbe l'espressione (6.1) in un altro sistema di riferimento ossia calcolo $g'^{\alpha\beta}\Gamma'_{\alpha\beta}{}^\gamma$: ricordo intanto come trasforma la connessione affine sotto diffeomorfismi:

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}$$

scrivendo nel seguente modo

$$\frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x'^\mu \partial x^\sigma} = \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\tau \partial x^\sigma}$$

e sostituendo nell'espressione per $\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda$, dopo aver raccolto i pezzi comuni ottengo

$$\Gamma'_{\mu\nu}{}^\lambda = \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \right]$$

Ora calcolo $\Gamma'^\lambda = \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} g'^{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \Gamma'^\lambda_{\mu\nu} g'^{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \right] \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\tau} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\tau\sigma} \\ &= g^{\tau\sigma} \left[\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x'^\rho} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\sigma \partial x^\tau} \right] \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta x'^\lambda \\ &= -g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta x'^\lambda \end{aligned}$$

dove l'ultimo passaggio deriva dall'aver scelto la gauge armonica. Ora definisco il seguente operatore che agisce sullo scalare ϕ :

$$\square_g \phi = g^{\mu\nu} D_\mu \partial_\nu \phi$$

poiché la derivata ordinaria e quella covariante, applicate ad uno scalare coincidono. Esplicitando la derivata covariante si ha:

$$\square_g \phi = g^{\mu\nu} \left(\partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \phi \right) = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma^\lambda \partial_\lambda \phi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi$$

dove l'ultimo passaggio vale nella gauge armonica. Paragonando a quanto si era trovato per Γ'^λ posso scrivere:

$$\Gamma'^\mu = -\square_g \Lambda^\mu \quad \text{con} \quad x'^\mu(x) = \Lambda^\mu(x) \quad (6.2)$$

La condizione della gauge armonica $\Gamma'^\gamma = 0$ impone $\square_g \Lambda^\mu = 0$. Arrivati a questo punto può cercare un'eventuale gauge residua: vale

$$\Gamma'^\lambda = \partial_\rho \Lambda^\lambda \Gamma^\rho - g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \Lambda^\lambda = 0$$

avendo fissato la gauge $\partial_\rho \Lambda^\lambda \Gamma^\rho = 0$ e la gauge residua é

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \Lambda^\lambda = 0 \quad (6.3)$$

che elimina altri 4 gradi di libertà. Esplicitando in funzione della metrica si ha

$$\begin{aligned} \Gamma^\lambda &= g^{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\lambda\rho} (2\partial_\alpha g_{\beta\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}) \\ &= -\partial_\rho g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} g^{\alpha\beta} \partial_\rho g_{\alpha\beta} \\ &= -\partial_\rho g^{\lambda\rho} - \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} 2 \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\rho \sqrt{g} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\rho (\sqrt{g} g^{\rho\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

per cui posso riformulare la scelta della gauge nel seguente modo:

- Gauge armonica: $\partial_\mu (\sqrt{g} g_{\mu\nu}) = 0$
- Gauge residua: $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu(x)$ con $g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \Lambda^\mu = 0$

Passo ora alle equazioni di Einstein già riformulate nella forma $H^{\mu\nu} = 0$ che é equivalente a dire $H^{ij}(\vec{x}, t) = H^{0\mu}(\vec{x}, 0) = 0$. Inoltre vale $D_\mu H^{\mu\nu} = 0$ poiché si ha $D_\mu T^{\mu\nu} = D_\mu (R^{\mu\nu} - 1/2 g^{\mu\nu} R) = 0$. Si potrebbe ora ripetere il ragionamento fatto a proposito delle equazioni di Maxwell dove la scelta della gauge riduceva da 4 a 3 i gradi di libertà del campo elettromagnetico e la gauge residua li riduceva ulteriormente a due dando i gradi fisici dell'elettromagnetismo. Nel caso della relatività generale si parte da 10 gradi di libertà, poiché la metrica é un tensore 4×4 simmetrico, ridotti a sei dalla scelta della gauge e ridotti a due dalla gauge residua. Ciò significa che la metrica porta due gradi fisici di libertà che saranno poi le polarizzazioni possibili delle onde gravitazionali.

Capitolo 7

La soluzione di Schwarzschild

In questo capitolo si ricaverá una metrica che soddisfa le equazioni di Einstein e che si può pensare dovuta al campo gravitazionale generato da una stella come il Sole nel *vuoto*: si considera una metrica *statica e invariante per rotazioni*. Il fatto di avere una metrica invariante per rotazioni significa che può essere messa nella forma

$$ds^2 = B(r, t)dt^2 - A(r, t)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

mentre la condizione di staticitá implica la non dipendenza dal tempo delle funzioni A, B per cui la metrica di partenza é

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (7.1)$$

Una metrica come la (7.1) é diagonale con coefficienti

$$\begin{cases} g_{tt} &= B(r) \\ g_{rr} &= -A(r) \\ g_{\theta\theta} &= -r^2 \\ g_{\phi\phi} &= -r^2 \sin^2 \theta = g_{\theta\theta} \sin^2 \theta \end{cases}$$

Se una metrica (o in generale una matrice) é diagonale allora anche la sua inversa é diagonale con coefficienti dati dagli inversi della metrica di partenza: $g^{tt} = 1/g_{tt}$ e via cosí. In breve si ricorda che le connessioni affini sono costruite con la metrica e le derivate della metrica e il tensore di Ricci con le derivate delle connessioni e prodotti di connessioni. Si ricorda anche il legame fra le invarianze della metrica e i vettori di Killing: una metrica statica é anche stazionaria e in questo caso esiste il vettore di Killing $k = (1, \vec{0})$ mentre una metrica invariante per rotazioni ammette i tre vettori di Killing $k^{(i)} = \epsilon^{ijk} x^j \partial_k$. Si é visto nel capitolo dedicato alla geometria differenziale che un modo di definire i vettori di Killing consiste nel richiedere che la derivata di Lie della metrica lungo tali vettori sia nulla: se k é un vettore di Killing allora $L_k g_{\mu\nu} = 0$. Poiché la derivate di Lie (a parte un segno) danno le trasformazioni dei tensori sotto diffeomorfismi infinitesimi significa che anche la derivata di Lie del tensore di Ricci lungo i vettori di Killing della metrica sará nulla. Questo vale perché il tensore di Ricci é costruito con la metrica. La conclusione di questo ragionamento é che $R_{\mu\nu}$ ammette le stesse simmetrie della metrica: é indipendente dal tempo e invariante per rotazioni. Piú in dettaglio, le sue componenti si possono scrivere nel modo seguente:

$$\begin{cases} R_{00} &= R_{00}(r) \\ R_{0i} &= x_i h(r) \\ R_{ij} &= \delta_{ij} f(r) + x_i x_j g(r) \end{cases}$$

Posso subito concludere che $R_{0i} = 0$ per il seguente motivo: $R_{\mu\nu}$ contiene un numero pari di indici ma l'indice 0 compare solo in coppie negli elementi della metrica g_{tt} o g^{tt} . Eventuali termini con un solo indice temporale avrebbero origine dalle derivate temporali nei simboli di Christoffel ma danno zero poiché sto considerando una metrica statica. Alla fine anche il tensore di Ricci é diagonale e calcolarne le componenti é piuttosto veloce: la metrica é diagonale e le uniche derivate non nulle sono quelle rispetto a r . Ad esempio si trova:

$$\Gamma_{rr}^r = \frac{1}{2} g^{rr} (\partial_r g_{rr} + \partial_r g_{rr} - \partial_r g_{rr}) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{A(r)} \right) \partial_r (-A(r)) = \frac{1}{2} \frac{A'}{A}$$

Passando al tensore di Ricci si ottiene:

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{1}{2B} \left[B'' - \frac{1}{2} B' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} \\ R_{tt} &= -\frac{1}{2A} \left[B'' - \frac{1}{2} B' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{R}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A} \\ R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta} \end{aligned}$$

Si era visto che le equazioni di Einstein nel vuoto sono caratterizzate dall'aver $R_{\mu\nu} = 0$, vedi (5.15), di conseguenza dovrà essere $R_{rr} = R_{tt} = R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi} = 0$. In particolare risulta comoda la combinazione $R_{rr}/A + R_{tt}/B = 0$:

$$\frac{R_{rr}}{A} + \frac{R_{tt}}{B} = \frac{1}{BA} \left[\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right] = 0 \Rightarrow A'B + B'A = 0$$

A, B sono funzioni solo di R e l'espressione precedente é la derivata della funzione AB . Si ha quindi

$$\frac{d}{dr} (A(r)B(r)) = 0 \Rightarrow A(r)B(r) = \text{costante}$$

Per calcolare quanto vale questa costante la calcolo in un limite opportuno: se la distanza dalla stella che genera il campo diventa infinita il campo gravitazionale tende a zero, il che significa che si ritrova la metrica piatta $\eta_{\mu\nu}$. In tale limite $A(r) = B(r) = 1$ da cui $A(r) = 1/B(r)$. Sostituendo nelle espressioni dei coefficienti di $R_{\mu\nu}$ si trova

$$\begin{aligned} R_{rr} &= \frac{B''}{2B} - \frac{1}{r} \frac{B'}{B} \\ R_{tt} &= -\frac{1}{2} B B'' + \frac{1}{r} B' B = 0 \\ R_{\theta\theta} &= 1 - \frac{r}{2} B 2 \frac{B'}{B} = 0 \end{aligned}$$

Dall'ultima equazione si ricava

$$B + rB' = 1 \Rightarrow \frac{d}{dr} (B(r) + rB'(r)) = 2B' + rB'' = 0$$

Si vede che l'integrale di $B + rB' = 1$ é $rB = r + c$ da cui $B = 1 + c/r$. Resta ora da determinare la costante c . Per fare ciò si ricorre al limite di campo debole trovato nel capitolo dedicato al

principio di equivalenza: a grande distanza dalla stella si sa che $g_{00} \rightarrow 1 + 2\phi = 1 - 2MG/r$ ca cui $c = -2MG$. Si é giunti all'espressione della metrica di Schwarchild:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (7.2)$$

Vale il seguente teorema non dimostrato detto teorema di Birkhoff: ho una metrica invariante per rotazioni, quindi del tipo $B(r,t)dt^2 - A(r,t)dr^2 - r^2d\Omega^2$, e impongo $R_{\mu\nu} = 0$. Allora le funzioni $A(r,t), B(r,t)$ assumono la forma che hanno nella metrica di Schwarchild. Inoltre (si vedrá meglio piú avanti) un corpo che oscilla mantenendo la simmetria sferica non emette onde gravitazionali. Si definisce la quantitá $r_s = 2MG/c^2$ raggio di Schwarchild dove M é la massa del corpo in questione. Per il Sole $r_s = 3km$. Ricordando la discussione fatta in precedenza sulla causalitá in relativitá generale si hanno le seguenti proprietá:

- $B(r_s) = 0 = g_{00} \Rightarrow$ la superficie di raggio r_s é semipermeabile.
- In $B(r_s)$ si ha che $g_{00} = k^2 = 0$ dove $k = (1, \vec{0})$ é il vettore di Killing connesso alla stazionarietá della metrica. Questo significa che non posso usare coordinate con $g_{0i} = 0$
- $r = r_s$ é una singolaritá fittizia perché posso eliminarla con un opportuno cambiamento di coordinate.
- $r = 0$ é una singolaritá fisica (non eliminabile)

Considero ora le geodetiche in Schwarzschild: definito un parametro p (per particelle massive puó essere il tempo proprio) valgono le solite equazioni:

$$u^\alpha(p) = \frac{dx^\alpha}{dp} = 4\text{-velocitá}$$

$$\frac{du^\alpha}{dp} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 = \text{equazione della geodetica}$$

La quantitá $\epsilon = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta}$ é costante lungo le geodetiche ed é maggiore di 0 per particelle massive e pari a zero per i fotoni. Inoltre vale la relazione fra vettori di Killing e quantitá conservate: k é vettore di Killing se la derivata di Lie della metrica lungo k é nulla: $L_k g_{\mu\nu} = 0$. Allora la quantitá $u^\alpha k^\beta g_{\alpha\beta}$ é costante del moto lungo le geodetiche. Nel caso di Schwarzschild ho 4 vettori di Killing: il vettore $k^\mu = (1, \vec{0})$ derivante dalla staticitá della metrica e i tre vettori $k^\mu(i) = (0, k_{(i)}^j) = \epsilon^{ijk} x^k$ derivanti dall'invarianza per rotazioni. Alla fine ho 4 quantitá conservate derivanti dalle isometrie della metrica. Ora calcoliamo le quantitá conservate espresse da $u^\alpha k^\beta g_{\alpha\beta}$.

$$k_{(i)}^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = k_{(i)}^j u^\beta g_{j\beta} = \epsilon^{ijk} x^k u^m g_{jm} = \epsilon^{ijk} x^k u^j$$

dove gli indici latini sono spaziali e quelli greci dono spazio-temporali. Va ricordato che la componente temporale di $k_{(i)}^\alpha$ é nulla e la metrica é diagonale. L' espressione trovata sopra puó essere scritta sotto forma di un prodotto vettoriale $\vec{x} \times \vec{u}$ per cui definisco

$$\tilde{L} = \vec{x} \times \vec{u} = \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dp} = \left(\vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \right) \frac{dt}{dp} \equiv \text{"momento angolare"}$$

Ho trovato una quantitá conservata proporzionale al momento angolare per cui le orbite sono piane: posso continuare l'analisi fissando l'angolo $\theta = \pi/2$ e mettermi nel piano $(x, y) \leftrightarrow (r, \phi)$.

Ora cerco la quantità conservata derivante dall'altro vettore di Killing $k^\mu = (1, \vec{0})$:

$$k^\mu u^\nu g_{\mu\nu} = k^0 u^\nu g_{0\nu} = u^\nu g_{0\nu} = u^0 g_{00} = \frac{dt}{dp} B = 1$$

dove l'ultimo passaggio deriva dalla possibilità di riscalarlo opportunamente il parametro p . Posso anche scrivere

$$\begin{aligned} \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dp} &= \vec{x} \times \frac{d\vec{x}}{dt} \frac{dt}{dp} = \vec{x} \times \vec{v} \frac{dt}{dp} \\ &= \vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \frac{dt}{dp} = r^2 \omega \frac{dt}{dp} = r^2 \frac{d\phi}{dt} \hat{z} \frac{dt}{dp} \\ &= r^2 \frac{d\phi}{dp} \hat{z} \end{aligned}$$

dove $\omega = d\phi/dt$ è la velocità angolare, diretta lungo l'asse z poiché sono nel piano (x, y) e $r^2 = \vec{x} \cdot \vec{x}$. Posso riassumere i risultati trovati elencando i quattro integrali primi emersi dall'analisi:

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dp} &= \frac{1}{B} \\ r^2 \frac{d\phi}{dp} &= J \\ \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dp} &= 0 \\ \epsilon = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} &= \text{costante} \end{aligned}$$

Ora cerco la traiettoria $r(\phi)$: dalla relazioni precedenti si ha

$$\frac{dr}{dp} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dp} = \frac{dr}{d\phi} \frac{J}{r^2}$$

e inoltre

$$\epsilon = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = (u^0)^2 g_{tt} + (u^1)^2 g_{rr} + (u^2)^2 g_{\phi\phi} + (u^3)^2 g_{\theta\theta}$$

ricordando la struttura della metrica e della quadrivelocità si ottiene

$$\epsilon = \left(\frac{dt}{dp}\right)^2 B - \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 \frac{1}{B} - r^2 \left[\left(\frac{d\phi}{dp}\right)^2 \sin^2 \theta + \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 \right] = \frac{1}{B} - \frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2$$

poiché $\theta = \pi/2$. Da $r^2 d\phi/dr = J$ posso scrivere $r^2 (d\phi/dr)^2 = J^2/r^2$ e sostituendo nell'equazione precedente ottengo

$$\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -\epsilon \quad (7.3)$$

Ora si è quasi alla fine: ricordando che $\frac{dr}{dp} = \frac{dr}{d\phi} \frac{J}{r^2}$ e sostituendo nell'ultima equazione si ottiene:

$$\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 \frac{J^2}{r^4} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -\epsilon$$

da cui l'equazione che da il parametro r in funzione dell'angolo ϕ :

$$\frac{d\phi}{dr} = \frac{1}{r^2 \sqrt{B}} \sqrt{\frac{1}{BJ^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{J^2}} \quad (7.4)$$

da cui, integrando

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{r^2\sqrt{B}}}{\sqrt{\frac{1}{BJ^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{J^2}}} \quad (7.5)$$

Quest'ultima equazione é decisamente utile perché sará usata sia nel capitolo dedicato ai test della relativitá generale, sia nel capitolo dedicato all'analisi delle geodetiche nella metrica di Schwarzschild. Per questo capitolo ci si limiterá a qualche considerazione sui risultati ottenuti. Si passerá poi ai test della relativitá generale dove si fará ampio uso di (7.5) e delle considerazioni seguenti:

- nel caso delle orbite aperte quando $r \rightarrow \infty$ il coefficiente $B(r)$ tende a 1, per cui $dt = dp \Rightarrow p = t$ e nell'espressione (7.4) trascuro il termine in r^{-4} ottenendo $J^2/r^2 = 1 - \epsilon$. In questo limite $J = r^2 d\phi/dt = r^2 \omega$ da cui $J^2/r^2 = r^2 \omega^2 = v_\infty^2$ e infine si ha il risultato

$$\epsilon = 1 - v_\infty^2 \geq 0 \quad (7.6)$$

se si vuole soddisfatto il requisito di causalitá e il principio di equivalenza.

- la quantitá $l = bv_\infty$ dove b é il parametro d'impatto é pari al momento angolare per unitá di massa e, nel limite $r \rightarrow \infty$ si ha $J = l$
- Nel caso dei fotoni posso specializzare le relazioni precedenti nel seguente modo: $v_\infty = 1$ da cui $\epsilon = 0$ e $J = b$.

Concludo questo capitolo con una considerazione sull'equazione (7.3): nel limite non relativistico $B = 1 - 2MG/r \Rightarrow 1/B = 1 + 2MG/r$ e $dr/dp \simeq dr/dt = v_r$ e sostituendo nell'equazione (7.3) e moltiplicando per $m/2$ si ottiene

$$\frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{mMG}{r} = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

dove $v_\infty^2 = 1 - \epsilon$ e l'equazione scritta sopra esprime la conservazione dell'energia espressa in coordinate polari. Con questo si conclude la prima parte dedicata alla metrica di Schwarzschild, ma prima di entrare piú in dettaglio si vedranno alcuni test della relativitá generale.

Capitolo 8

Le verifiche della relatività generale

In questo capitolo si analizzeranno alcuni test classici della relatività generale:

- il red-shift gravitazionale.
- la deflessione della luce da parte del Sole.
- lo spostamento del perielio dei pianeti (Mercurio in particolare, per il quale il fenomeno é piú evidente).
- il ritardo dell'eco-radar (che é il metodo piú preciso).

A dire il vero il red-shift gravitazionale é già stato trattato nel capitolo dedicato al principio di equivalenza dove si trovó il risultato

$$+ > \frac{\nu_1}{\nu_2} = \sqrt{\frac{g_{00}(r_1)}{g_{00}(r_2)}} = \sqrt{\frac{B(r_1)}{B(r_2)}}$$

dove ν_1 é la frequenza emessa sul Sole e ν_2 é la frequenza osservata sulla Terra. L'identificazione di g_{00} con il coefficiente B della metrica di Schwarzschild é lecito poiché considero una metrica invariante per rotazioni (quella generata dal Sole) nel vuoto (gli effetti relativistici della Terra non sono molto intensi, vedi l'approssimazione di campo debole) perciò vale il teorema di Birkhoff: una metrica invariante per rotazioni nel vuoto é statica quindi é di Schwarzschild. Detto questo si può passare a considerare la deflessione della luce da parte del Sole che richiederá decisamente piú lavoro.

8.1 La deflessione della luce

Per trattare la deflessione subita dalla luce che passa vicino ad un corpo di grande massa come il Sole si usará l'equazione (7.5) che viene per comodità riscritta:

$$\phi(r) - \phi(r_0) = \int_{r_0}^r \frac{\frac{1}{r^2\sqrt{B}}}{\sqrt{\frac{1}{BJ^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{J^2}}} \quad (8.1)$$

e si ricorda che nelle orbite aperte (un corpo arriva dall'infinito, subisce una deflessione e se ne va di nuovo all'infinito) valgono le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - v_\infty^2 \geq 0 \\ J &= Bv_\infty \end{aligned}$$



Figura 8.1: Orrenda figura che descrive la deflessione subita da un raggio di luce a causa dell'interazione gravitazionale con un corpo di grande massa; l'angolo di deflesione $\Delta\phi = \Delta\theta - \pi$ dove $\Delta\theta$ é l'angolo concavo che si ottiene ruotando in senso antiorario la direzione di $v_{-\infty}$ fino a farla coincidere con $v_{+\infty}$

che, per i fotoni si specializzano a $\epsilon = 0$ e $J = b$ dove b é il parametro d'impatto del fotone che arriva. Nel caso non relativistico si ottiene che , per corpi massivi, la deflessione $\Delta\Phi = 2\arctg\gamma$ dove $\gamma = GM/bv_{\infty}^2$. Nel caso dei fotoni, estendendo questa relazione (con le dovute cautele visto che ora $m \rightarrow 0$) si ottiene $\Delta\Phi_{Newton} = 2\arctg\gamma \sim 2\gamma = 2MG/bc^2$ poiché $\gamma \sim 10^{-6}$. Poiché gli angoli che compaiono in (8.1) si intendono misurati dal centro del Sole vale la seguente formula

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{1}{r^2\sqrt{B}}}{\sqrt{\frac{1}{BJ^2} - \frac{1}{r^2}}} \quad (8.2)$$

ricordando (8.1) con la condizione $\epsilon = 0$ valida per i fotoni. La vera e propria deflessione sarà $\Delta\theta - \pi$ come si vede dalla figura. Il punto di massimo avvicinamento r_0 é definito da $dr/d\phi = 0$ o, equivalentemente da $d\phi/dr \rightarrow \infty$. Da (7.4) si vede che questa condizione é equivalente ($\epsilon = 0$) a

$$\frac{1}{B(r_0)} \frac{1}{J^2} = \frac{1}{r_0^2}$$

da cui $J = b = r/\sqrt{B(r_0)}$ e sostituendo in (8.2) si ottiene

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{\frac{dr}{\sqrt{B(r)}r}}{\sqrt{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{B(r_0)}{B(r)} - 1}} \quad (8.3)$$

e la deflessione é $\Delta\phi = \Delta\theta - \pi$ e $B(r) = 1 - 2MG/r = 1 - r_s/r$. Ora noto il seguente fatto: la distanza di minimo avvicinamento di un fotone é pari al raggio del Sole che é 10^6 volte maggiore del raggio di Schwarchild del Sole. Questo significa che sviluppo in serie di $1/r$ e tengo solo i termini lineari:

$$\frac{B(r_0)}{B(r)} \simeq \left(1 - \frac{2MG}{r_0}\right) \left(1 + \frac{2MG}{r}\right) \simeq 1 + 2MG \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = 1 + 2MG \frac{r_0 - r}{rr_0}$$

da cui, sostituendo nel radicando della radice si ottiene

$$\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \frac{B(r_0)}{B(r) - 1} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 2MG \frac{r_0 - r}{rr_0} = \left[\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 - 1\right] \left[1 - 2MG \frac{r}{r_0(r + r_0)}\right]$$

La seconda parentesi quadra é del tipo $(1 - x)$ con $x \ll 1$ per cui vale l'approssimazione $1/\sqrt{1-x} \simeq \sqrt{1+x} \simeq 1 + x/2$. Con queste considerazioni (8.3) diventa

$$\Delta\theta = 2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{r}{r_0} - 1}} \left(1 + MG \left(\frac{r}{r_0(r + r_0)} + \frac{1}{r}\right)\right) \frac{dr}{r}$$

con la sostituzione $r/r_0 = x$ l'integrale diventa

$$\Delta\theta = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \left(1 + \frac{MG}{r_0} \left(\frac{x}{1+x} + \frac{1}{x}\right)\right) \frac{dx}{x}$$

I prossimi due passaggi derivano dalla sostituzioni $x \rightarrow 1/y$ e poi $y \rightarrow \sin \alpha$ e si ha:

$$\begin{aligned} \Delta\theta &= \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \left(1 + \frac{MG}{r_0} \left(\frac{1}{1+y} + y\right)\right) \\ &= \pi + \frac{2MG}{r_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \left[\sin \alpha + \frac{1}{1 + \sin \alpha}\right] \end{aligned}$$

Integrando in seno da 0 a 1 (significa nel primo radiante se guardo gli angoli coinvolti) posso sostituire $\sin \alpha$ con $\cos \alpha$ ottenendo

$$\frac{1}{1 + \sin \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

per cui alla fine

$$\Delta\theta = \pi + \frac{2MG}{r_0} (1 + 1) = \pi + \frac{4MG}{r_0}$$

La deflessione vera e propria é data dall'espressione

$$\Delta\phi = \Delta\theta - \pi = \frac{4MG}{r_0} \tag{8.4}$$

che dá un risultato doppio rispetto alla trattazione Newtoniana. Le deflessioni sono minime per cui vale $b \sim r_0$. Nel caso del Sole la massima deflessione che si ottiene é quando si prende come parametro d'impatto il raggio stesso del Sole e vale $1,75''$. Il fenomeno della deflessione della luce da parte di un corpo fu la prima verifica sperimentale della relativitá generale e venne realizzata nel 1919 misurando la posizione di alcune stelle durante un eclissi (altrimenti non si potrebbero vedere) e confrontandole con le loro posizioni a distanza di sei mesi, quando la loro luce non é deviata dalla massa del Sole. Altri esempi di deviazione della luce si hanno nello sdoppiamento dell'immagine di alcuni oggetti lontani, come dei Quasar, ad opera di una galassia frapposta nella linea di vista.

8.2 Spostamento del Perielio di Mercurio

In questa sezione si considera il moto di un corpo massivo (Mercurio) nel campo del Sole. Si ricorda che gli unici potenziali per cui tutte le orbite limitate sono chiuse sono il potenziale gravitazionale $V_1(r) = -k/r$ e il potenziale elastico $V_2(r) = kr^2/2$. In realtà le orbite dei pianeti non sono chiuse poiché ci sono anche le influenze dei pianeti stessi. Tra questi effetti vi è lo spostamento del perielio (punto di massimo avvicinamento al Sole) di un pianeta. Tale spostamento si può calcolare usando la fisica classica e ciò che storicamente si trovò è il seguente fatto: non si spiegano i $43''$ di avanzamento del perielio di Mercurio ogni 100 anni. Quello che ci propone di mostrare in questa sezione è che un calcolo relativistico permette di spiegare questo fatto, altrimenti inspiegabile. Se definisco r_+ l'afelio di un pianeta e r_- il perielio dello stesso lo spostamento del perielio in un ciclo è dato da

$$\Delta\phi = 2(\phi(r_+) - \phi(r_-)) - 2\pi \quad (8.5)$$

come si può vedere facendo un disegno che non faccio per rispetto del lettore. Il punto di partenza è la solita (7.5) dove gli estremi di integrazione sono dati da r_+ e r_- :

$$\phi(r_+) - \phi(r_-) = \int_{r_+}^{r_-} \frac{\frac{dr}{\sqrt{B(r)r^2}}}{\sqrt{\frac{1}{B(r)J^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{J^2}}} \quad (8.6)$$

r_+ e r_- sono determinati dalla condizione $dr/\phi = 0$ che è equivalente a $d\phi/dr \rightarrow \infty$ e tale condizione è verificata solo se in (8.6)

$$\sqrt{\frac{1}{B(r)J^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{J^2}} = 0$$

da cui ricavo

$$\frac{1}{r_{\pm}^2} - \frac{1}{B(r_{\pm})J^2} = -\frac{\epsilon}{J^2}$$

Prendendo la differenza della dua soluzioni siottiene

$$\frac{1}{J^2} \left[\frac{1}{B(r_+)} - \frac{1}{B(r_-)} \right] = \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}$$

Indicando, come al solito con r_s il raggio di Schwarzschild vale $B(r) = 1 - r_s/r$ da cui, espandendo al secondo ordine

$$B^{-1}(r) \simeq 1 + \frac{r_s}{r} + \left(\frac{r_s}{r}\right)^2$$

e, sostituendo nell'equazione precedente, al primo ordine, si trova

$$\frac{1}{J^2} \left[r_s \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \right] = \frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}$$

Ponendo $x = 1/r$ da cui $x_{\pm} = 1/r_{\pm}$ si ha

$$\left(\frac{r_s}{J}\right)^2 = r_s(x_+ + x_-) \Rightarrow J^2 = \frac{r_s}{x_+ + x_-}$$

Con le sostituzioni di queste righe posso scrivere

$$\frac{1}{BJ^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{\epsilon}{J^2} = (1 + r_s x + r_s^2 x^2) \frac{1}{J^2} - x^2 - \frac{\epsilon}{J^2}$$

e, con qualche sistemazione posso riscrivere (8.6) come:

$$\phi(r_+) - \phi(r_-) = \int_{r_-}^{r_+} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{2}x\right) \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{[1 - r_s(x_+ + x_-)] [(x - x_+)(x_- - x)]}}$$

e ponendo $x = 1/r$ da cui $dx = -dr/r^2$ l'equazione precedente diventa

$$\begin{aligned} \phi(r_+) - \phi(r_-) &= \int_{r_+}^{r_-} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{2}x\right) dx}{\sqrt{[1 - r_s(x_+ + x_-)] [(x - x_+)(x_- - x)]}} \\ &= \left(1 + \frac{r_s}{2}(x_+ + x_-)\right) \int_{r_-}^{r_+} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{2}x\right) dx}{\sqrt{(x - x_+)(x_- - x)}} \end{aligned}$$

Ponendo $y = x - (x_+ + x_-)/2$ da cui $dy = dx$ l'espressione precedente diventa

$$\phi(r_+) - \phi(r_-) = \left(1 + \frac{r_s}{2}(x_+ + x_-)\right) \int_{\frac{x_- - x_+}{2}}^{\frac{x_+ - x_-}{2}} \frac{\left(1 + \frac{r_s}{2}y + \frac{r_s}{4}(x_+ + x_-)\right) dy}{\sqrt{\left(y + \frac{x_- - x_+}{2}\right) \left(\frac{x_+ - x_-}{2} - y\right)}}$$

Ho un integrale simmetrico nell'intervallo di integrazione: contribuisce solo la parte pari ossia y non contribuisce. Alla fine posso scrivere l'integrale nella forma

$$\phi(r_+) - \phi(r_-) = \left(1 + \frac{3}{4}r_s(x_+ + x_-)\right) \int_{-1}^1 \frac{dy}{1 - y^2} = \pi \left(1 + \frac{3}{4}r_s(x_+ + x_-)\right)$$

Ora si può dare la formula per la precessione $\Delta\phi$:

$$\Delta\phi = 2(\phi(r_+) - \phi(r_-)) - 2\pi = \frac{3}{2}r_s(x_+ + x_-)\pi = 3MG \left(\frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}\right) \pi \quad (8.7)$$

Considerando l'orbita come un'ellisse di asse maggiore a e minore b ossia di eccentricità $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ da cui $r_{\pm} = (1 \pm e)a$ si ottiene

$$\Delta\phi = 3MG\pi \left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) \frac{1}{a} = \frac{6\pi MG}{(1-e^2)a} \quad (8.8)$$

Arrivati a questo punto si può verificare se la formula (8.8) dá il giusto risultato applicato a Mercurio. I parametri di Mercurio sono $N=415$ giri attorno al Sole in un anno, $e = 0.206$, $a = 57.91 \cdot 10^6 km$. Con questi dati si ottiene $(\Delta\phi)_{secolo} = N\Delta\phi = 43.03''$ mentre $(\Delta\phi)_{secolo}^{osservato} = 43.11 \pm 0.45''$. Con questo si chiude la trattazione del secondo test della relatività generale. La prossima sezione chiuderá questo capitolo dedicato ai test della relatività generale trattando il ritardo dell'eco-radar dopo di che si concluderá questa seconda parte dedicata ai fondamenti e primi sviluppi della relatività generale. Nella prossima parte si applicherá la relatività generale in vari contesti, cominciando con l'analisi della geodetiche nella metrica di Schwarzschild.

8.3 Il ritardo dell' eco-radar

L'idea dietro questo test consiste nel mandare un segnale radar dalla Terra ad un pianeta (come Mercurio) e osservare il segnale riflesso. Chiamo r_1 il raggio vettore che connette il Sole alla Terra e r_2 il raggio vettore che connette il Sole a Mercurio. Considero r_1 e r_2 quasi diametralmente opposti in modo che il raggio di luce (in senso lato) passi vicino al Sole e chiamo r_0 la distanza di minimo avvicinamento caratterizzato dalla condizione $dr/dt = 0$. Usando la luce come segnale ho le condizioni $\epsilon = 0$, $v = c = 1$. Ricordando le equazioni trovate in Schwarzschild vale

$$\frac{dr}{dp} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dp} = \frac{\dot{r}}{B(r)}$$

Lavorando sulle equazioni posso scrivere l'equazione radiale (7.4) nel seguente modo

$$\frac{\dot{r}^2}{B^2} + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = 0 \Rightarrow \frac{dt}{dr} = \frac{1}{B(r)} \left[1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Sviluppo la radice in serie perché vale sempre la condizione $r \gg r_s$ dove r_s è il raggio di Schwarzschild del Sole e vale 3km. Si ottiene

$$1 - \frac{B(r)}{B(r_0)} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = 1 - \left[1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_s}{r_0} \right] \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 = \left[1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \right] \left[1 - \frac{r_s r_0}{r(r+r_0)} \right]$$

per cui $t(r_0, r_1) =$ tempo per andare da r_0 a r_1 è

$$t(r_0, r_1) = \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^2}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{r_s r_0}{r(r+r_0)} + \frac{r_s}{r} \right)$$

Integrando si ottiene

$$t(r_0, r_1) = \underbrace{\sqrt{r_1^2 - r_0^2}}_{\text{risultato classico}} + r_s \underbrace{\left[\ln \left(\frac{r_1^2 - r_0^2}{r_0} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1 - r_0}{r_1 + r_0}} \right]}_{\text{correzione relativistica positiva = ritardo}}$$

Il tempo di andata e ritorno è

$$t(\text{totale}) = 2(t(r_0, r_1) + t(r_0, r_2))$$

Si possono fare varie approssimazioni per semplificare la formula notando che $r_1, r_2 \gg r_0 \sim r_{\text{sole}}$, ma quello che è importante notare è che gli esperimenti sono in eccellente accordo con la teoria: misurando il tempo di andata e ritorno di un segnale riflesso da una sonda su Marte si è avuto il seguente risultato:

$$\frac{(\Delta t)_{RG}}{(\Delta t)_{Oss}} = 1.000 \pm 0.002$$

dando una forte conferma alla relatività generale.

Parte III

Le applicazioni della relativit  generale

Capitolo 9

Analisi delle geodetiche in Schwarchild

In questo capitolo si analizzeranno le orbite $r(\phi)$ e le traiettorie $r(t)$ sia per oggetti dotati di massa, caratterizzati da $\epsilon > 0$ sia per oggetti a massa nulla, come i fotoni, per cui vale $\epsilon = 0$. Si utilizzeranno le equazioni ricavate nel capitolo sulla metrica di Schwarzschild e le si confronterà con gli analoghi risultati newtoniani. Anzi, visto che i risultati newtoniani sono noti si inizia da questi per poi vedere come vengono “corretti” dall’analisi relativistica.

9.1 Trattazione Newtoniana

Se considero una forza centrale, come quella gravitazionale, posso esprimere la conservazione dell’energia totale \tilde{E} di un corpo immerso in un campo gravitazionale in coordinate polari con l’espressione

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - \frac{mGM}{r} = \tilde{E} = \text{costante} \quad (9.1)$$

Dividendo (9.1) per $m/2$ e definendo una specie di energia per unità di massa $E \equiv 2\tilde{E}/m$ ottengo

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V_l(r) = E \quad \text{con} \quad V_l(r) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{l}{m}\right)^2 - \frac{r_s}{r} \quad (9.2)$$

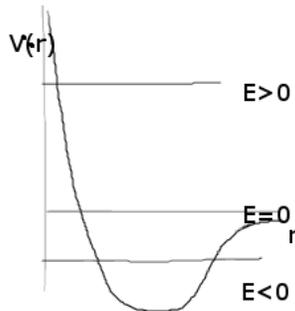


Figura 9.1: figura che descrive l’andamento di $V_l(r)$ in funzione della distanza radiale r .

Come si vede dalla figura (9.1) vi sono varie orbite possibili: se $E > 0$ si hanno orbite iperboliche o di scattering. Poiché $V_l(r) \leq E$ altrimenti si avrebbe energia cinetica negativa significa che $V_l(r)$ agisce come una barriera di potenziale che impedisce di arrivare a $r = 0$. Detto in altre parole la sezione d'urto di cattura del potenziale é nulla. Se $E = 0$ si ha un'orbita parabolica mentre se $E < 0$ si hanno stati legati poiché la distanza radiale del corpo dalla massa che genera il campo é costretta a rimanere fra un minimo e un massimo. I punti r_0 che soddisfano $V(r_0) = E$ per cui $dr/dt = 0$ si dicono punti di inversione. In generale posso definire la sezione d'urto di cattura nel seguente modo: considero una serie di corpi che arrivano dall'infinito con velocità v_∞ fissata e parametro d'impatto b . Fissata la velocità ciò che discrimina se un corpo sarà catturato o no é il parametro d'impatto, ossia quanto vicino passa al corpo che genera il campo. Determinato il b_{max} per cui si ha cattura la corrispondente sezione d'urto di cattura é

$$A = \pi b_{max}^2 \quad (9.3)$$

Nella trattazione newtoniana la sezione d'urto di cattura del potenziale é nulla, mentre nell'analisi relativistica non sarà cosí.

9.2 Trattazione relativistica

Per comoditá vengono riscritte le equazioni trovate nel capitolo dedicato alla metrica di Schwarzschild che saranno necessarie per il seguito:

- per corpi massicci $\epsilon > 0$ e posso utilizzare come parametro il tempo proprio legato al parametro delle geodetiche p da $ds = \sqrt{\epsilon} dp$.
- si era trovato

$$\epsilon = u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} \Rightarrow \frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp} \right)^2 + \frac{J^2}{r^2} - \frac{1}{B} = -\epsilon \quad (9.4)$$

- L'energia per unitá di massa E é pari a $(1 - \epsilon)/\epsilon$ e avendosi anche

$$\epsilon = 1 - v_\infty^2 \Rightarrow E = \frac{v_\infty^2}{1 - v_\infty^2} = p_\infty^2 \quad (9.5)$$

Il momento angolare per unitá di massa l é legato alle variabili precedenti da

$$l = \frac{J}{\sqrt{\epsilon}} = \frac{bv_\infty}{\sqrt{1 - v_\infty^2}} = bp_\infty \quad (9.6)$$

Sostituendo $dr/dp = \sqrt{\epsilon} dr/ds$ in (9.4) ottengo la seguente equazione, analogo relativistico di (9.2):

$$\left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + V(r) = E \quad (9.7)$$

dove si é definito il potenziale

$$V(r) = \left(1 - \frac{r_s}{r} \right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right) - 1 = \frac{l^2}{r^2} - \frac{r_s}{r} - \frac{l^2 r_s}{r^3} \quad (9.8)$$

Continuando il confronto con il caso classico si possono ravvisare alcune differenze fra la trattazione newtoniana e quella relativistica

- $t \rightarrow s =$ tempo proprio
- a piccole distanze domina $-l^2 r_s / r^3$ che é attrattivo.
- $E \geq -1$ poiché $E = (1 - \epsilon) / \epsilon$ e, per le orbite aperte, da $\epsilon = 1 - v_\infty^2$ ricavo $0 \leq \epsilon \leq 1$ da cui $E \geq 0$
- le orbite legate hanno $-1 \leq E \leq 0$ cioè $\epsilon > 1$

Prima di iniziare l'analisi di $V(r)$ dato in (9.8) si ricordano alcuni risultati trovati nelle sezioni dedicate ai vettori di Killing e alla causalità in relatività generale applicandoli alla metrica di Schwarzschild:

- la metrica di Schwarzschild é statica per cui esiste un vettore di Killing $k^\mu = (1, \vec{0})$ da cui $k^2 = g_{00} = B(r) = 1 - r_s / r \leq 0$
- la superficie $k^2 = \phi(r) = 0$ ossia $r = r_s$ é una superficie semipermeabile (puó essere attraversata solo in un senso)
- su $\phi < 0$ ossia $r < r_s$ non possono esserci particelle a riposo.
- su $\phi = 0$ non si puó avere $g_{0i} = 0$

Da tutto questo si intuisce che la superficie $k^2 = \phi = 0 \Leftrightarrow r = r_s$ dará delle inconsistenze visto che la metrica di Schwarzschild é diagonale.

9.3 $V(r)$ per corpi massicci

Le caratteristiche salienti di $V(r)$ dato da (9.8) che valgono per ogni momento angolare o parametro d'impatto sono le seguenti:

- per $r \rightarrow \infty$ domina il termine $-r_s / r \rightarrow 0^-$.
- per $r \rightarrow 0$ domina il termine $-\frac{l^2 r_s}{r^3} \rightarrow -\infty$.
- se richiedo $V(r) = -1 = E_{min}$ ottengo $r = r_s$.
- se $r < r_s$ $V' = dV/dr \neq 0$ e non ci sono punti d'inversione se $r < r_s$ poiché $E = (dr/ds)^2 + V(r)$ con $E \geq -1$ e $V(r) < -1$ se $r < r_s$, di conseguenza $(dr/ds) \neq 0$.

L'andamento comune a qualsiasi valore di momento angolare di $V(r)$ é riassunto nella figura (9.3). Per dare l'andamento di $V(r)$ nella zona intermedia (quella non compresa in figura (9.3)) calcoliamo massimi, minimi e zeri di $V(r)$. Per quanto riguarda massimi e minimi si trova

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{r_\pm}{r_s} = \left(\frac{l}{r_s}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - 3\left(\frac{r_s}{l}\right)^2}\right)$$

per cui esistono massimi e minimi r_\pm solo se $l \geq \sqrt{3}r_s$. Passiamo ora agli zeri di $V(r)$:

$$V(r) = 0 \Leftrightarrow \frac{r_{12}}{r_s} = \frac{1}{2} \left(\frac{l}{r_s}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{r_s}{l}\right)^2}\right)$$

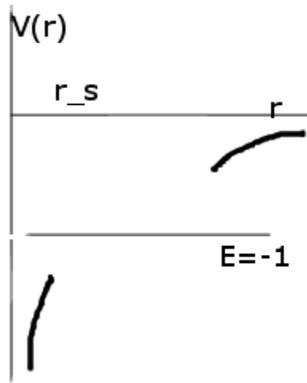


Figura 9.2: andamento comune di $V(r)$ a tutti i valori di mimento angolare o parametri d'impatto per corpi massivi.

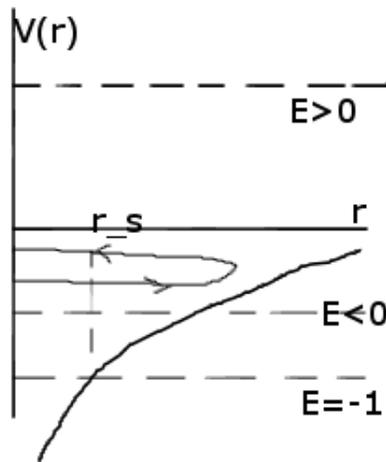


Figura 9.3: andamento di $V(r)$ nel caso in cui $0 \leq l \leq \sqrt{3}r_s$.

per cui esistono zeri di $V(r)$ solo se $l \geq 2r_s$. Si vede dalle espressioni date che r_- , r_1 sono funzioni decrescenti di l mentre r_+ , r_2 sono funzioni crescenti di l e valgono i seguenti intervalli

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}r_s &\leq r_- \leq 3r_s \\ 3r_s &\leq r_+ \leq \infty \\ r_s &\leq r_1 \leq 2r_s \\ 2r_s &\leq r_2 \leq \infty \end{aligned}$$

in particolare quando esistono $r_-, r_+, r_1, r_2 \geq r_s$. Vista questa classificazione conviene dividere l'analisi di $V(r)$ in tre parti a seconda del valore del parametro l .

Caso 1 $0 \leq l \leq \sqrt{3}r_s \Rightarrow$ non ci sono minimi o massimi, né zeri di $V(r)$. L'andamento di $V(r)$ é dato in figura (9.3). Se $E > 0$ la particelle con $dr/ds < 0$ ossia entranti vengono

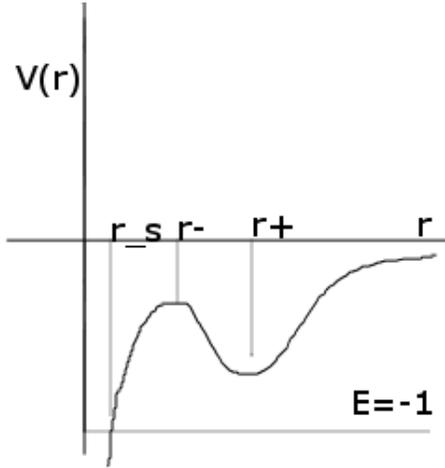


Figura 9.4: andamento di $V(r)$ nel caso in cui $\sqrt{3}r_s \leq l \leq 2r_s$.

catturate. Sono ammesse con $dr/ds > 0$ ossia uscenti. Se $E < 0$ tutte le particelle cadono su $r = 0$ e si vedono orbite intrappolate.

Caso 2. $\sqrt{3}r_s \leq l \leq 2r_s \Rightarrow$ non ci sono zeri di $V(r)$ ma ci sono un massimo e un minimo come si vede dalla figura (9.3). Se si ha $E > 0$ la situazione é identica a quella precedente mentre il caso $E < 0$ si arricchisce di nuovi particolari: sono possibili in questo caso orbite limitate stabili (orbite comprese tra una distanza radiale minima e una massima entrambe finite e maggiori di zero) e nel caso in cui $r = r_+$ si ha un'orbita circolare. L'orbita circolare piú piccola si ha per $l = \sqrt{3}r_s$ e in questo caso $r_+ = 3r_s$. Tale risultato interpreta i dischi di accrescimento dei buchi neri.

Da questi due casi si capisce che per corpi entranti dall'infinito con $l \leq 2r_s$ si ha sempre cattura. Aumentare l significa aumentare il parametro d'impatto b perché per orbite aperte $l = bp_\infty$. Dalla disuguaglianza (che vale in questo caso) $bp_\infty < 2r_s$ ricavo $b < 2r_s/p_\infty$ per cui la sezione d'urto $\sigma(p_\infty)$ é almeno pari a πb_∞^2 . Riassumendo si é trovato questo risultato

$$\sigma(p_\infty) \geq \frac{4\pi r_s^2}{p_\infty^2} = 4\pi r_s^2 \frac{1 - v_\infty^2}{v_\infty^2} \quad (9.9)$$

Caso 3 Ora la situazione diviene piú varia ed é esemplificata dalla figura (9.3). Si vedono stati legati, tipici delle orbite planetarie, orbite iperboliche che si scontrano con la barriera di potenziale come quelle delle comete non periodiche, orbite intrappolate e particelle che scappano o sono catturate a seconda della direzione di provenienza.

In particolare ci sono 2 zone in cui si ha cattura: una riguarda particelle ultrarelativistiche poiché si ha per particelle con $E > V(r_+)$. Infatti $E = (1 - \epsilon)/\epsilon$ per cui E diventa arbitrariamente grande se $\epsilon \rightarrow 0$ che é il limite in cui si hanno i fotoni. (per orbite aperte $\epsilon = 1 - v_\infty^2$ e i fotoni sono contraddistinti da avere $v_\infty = 1$). L'altra regione in cui si ha cattura é quella in cui $V(r_-) \leq E \leq 0$ che corrisponde ad avere $v_\infty \ll 1$ oppure $\epsilon > 1$. Vista questa divisione si tratteranno separatamente le sezioni d'urto di cattura per particelle relativistiche e non relativistiche.

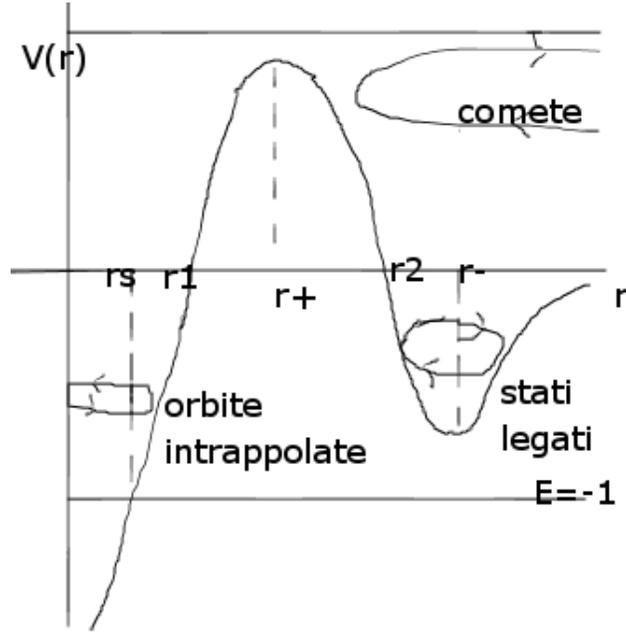


Figura 9.5: andamento di $V(r)$ nel caso in cui $l > 2r_s$.

Cominciamo con la sezione d'urto di cattura per particelle ultrarelativistiche: si é nel seguente limite:

$$v_\infty \rightarrow 1 \Rightarrow p_\infty = \frac{v_\infty}{\sqrt{1-v_\infty^2}} \rightarrow \infty \Rightarrow l = p_\infty b \rightarrow \infty$$

Si era trovato in precedenza che

$$\frac{r_\pm}{r_s} = \left(\frac{l}{r_s}\right)^2 \left(1 \pm \sqrt{1 - 3\left(\frac{r_s}{l}\right)^2}\right)$$

e nel limite in cui $l \rightarrow \infty$ di ottiene

$$r_\pm = \frac{3}{2}r_s$$

Visto che si ha cattura se $E = p_\infty^2 > V(r_+)$ richiedo che sia soddisfatta la seguente condizione:

$$V\left(\frac{3}{2}r_s\right) = \left(1 - \frac{r_s}{\frac{3}{2}r_s}\right) \left(1 + \frac{l^2}{\frac{9}{4}r_s^2}\right) \simeq \frac{4}{27} \frac{l^2}{r_s^2} = \frac{4}{27} \frac{p_\infty^2 b^2}{r_s^2} < p_\infty^2$$

Si ha quindi

$$b^2 < \frac{27}{4} r_s^2$$

da cui ricavo la sezione d'urto di cattura per particelle ultrarelativistiche:

$$\sigma_{U.R.} = \pi b^2 = \frac{27}{4} \pi r_s^2 \quad (9.10)$$

Passiamo ora al caso non relativistico: $v_\infty \rightarrow 0 \Rightarrow p_\infty, E \sim 0$. Per avere cattura devono esserci il massimo e il minimo di $V(r)$ ma ora il momento angolare é talmente piccolo che si é ritornati

nel caso in cui non ci sono gli zeri di $V(r)$. Basta che sia soddisfatta la condizione $V(r_-) < 0$ che si ha per $\sqrt{3}r_s < l < 2r_s$. Quindi riassumendo

$$l = p_\infty b \leq 2r_s \Rightarrow b \leq \frac{2r_s}{p_\infty}$$

per cui la sezione d'urto di cattura per particelle non relativistiche é

$$\sigma_{N.R.} = \pi b^2 = \frac{4\pi r_s^2}{p_\infty^2} \sim \frac{4\pi r_s^2}{v_\infty^2} \quad (9.11)$$

Come ci si aspetta, dal confronto di (9.10) e (9.11) si vede che

$$\sigma_{N.R.} \gg \sigma_{U.R.}$$

9.4 $V(r)$ per i fotoni

I fotoni sono caratterizzati dall'aver $\epsilon = 0$ per cui $E = 1$ e $v_\infty = 1$ da cui $J = b$. Non essendo definito il tempo proprio devo utilizzare il parametro p della geodetica. L'equazione radiale (9.4) si specializza nella forma

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + J^2 \frac{B}{r^2} - 1 = 0 \quad (9.12)$$

Se si vuole ottenere una forma analoga al caso di corpi massivi devo scrivere (9.12) nella forma

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 + V(r) = E = 1$$

e, confrontando con l'equazione precedente si ha

$$V(r) = \frac{J^2}{r^2} B(r) = \frac{J^2}{r^2} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \quad (9.13)$$

Derivando (9.13) ottengo

$$V'(r) = \frac{J^2}{r^2} \left(\frac{3r_s}{r^2} - \frac{2}{r}\right)$$

da cui vedo che si ha

$$V'(r) = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3}{2}r_s$$

Poiché $V(r_s) = 0$, $V(\infty) = 0^+$ e non ci sono altri zeri ne concludo che in $r = 3/2r_s$ $V(r)$ ha un massimo e in particolare

$$V(3/2r_s) = \frac{4}{27} \frac{J^2}{r_s^2}$$

Definendo

$$J_0 \equiv \frac{3\sqrt{3}}{2} r_s$$

posso operare la seguente classificazione

$$V(r_{max}) = \frac{J^2}{J_0^2} \Rightarrow \begin{cases} V(r_{max}) > 1 & \Leftrightarrow J > J_0 \\ V(r_{max}) < 1 & \Leftrightarrow J < J_0 \end{cases}$$

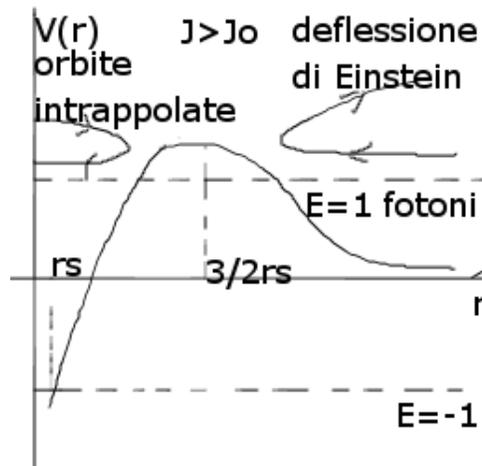


Figura 9.6: andamento di $V(r)$ per fotoni con $J > J_0$.

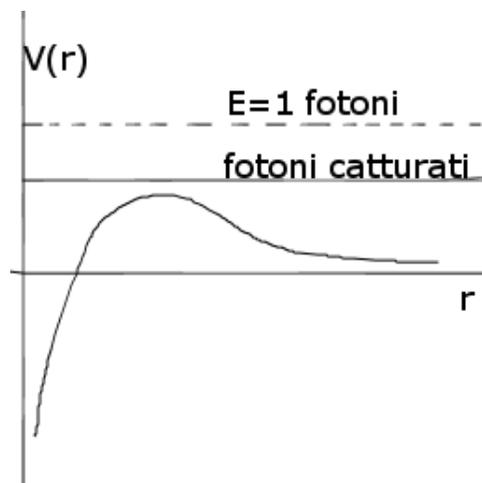


Figura 9.7: andamento di $V(r)$ per fotoni con $J < J_0$.

Quindi, a seconda del momento angolare del fotone incidente ho due casi esemplificati dalle figure seguenti: ricordo che per i fotoni $E = 1$ ed ϵ è fissato. Dalle ultime figure si vede che si ha cattura sono per fotoni con $J < J_0$ ossia per $J < 3\sqrt{3}/2r_s$. Ricordando che per un fotone $J = b$ dove b è il parametro d'impatto si ottiene la seguente sezione d'urto di cattura:

$$\sigma_F = \pi J_0^2 = \pi b^2 = \frac{27}{4} \pi r_s^2 \quad (9.14)$$

che coincide con la sezione d'urto per particelle ultrarelativistiche trovata in (9.10).

9.4.1 Il cono di fuga dei fotoni

Arrivati a questo punto ci si pone la seguente questione: un fotone viene prodotto ad una distanza $r > r_s$ da un corpo che genera un campo gravitazionale con raggio di Schwarzschild r_s e si muove secondo una direzione che forma un angolo α rispetto alla direzione radiale. La domanda è: riuscirà o no il fotone a scappare?

Per rispondere a questa domanda si deve cercare (e trovare) una relazione fra il momento angolare J e le coordinate (r, α) . Con una sorta di generalizzazione del teorema di Pitagora si trova

$$\sin^2 \alpha = \frac{g_{\phi\phi}(d\phi)^2}{g_{\phi\phi}(d\phi)^2 + g_{rr}(dr)^2}$$

dove si sono utilizzati i componenti della metrica di Schwarzschild:

$$\begin{aligned} g_{\phi\phi} &= -r^2 \sin^2 \theta = -r^2 \sin^2 \theta \\ \theta &= \frac{\pi}{2} \quad \text{si può fissare} \Rightarrow d\theta = 0 \\ g_{rr} &= -\frac{1}{B(r)} \end{aligned}$$

I fotoni hanno elemento di linea nullo:

$$ds^2 = B dt^2 - \frac{1}{B} dr^2 + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 = 0$$

da questa relazione ricavo

$$g_{rr} dr^2 + g_{\phi\phi}(d\phi)^2 = -B dt^2$$

e sostituendola nell'equazione per $\sin^2 \alpha$ si trova

$$\sin^2 \alpha = \frac{r^2 d\phi^2}{g_{tt} dt^2} = \frac{r^2}{B} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2$$

Ricordando che valgono le equazioni $r^2 d\phi/dp = J$ e $dp/dt = B$ (vedi capitolo sulla metrica di Schwarzschild) si può scrivere l'equazione precedente nel modo seguente:

$$\frac{r^2}{B} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 = \frac{r^2}{B} \left(\frac{d\phi}{dp} \right)^2 \left(\frac{dp}{dt} \right)^2 = \frac{r^2 J^2}{B r^4} B^2 = \frac{B^2}{r^2} J^2$$

Si è ottenuto

$$\sin^2 \alpha = \frac{B^2}{r^2} J^2 \Rightarrow J = \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{B(r)}} \quad \text{con } r > r_s \quad (9.15)$$

Per rispondere alla domanda posta prima è bene dividere l'analisi in due casi: uno nel quale $r > 3/2r_s$ e uno nel quale $r_s < r < 3/2r_s$. Questa distinzione deriva dalla forma di $V(r)$: si è visto che $V(r)$ ha un massimo per $r = 3/2r_s$ così separare i due casi semplifica la questione.

$$r > 3/2r_s$$

Se $J > J_0$ il fotone scappa sia se é entrante sia se é uscente. Se $J < J_0$ il fotone scappa solo se é uscente. Alla fine se é uscente scappa comunque e se é entrante scappa per $J > J_0$. Piú in dettaglio, se $J < J_0$ dalle equazioni precedenti si ha:

$$J_0 = \frac{3}{\sqrt{3}}2r_s > J = \frac{r \sin \alpha}{\sqrt{B(r)}} \Rightarrow \sin \alpha > \frac{3}{\sqrt{3}}2r_s \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} = \sin \alpha_1$$

Piú precisamente il fotone scappa se forma un'angolo α con la direzione radiale tale che $0 < \alpha < \alpha_1$ dove $\pi/2 < \alpha_1 < \pi$. Ricordo che per come é costruito α indica una direzione uscente se $0 < \alpha < \pi/2$ mentre indica una direzione entrante se $\pi/2 < \alpha < \pi$.

$$r_s < r < 3/2r_s$$

Ora, nel caso in cui $J > J_0$ si hanno orbite intrappolate per cui il fotone scappa solo se é uscente ($0 < \alpha < \pi/2$) e ha $J < J_0$. Piú in dettaglio, analizzando il problema come nel caso precedente si ottiene che il fotone scappa se forma un angolo α con la direzione radiale tale che

$$\sin \alpha < \frac{3}{\sqrt{3}}2r_s \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} = \sin \alpha_2$$

In particolare se $r = 3/2r_s$ si ottiene $\sin \alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \pi/2$ mentre se $r = r_s$ si ottiene $\alpha_2 = 0$.

Si possono riassumere i risultati trovati nel seguente modo:

- non ci sono fotoni che scappano se prodotti in $r < r_s$.
- in $r = r_s$ solo i fotoni che hanno direzione radiale uscente possono scappare, ossia il cono di fuga é una retta di direzione radiale.
- se $r_s < r < 3/2r_s$ le direzioni di fuga coprono una porzione di cerchio compresa fra 0 e un intero semicerchio (rivolto all'esterno).
- per $r = 3/2r_s$ il cono di fuga dei fotoni é dato da un semicerchio (tutte le direzioni esterne).
- per $r > 3/2r_s$ il cono di fuga si allarga a comprendere anche direzioni entranti fino a comprenderle tutte sono a distanza infinita dal corpo generante il campo. Questo é consistente con l'andamento di $V(r)$: per quanto sia distante un fotone, puó avere una direzione che punta vicino al centro del corpo in modo da avere un momento angolare rispetto al centro del campo minore di J_0 per cui non viene deflesso (vedi le figure di $V(r)$ per i fotoni) e viene catturato.

L'analisi delle orbite condotta fino a qui non ha evidenziato problemi legati alle coordinate r, θ, ϕ . Si era detto però che in $r = r_s$ la metrica di Schwarzschild dá dei problemi in quanto é diagonale, ammette il vettore di Killing $k^\mu = (1, \vec{0})$ e $k^2 = g_{00} \dots$. Se ne conclude che i problemi derivanti in r_s sono causati dalla coordinata temporale. Quindi, conclusa l'analisi delle orbite si passerá nella prossima sezione all'analisi delle leggi orarie $t(p)$ discutendo le estensioni analitiche della metrica di Schwarzschild.

9.5 La coordinata temporale

In questa sezione si vedrá come la coordinata temporale non sia una buona coordinata quando ci si avvicina a r_s ; intanto rivediamo alcuni tratti salienti della metrica di Schwarzschild. La metrica di Schwarzschild é definita come

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (9.16)$$

Si é capito che la coordinata radiale r é ben definita e si sa, dai teoremi sui vettori di Killing, che per le metriche stazionarie non é garantito $g_{rt} = 0$ sulla superficie definita da $r = r_s$ poiché in quel caso $k^2 = 0$ con $k = (1, \vec{0})$. Si vede, inoltre, da (9.16) che per $r \rightarrow r_s$ $g_{tt} \rightarrow 0$ mentre $g_{rr} \rightarrow \infty$. Si consideri un moto radiale, ossia ad angolo costante $\phi = \phi_0$ e con momento angolare $J = 0$ che parte da $r > r_s$. Per semplicitá considero il caso $\epsilon = 1$ il che vuol dire che la particella in questione ha velocità $v_\infty = 0$. Per analizzare la traiettoria considero l'equazione radiale per corpi massivi (9.4) che sotto queste condizioni diventa:

$$\frac{1}{B} \left(\frac{dr}{dp}\right)^2 - \frac{1}{B} = -\epsilon = -1$$

da cui si ottiene

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = 1 - B = \frac{r_s}{r}$$

ricordando che vale anche $dt/dp = 1/B$ posso riscrivere come

$$\left(\frac{dr}{dp}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \frac{dt}{dp}\right)^2 = \frac{r_s}{r}$$

da cui infine

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{r_s}{r} B^2 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \sqrt{\frac{r_s}{r}}$$

dove il segno “-” deriva dall'avere una particella entrante. Dall'equazione precedente ricavo

$$dt = \frac{r^{3/2} dr}{\sqrt{r_s}(r_s - r)}$$

e integrando ottengo il tempo coordinato per giungere a r_s :

$$T_{r \rightarrow r_s} = \int_{r_s}^r \frac{r^{3/2} dr}{\sqrt{r_s}(r_s - r)} = \infty$$

Il tempo coordinato, tempo misurato da un osservatore infinitamente lontano per cui $B(r) = 1$ diverge se si approssima r_s . Considero ora il tempo proprio, ossia il tempo misurato da un osservatore solidale con la particella che approssima r_s (in questo riferimento la particella é ferma). In questo caso $\epsilon = 1$ e $p = s$ da cui

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{r_s}{r} \Rightarrow ds = -\frac{1}{\sqrt{r_s}} \sqrt{r} dr$$

Il tempo proprio é quindi

$$S_{r \rightarrow R} = -\frac{1}{\sqrt{r_s}} \frac{2}{3} \left(r^{2/3} - R^{2/3}\right)$$

che risulta finito sia per $R = r_s$ sia per $R < r_s$. Se si specializzano queste considerazioni al caso dei fotoni, $\epsilon = 0$, (che userei come mezzo di comunicazione fra due osservatori) si ottiene

$$\frac{dr}{dp} = 1 \Rightarrow \frac{dr}{dt} \frac{dt}{dp} = \frac{dr}{dt} \frac{1}{B}$$

da cui

$$\begin{aligned} dt &= \frac{r dr}{r_s - r} \quad \text{per fotoni entranti} \\ dt &= \frac{r dr}{r - r_s} \quad \text{per fotoni uscenti} \end{aligned}$$

Considero i fotoni entranti: integrando

$$\frac{dt}{dr} = -1 + \frac{r_s}{r_s - r}$$

ottengo un'espressione divergente per $r \rightarrow r_s$. Analogamente un fotone creato in $r < r_s$ impiega un tempo coordinato infinito per oltrepassare il raggio di Schwarzschild. Questo discorso significa che c'è una singolarità temporale fra l'interno e l'esterno del raggio di Schwarzschild e che questa singolarità riguarda il tempo coordinato. Se utilizzo il tempo proprio questa singolarità sparisce e ciò impone di distinguere fra singolarità fittizie e singolarità fisiche: una singolarità si dice fittizia se sparisce con un opportuno cambio di coordinate mentre è fisica se è ineliminabile. Vedremo fra poco che $r = r_s$ è una singolarità fittizia mentre $r = 0$ è una singolarità fisica. Per discriminare tra singolarità fittizie e singolarità fisiche cerco degli invarianti per diffeomorfismi della metrica di Schwarzschild nel vuoto. Gli invarianti che posso costruire sono i seguenti:

$$\begin{aligned} R &= R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 0 \\ R_{\mu\nu} &= 0 \\ R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} &= 12 \frac{r_s^2}{r^6} \end{aligned}$$

($R_{\mu\nu}$ è un tensore e non un invariante però se un tensore è zero in un sistema di riferimento allora è zero in tutti i sistemi di riferimento, il che equivale a dire che è un invariante.) Si vede quindi che $R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ è ben definito in $r = r_s$ mentre non lo è in $r = 0$ e questa proprietà non dipende dal sistema di riferimento. Di conseguenza $r = r_s$ è una singolarità fittizia mentre $r = 0$ è una singolarità fisica. Se la singolarità in $r = r_s$ dipende da un'infelice scelta della coordinata temporale si può tentare una nuova definizione del tempo che eviti la divergenza logaritmica incontrata prima. Al proposito si introducono le coordinate di Eddington-Finkelstein:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t + r_s \ln \left(\frac{r - r_s}{r_s} \right) \\ \tilde{r} &= r \\ \tilde{\theta} &= \theta \\ \tilde{\phi} &= \phi \end{aligned}$$

Da queste sostituzioni si ricava

$$dt = d\tilde{t} - \frac{r_s}{r - r_s} dr \Rightarrow dt^2 = d\tilde{t}^2 + \frac{r_s^2}{(r - r_s)^2} dr^2 - 2 \frac{r_s}{r - r_s} dr d\tilde{t}$$

e sostituendo nella metrica di Schwarzschild, raccogliendo tutti i pezzi in dr^2 (9.16) si ottiene

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) d\tilde{t}^2 - 2\frac{r_s}{r} d\tilde{t}dr - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (9.17)$$

che risulta ben definita $\forall r > 0$ e $\forall \tilde{t}$. Come detto prima la singolarit  in $r = 0$ rimane in quanto non eliminabile con un cambiamento di coordinate. In generale vale

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu \tilde{g}_{\mu\nu}$$

dove in questo caso la metrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$   la matrice simmetrica

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{r_s}{r} & -\frac{r_s}{r} & 0 & 0 \\ -\frac{r_s}{r} & 1 + \frac{r_s}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \end{pmatrix}$$

il cui determinante si trova agilmente essere $-r^4 \sin^2 \theta$. Poich  posso invertire una matrice se il suo determinante   diverso da zero si vede che questa matrice   singolare solo in $r = 0$ per cui ne concludo che $R_{\mu\nu} = 0$ in tutti i punti tranne che in $r = 0$ perch  non potendo invertire la matrice non posso calcolare i simboli di Christoffel e il tensore di Ricci.

Considero ora dei fotoni radiali: l'elemento di linea dovr  soddisfare le seguenti condizioni: $ds^2 = 0$ perch  ho fotoni, $d\Omega^2 = 0$ perch  sono radiali per cui (9.17) diventa

$$\left(1 + \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dr}{d\tilde{t}}\right)^2 + 2\frac{r_s}{r} \frac{dr}{d\tilde{t}} - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = 0$$

Definendo $v \equiv dr/d\tilde{t}$ ho due soluzioni per v :

$$v_{\mp} = \frac{-1}{1 \pm \frac{r_s}{r}}$$

La soluzione v_- indica fotoni entranti con velocit  c (r decresce con \tilde{t} e si   in unit  naturali) mentre la soluzione v_+ indica fotoni uscenti ($dr/d\tilde{t} > 0$) se $r > r_s$ mentre indica fotoni entranti ($dr/d\tilde{t} < 0$) se $r < r_s$. In conclusione si pu  dire che se $r < r_s$ non ci sono particelle ferme e non possono oltrepassare la "barriera" data da $r = r_s$ mentre fotoni radiali prodotti in $r > r_s$ scappano. Questi risultati sono coerenti sia con quanto ricavato per il cono di fuga dei fotoni sia con quanto era stato detto nella trattazione della causalit  in relativit  generale. Vista l'importanza di questi risultati, non solo sul piano teorico ma anche su quello "sperimentale-osservativo" legato all'esistenza di buchi neri riassumiamo i risultati ottenuti:

- i fotoni all'interno della sfera di raggio r_s non possono mai uscire
- se $r = r_s$ $v = 0$ per cui i fotoni creati in r_s rimangono sempre in r_s .
- considero un moto arbitrario non radiale sia per corpi massivi sia per fotoni nella regione $r < r_s$. Se si avesse $v = dr/d\tilde{t} > 0$ si otterrebbe $ds^2 < 0$ ma la causalit  richiede $ds^2 \geq 0$ per cui nella regione $r < r_s$ si pu  solo avere $dr/d\tilde{t} < 0$ indipendentemente dal fatto che le particelle stiano o meno seguendo geodetiche.
- tutte le particelle convergono in un tempo \tilde{t} finito alla singolarit  fisica $r = 0$ se ci si trova in $r < r_s$.

- $r = r_s$ definisce l'orizzonte degli eventi: é una superficie immaginaria che separa due zone tra le quali non c'è possibilità di scambio di informazione.
- $r = 0$ é una singolarità fisica: é un punto verso il quale tutte le traiettorie di tipo non spazio convergono con un incremento finito del loro parametro affine s .

Definisco *corpo nero* un corpo collassato al di sotto del suo raggio di Schwarzschild: il Sole diventerebbe un buco nero se tutta la sua massa fosse concentrata in un raggio minore di $3km$. Se considero un corpo nero non carico elettricamente e non ruotante posso individuare, a partire dall'elenco precedente, alcune sue caratteristiche:

- l'interno del buco nero é invisibile dall'esterno (se luce uscisse dal buco nero non sarebbe proprio nero).
- esiste una sezione di cattura finita $\sim r_s^2 (c/v_\infty)^2$.
- l'orizzonte degli eventi é definito da $r = r_s$.
- all'interno dell'orizzonte degli eventi c'è una singolarità fisica.
- i fotoni che cadono sul buco nero arrivano in un tempo di Schwarchild infinito e in un tempo di Eddington-Filkestein finito sul buco nero.
- i fotoni che nascono in $r \geq r_s$ ci mettono un tempo coordinato che tende all'infinito in modo logaritmico se $r \rightarrow r_s$ a lasciare il buco nero e il cono di fuga dei fotoni si chiude per $r > r_s$.
- il buco nero é comunque osservabile dall'esterno attraverso la metrica di Schwarzschild.

Le ultime due figure (brutte come le altre) di questo capitolo mettono a confronto la relazione fra (r, t) dove t é il tempo di Schwarchild e fra (r, \tilde{t}) dove \tilde{t} é il tempo di Eddington-Filkestein. Ciò che si nota é che con le coordinate di E.F. il cono di luce non ruota in modo discontinuo attraversando $r = r_s$ come accade con le coordinate di Schwarchild.

9.5.1 Il “buco bianco”

Giocando sull'arbitrio di cambiare coordinate si possono definire delle nuove coordinate legate a quelle di E.F. : si definisce

$$t^* = -\tilde{t} = t - r_s \ln \left| \frac{r - r_s}{r_s} \right|$$

Ripetendo l'analisi fatta prima per arrivare ai buchi nero si ottiene

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^{*2} + 2\frac{r_s}{r} dt^* dr - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2$$

e per i fotoni radiali si ha

$$v^* = \frac{dr}{dt^*} = \frac{r_s - r}{r_s + r} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \Rightarrow r = t^* + cost. \\ \Rightarrow 0 \text{ se } r < r_s & < 0 \text{ se } r > r_s \end{matrix}$$

ottenendo una situazione in cui si hanno solo fotoni uscenti per $r < r_s$ e uscenti entranti per $r > r_s$. Questa situazione é opposta a quella di un buco nero e perciò é detta soluzione di buco bianco. Va detto però che, mentre ci sono stringenti osservazioni che confermano l'esistenza

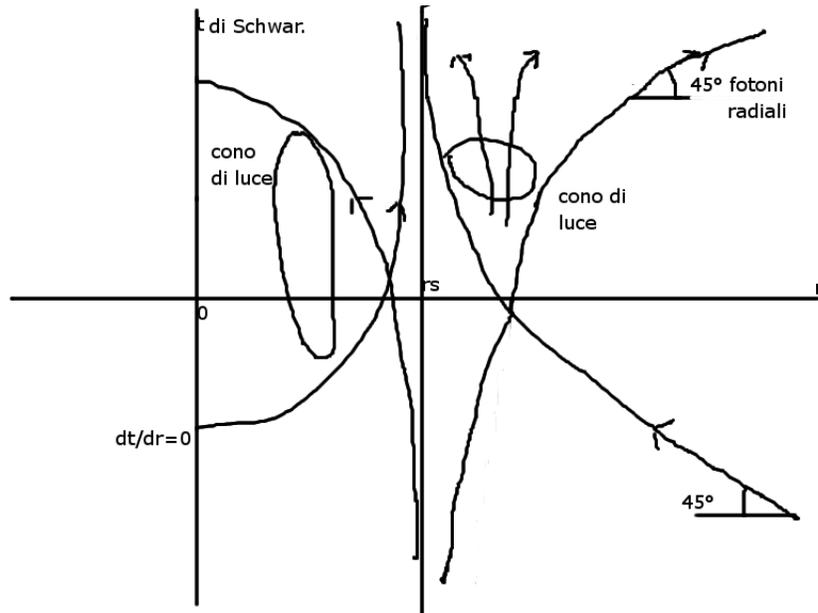


Figura 9.8: riassunto della relazione fra la coordinata radiale r e il tempo di Schwarzschild t . Si nota un salto improvviso del cono di luce dei fotoni quando si oltrepassa $r = r_s$. Le traiettorie vanno verso l'alto poiché il tempo è rappresentato in direzione verticale.

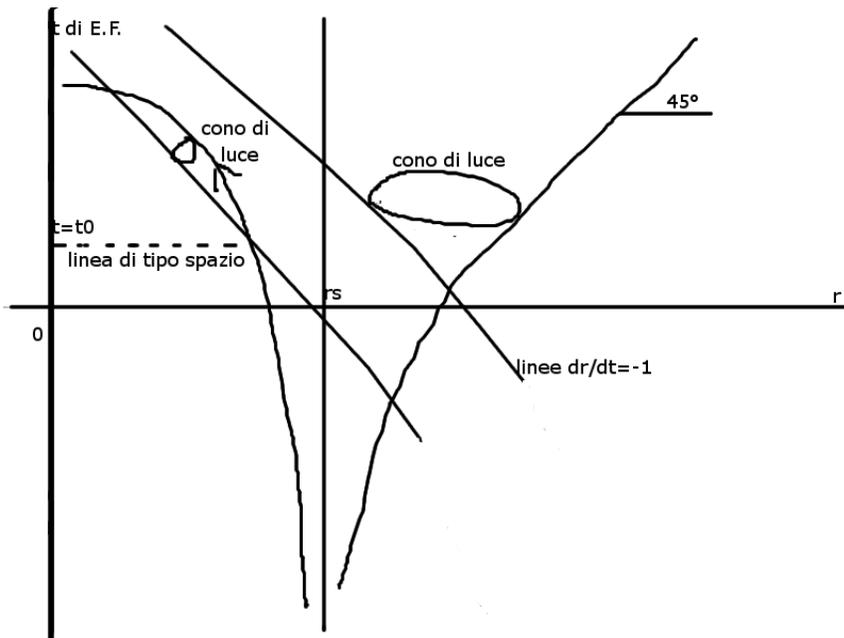


Figura 9.9: riassunto della relazione fra la coordinata radiale r e il tempo di E.F. \tilde{t} . Con queste coordinate non si ha più la discontinuità nel passaggio attraverso $r = r_s$. Anche in questo caso le traiettorie vanno verso l'alto.

di buchi neri nonché modelli di collasso che danno origine a buchi neri, non si conoscono meccanismi fisici che diano origine a buchi bianchi.

Concludiamo questo capitolo con un paio di definizioni di uso comune in relatività: una varietà (M, g) si dice completa per geodetiche se ogni geodetica può essere estesa per ogni valore del parametro affine s mentre una varietà si dice massimale se le sue geodetiche sono estendibili come prima o se terminano su una varietà fisica. Da questo punto di vista le metriche di Schwarzschild e di E.F. non sono massimali perché vi sono geodetiche che terminano su singolarità fittizie, ossia in $r = r_s$.

Esiste un'estensione massimale della metrica di Schwarzschild, detta estensione massimale di Kruskal, ma non sarà discussa qui. Con questo si chiude questo capitolo e nel prossimo si passerà ad un'altra soluzione delle equazioni di Einstein: le onde gravitazionali.

Capitolo 10

Onde elettromagnetiche e gravitazionali

In questo capitolo si cercheranno soluzioni delle equazioni di Einstein della forma di onde, analogamente alle onde elettromagnetiche della teoria elettromagnetica. Si cercheranno queste soluzioni nell'approssimazione di campo debole (in quanto sono effettivamente deboli) e si cercheranno le proprietà della particella associata a queste onde, il gravitone, confrontandole con le più note onde elettromagnetiche. Si arriverà a calcolare l'irraggiamento sotto forma di onde gravitazionali da parte di sistemi stellari (come le pulsar) e si confronterà il risultato ottenuto con i dati sperimentali. Si otterrà in questo modo una conferma indiretta dell'esistenza delle onde gravitazionali.

Il primo passo della trattazione consiste nel definire il problema e connetterlo a quanto già si è ricavato fin'ora.

10.1 Formalismo generale

Si è visto che anche la metrica $g_{\mu\nu}$ porta energia, per cui ad essa è associato un tensore energia-momento $T^{\mu\nu}$. Infatti vale $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$ e non $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ poiché il campo gravitazionale porta energia. Si vorrebbe costruire un tensore energia-momento $\tau^{\mu\nu}$ che sia conservato in modo ordinario ossia $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$. Per far ciò è necessario che $\tau^{\mu\nu}$ contenga sia il contributo della materia che quello del campo gravitazionale perciò poniamo $\tau^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}$ dove $T^{\mu\nu}$ è il tensore energia-momento associato ai campi di materia mentre $t^{\mu\nu}$ è il tensore energia-momento associato al campo gravitazionale. Poiché si è nel limite di campo debole, il che significa che la metrica $g_{\mu\nu}$ differisce poco dalla metrica piatta di Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, scompongo la metrica $g_{\mu\nu}$ nel seguente modo:

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \quad (10.1)$$

dove $h_{\mu\nu} \ll 1$ il che significa che trascuro eventuali quantità proporzionali a h^2 o successivi. In questa approssimazione la metrica inversa è

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}(x) \quad (10.2)$$

poiché $g_{\mu\nu}g^{\mu\nu} = 1$ a meno di termini di ordine h^2 . Allo stesso modo si sviluppano in serie il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura:

$$R_{\mu\nu}(g) = \sum_{n=1}^{\infty} R_{\mu\nu}^{(n)}(h) \quad \text{con} \quad R_{\mu\nu}^{(n)}(h) \sim h^n \quad (10.3)$$

$$R = \sum_n R^{(n)} \quad (10.4)$$

Nello sviluppo di questi tensori ci si ferma all'ordine uno in h . Cominciamo con il ricavare $R_{\mu\nu}(1)$: in generale vale

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\rho\nu}^{\rho} = \partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho} - \partial_{\nu}\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} + \underbrace{\Gamma\Gamma}_{O(h^2)}$$

Ricordo che si era ricavato l'utile risultato

$$\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\mu}\sqrt{g} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}g_{\alpha\beta}$$

dove $g = -\det g_{\mu\nu}$ quando si era dimostrata la conservazione covariante della carica elettrica. In questo caso vanno tenuti solo termini lineari in h e, dal momento che $\eta_{\mu\nu}$ é costante, si ottiene

$$\Gamma_{\rho\mu}^{\rho} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\partial_{\mu}g_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\partial_{\mu}h_{\alpha\beta} + O(h^2) = \frac{1}{2}\partial_{\mu}h_{\alpha}^{\alpha} + O(h^2)$$

Si segue la seguente convenzione: gli indici non covarianti per diffeomorfismi, come quelli di $\partial_{\mu}, \tau^{\mu\nu}$, vengono abbassati e alzati con la metrica piatta, mentre quelli covarianti vengono abbassati e alzati con $g_{\mu\nu}$.

Si é appena sviluppato $\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}$ in modo da poterlo inserire nell'espressione per $R_{\mu\nu}(1)$; rimane da sviluppare $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ in funzione della metrica per tenere solo i termini lineari in h :

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\rho(1)} = \frac{1}{2}\eta^{\rho\alpha}(\partial_{\nu}h_{\alpha\mu} + \partial_{\mu}h_{\alpha\nu} - \partial_{\alpha}h_{\mu\nu})$$

da cui

$$\partial_{\rho}\Gamma_{\mu\nu}^{\rho(1)} = \partial^{\alpha}\partial_{(\nu}h_{\mu)\rho} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu}$$

Unendo questo risultato con quello trovato per $\Gamma_{\rho\mu}^{\rho}$ si trova

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^{\alpha}\partial_{(\nu}h_{\mu)\rho} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\alpha}^{\alpha} \quad (10.5)$$

e di conseguenza

$$R^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)}\eta^{\mu\nu} = \partial^{\alpha}\partial^{\beta}h_{\alpha\beta} - \square h_{\alpha}^{\alpha} \quad (10.6)$$

La parte lineare del tensore di Einstein é definita come

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)}$$

e, dalle equazioni precedenti, si ricava

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^{\alpha}\partial_{(\nu}h_{\mu)\rho} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_{\nu}\partial_{\mu}h_{\alpha}^{\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\partial^{\alpha}\partial^{\beta}h_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square h_{\alpha}^{\alpha} \quad (10.7)$$

Arrivati a questo punto si definisce il tensore energia-momento associato al campo gravitazionale come

$$t_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{8\pi G} \left(G_{\mu\nu}^{(1)} - G_{\mu\nu} \right) = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \right) \quad (10.8)$$

Con queste definizioni le equazioni di Einstein possono essere scritte nella forma

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = R_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R^{(1)} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (10.9)$$

dove il tensore energia-momento associato al campo gravitazionale, $t_{\mu\nu}$ contiene termini di almeno ordine 2 in $h_{\mu\nu}$: il termine costante di ordine 0 dá zero poiché dá derivate nulle e il termine di ordine 1 é stato tolto nella definizione di $t_{\mu\nu}$.

Definisco

$$\tau^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} (T_{\rho\sigma} + t_{\rho\sigma}) \quad (10.10)$$

lo pseudo-tensore energia-momento totale del sistema (non é un tensore perché non é invariante per diffeomorfismi) in quanto funge da sorgente per $h_{\mu\nu}$ e coinvolge $h_{\mu\nu}$ stesso mentre $T_{\rho\sigma}(\phi, x_r, g_{\mu\nu})$ é il tensore energia-momento della materia che considera sia la materia stessa sia l'interazione fra materia e campo gravitazionale. Con i risultati fin qui ottenuti si possono dimostrare tutta una serie di proprietà legate a $\tau^{\mu\nu}$: il proseguimento di questa sezione é dedicato ad elencare tali proprietà legandole a risultati ricavati in precedenza.

1. $\tau^{\mu\nu} = \tau^{\nu\mu}$ per costruzione e vale $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$: si é visto prima che si ha $G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi G \tau_{\mu\nu}$ per cui posso verificare la condizione equivalente $\partial_\mu G^{\mu\nu(1)} = 0$ che é verificata perché vale identicamente $D_{m\mu} G^{\mu\nu} = 0$ e al primo ordine posso scambiare la derivata ordinaria con quella covariante. Poiché $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$ posso costruire quattro quantità conservate, una per ogni ν e definire quindi il 4-momento conservato P^μ :

$$P^\mu = \int d^3x \tau^{\mu 0} \quad (10.11)$$

2. A partire da $\tau^{\mu\nu}$ posso costruire un momento angolare conservato, analogamente a quanto fatto in relatività ristretta: definisco la densità di momento angolare $M^{\mu,\nu\rho}$ come

$$M^{\mu,\nu\rho} = \tau^{\mu\nu} x^\rho - \tau^{\mu\rho} x^\nu$$

da cui si ha il momento angolare conservato

$$J^{\mu\nu} = \int d^3x M^{0,\mu\nu} \quad (10.12)$$

3. $t_{\mu\nu}(h)$ contiene termini di ordine 2, 3... in $h_{\mu\nu}$ e ricordando i risultati del capitolo sulle teorie di Yang-Mills questo significa che c'è autointerazione del campo gravitazionale a differenza del caso elettromagnetico dove il tensore energia-momento del campo era quadratico nel campo di gauge A^μ per cui non c'erano termini di auto-interazione (il che si può dire più semplicemente ricordando che il fotone é neutro e quindi non sente interazione elettromagnetica).
4. $P^\mu, J^{\mu\nu}, M^{\rho,\mu\nu}$ sono covarianti per trasformazioni di Lorentz ma non per diffeomorfismi.

5. Fisicamente $T_{\mu\nu} = 0$ al di fuori di una regione compatta (ho materia concentrata in determinate zone che posso delimitare). Per quanto riguarda $t_{\mu\nu}$ posso fare il seguente ragionamento: per molti sistemi fisici $h_{\mu\nu} = a/|\vec{x}| = a/r$ (per Schwarzschild é cosí) e $t_{\mu\nu} \propto \partial^2 h^2$ da cui $t_{\mu\nu} \sim \partial^2(1/r)^2 \sim 1/r^4$. Con un tale andamento non ho problemi di convergenza poiché P^μ definito in (10.11) converge all'infinito.
6. Esistono molte alternative per $t_{\mu\nu}$: quella scelta é $t_{\mu\nu}$ come sorgente per $h_{\mu\nu}$.
7. Si puó calcolare P^μ in un modo piú profondo introducendo il duale di Hodgh. Prima ricordo un risultato di elettromagnetismo: la coservazione della 4-corrente $\partial_\mu j^\mu = 0$ vale poiché $j^\mu = \partial_\nu F^{\nu\mu}$ dove $F^{\nu\mu}$ é un tensore antisimmetrico. Piú in generale potrei associare ad un tensore $H_{\beta_1 \dots \beta_{D-\gamma}}$ a $D - \gamma$ indici un tensore $\tilde{H}^{\alpha_1 \dots \alpha_\gamma} \equiv * H$ a γ indici nel seguente modo:

$$H_{\beta_1 \dots \beta_{D-\gamma}} \rightarrow \tilde{H}^{\alpha_1 \dots \alpha_\gamma} \equiv * H = \epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_\gamma \beta_1 \dots \beta_{D-\gamma}} H_{\beta_1 \dots \beta_{D-\gamma}}$$

quindi la mappa duale $*$ associa ad ogni tensore a $D - \gamma$ indici un tensore a γ indici. Inoltre si ricorda che una forma chiusa é localmente esatta. Il duale di Hodgh permette di stabilire che, se vale $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$ allora esiste un tensore $Q^{\rho\mu,\nu}$ antisimmetrico in μ, ρ tale che $\tau^{\mu\nu} = \partial_\rho Q^{\rho\mu,\nu}$. Nel caso in questione vale l'equazione (10.9) con $\tau^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} = G^{\mu\nu(1)}/8\pi G$ e $G_{\mu\nu}^{(1)}$ é stato ricavato in (10.7). In questo caso si ottiene

$$Q^{\rho\mu,\nu} = \frac{1}{8\pi G} \left[\eta^{\nu[\mu} \partial^\rho h_\alpha^\alpha + \partial_\alpha h^{\alpha[\mu} \eta^{\rho]\nu} - \partial^{[\rho} h^{\mu]\nu} \right]$$

con le condizioni $Q^{\rho\mu,\nu} = -Q^{\mu\rho,\nu}$ e $Q^{[\rho\mu\nu]} = 0$. Si ha quindi $\tau^{\mu\nu} = \partial_\rho Q^{\rho\mu,\nu}$ e di conseguenza

$$P^\nu = \int d^3x \tau^{0\nu} = \int d^3x \partial_\rho Q^{\rho 0,\nu} = \int d^3x \partial_i Q^{i 0,\nu}$$

poiché $Q^{00,\nu} = 0$ a causa dell'antisimmetria. Il precedente integrale puó essere messo nella forma un integrale di superficie dove il raggio della superficie sferica tende a infinito: detta n^α la normale alla superficie e $d^3x = r^2 d\Omega$ si ha

$$P^\nu = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\text{sup. sfera}} Q^{i 0,\nu} n^\alpha r^2 d\Omega$$

8. Applico il risultato precedente all'energia: $E = P^0 = \int Q^{i 0 0}$. Dall'espressione generale per $Q^{\rho\mu,\nu}$ si ottiene

$$E = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi G} \int (\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}) n_j r^2 d\phi d\theta \sin \theta.$$

9. Se considero la metrica di Schwarzschild per $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ ottengo $\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj} = 4MG/r^2 n_j$ e inserendo quest'espressione nell'integrale che da l'energia E si ottiene $E = m = mc^2$. Si é ottenuto il notevole risultato che il parametro M che compare nella metrica di Schwarzschild é l'energia *totale* del sistema: é l'energia dell'oggetto che genera il campo piú l'energia di legame con il campo piú l'energia del campo stesso.
10. Dal punto precedente si vede che deve essere $P^0 \geq 0$ e $P^0 = 0$ solo se $T^{\mu\nu} = 0$ ovunque (il che significa che non ci sono campi di materia nella regione in cui si calcola l'energia) ma deve essere anche $t_{\mu\nu} = 0$ ossia non ci devono essere onde gravitazionali, ossia sorgenti di energia legate al campo stesso.

11. Si può mostrare che P^μ é invariante per diffeomorfismi che all'infinito si riducono all'identitá: se $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ con $\epsilon^\mu(x) \xrightarrow{|\vec{x}| \rightarrow \infty} 0$ allora $P'^\mu - P^\mu = 0$.
12. P^μ é un 4-vettore per ogni diffeomorfismo che mantiene la metrica piatta all'infinito quindi si trasforma come in relativitá ristretta.
13. Per sistemi distanti P^μ é additivo: negli urti impongo la conservazione dell'energia e dell'impulso.

10.2 Fotoni VS gravitoni

In questa sezione si opera un doppio confronto fra le onde elettromagnetiche e quelle gravitazionali ottenendo alcuni risultati notevoli e non ovvi come il valore 2 per lo spin del gravitone.

10.2.1 Onde elettromagnetiche 1

Intanto si inizia con le onde elettromagnetiche, utilizzando vari risultati ottenuti nel capitolo dedicato alla relativitá ristretta e nel capitolo dedicato all'invarianza di gauge in relativitá generale: si ricorda che le onde elettromagnetiche sono conseguenza delle equazioni di Maxwell, le quali si possono scrivere in forma covariante

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \quad \text{con} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

L'invarianza di gauge permette di fissare arbitrariamente la divergenza della connessione A^μ : si é visto che imponendo la condizione di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ resta un' indeterminazione residua $\delta A^\mu = \partial^\mu \Lambda$ con $\square \Lambda = 0$. Mettendo tutto insieme si può scrivere

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \square A^\nu - \underbrace{\partial^\mu \partial_\mu A^\mu}_0 = \square A^\nu = j^\nu$$

e proseguendo si ha anche

$$\square \underbrace{\partial_\nu A^\nu}_0 = \partial_\nu j^\nu = 0$$

Quindi nel vuoto, ossia se $j^\nu = 0$ posso scrivere il seguente sistema riassuntivo

$$\begin{aligned} \square A^\mu &= 0 && \text{equazione delle onde} \\ \partial_\mu A^\mu &= 0 && \text{gauge-fixing} \\ A'^\mu &= A^\mu + \partial^\mu \Lambda \quad \text{con} \quad \square \Lambda = 0 && \text{gauge residua} \end{aligned} \tag{10.13}$$

Per risolvere il sistema (10.13) conviene passare nello spazio di Fourier: indico con $\tilde{A}_\mu(k)$ la trasformata di Fourier di $A_\mu(x)$ ed esprimo $A_\mu(x)$ tramite l'antitrasformata di $\tilde{A}_\mu(k)$:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^4k \tilde{A}^\mu(k) e^{ikx}$$

dove $kx = k_\mu x^\mu = k_0 x^0 - \vec{k} \cdot \vec{x}$. La trasformazione di $\tilde{A}^\mu(k)$ é la solita: $\tilde{A}'^{\mu'}(k) = \Lambda^{\mu'\nu} \tilde{A}^\nu(k)$ e se si vuole che $A^\mu(x)^* = A^\mu(x)$ (che sia reale) basta chiedere la condizione equivalente $\tilde{A}_\mu^*(k) = \tilde{A}_\mu(-k)$. Inoltre nello spazio di fourier la dipendenza spazio-temporale é inglobata

nell'esponenziale della trasformata per cui $\partial_\mu \rightarrow ik$ e $\partial_\mu \partial^\mu = -k^2$. Nello spazio di Fourier il sistema (10.13) diventa

$$\begin{aligned} k^2 \tilde{A}^\mu(k) &= 0 && \text{equazione delle onde} \\ k_\mu \tilde{A}^\mu(k) &= 0 && \text{gauge-fixing} \\ \delta \tilde{A}^\mu(k) = k^\mu \Lambda &\text{ con } k^2 \Lambda = 0 && \text{gauge residua} \end{aligned} \quad (10.14)$$

Considero la prima equazione del sistema (10.14): questa equazione può essere riscritta come (lascio perdere la "tilda")

$$\left(k_0 - |\vec{k}|\right) \left(k_0 + |\vec{k}|\right) A^\mu(k) = 0$$

L'equazione appena scritta significa che $A^\mu(k)$ può essere diversa da zero solo in $k_0 = \pm |\vec{k}|$ dove si annullano le parentesi. Visto che $A^\mu(k)$ ha supporto solo in due punti posso scriverla come combinazione lineare di due delta di Dirac, una in $k_0 - |\vec{k}|$ e l'altra in $k_0 + |\vec{k}|$:

$$A_\mu(k) = \delta(k_0 - |\vec{k}|) \epsilon_\mu(\vec{k}) + \delta(k_0 + |\vec{k}|) \epsilon_\mu^*(-\vec{k}) \quad (10.15)$$

ricordando che vale $\epsilon_\mu^*(-\vec{k}) = \epsilon_\mu(\vec{k})$. La condizione di gauge del sistema (10.14) diventa $k_\mu \epsilon^\mu = 0$ e la gauge residua assume la forma $\epsilon^\mu = \epsilon^\mu + k^\mu \Lambda$ con $k^2 = 0$. Inserendo questo sviluppo per $A_\mu(k)$ nell'integrale per $A_\mu(x)$ si ottiene

$$A_\mu(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int d^3k \epsilon_\mu(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. \quad (10.16)$$

dove *c.c.* indica il complesso coniugato. $\epsilon_\mu(\vec{k})$ indica una quaterna di funzioni che diventano tre fissando la gauge e due fissando anche la gauge residua. Si vede dall'equazione (10.16) che $A_\mu(x)$ è sovrapposizione di onde elementari: la forma elementare di $A_\mu(x)$ è:

$$A_\mu(x) = \epsilon_\mu(k) e^{ikx} + c.c. \quad (10.17)$$

con le condizioni $k^\mu \epsilon_\mu = 0$ e $k^2 = 0$ da cui $k^0 = \omega = |\vec{k}|$. Applico questi risultati al tensore $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$: con A_μ dato da (10.17) si ottiene

$$F_{\mu\nu} = i(k_\mu \epsilon_\nu e^{ikx} - k_\nu \epsilon_\mu e^{ikx}) = i2k_{[\mu} \epsilon_{\nu]} e^{ikx}$$

Ricordando la struttura di $F_{\mu\nu}$ in termini dei campi elettici e magnetici ($F^{0i} = E^i$, $F^{ij} = B^k$) si possono calcolare nel caso delle onde elementari i seguenti invarianti che si ottengono da $F^{\mu\nu}$: in generale vale:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 2(B^2 - E^2) \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} &= -8\vec{E} \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Se si calcolano questi invarianti con $F^{\mu\nu}$ dati dalle onde elementari si ottiene

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} &= 0 \\ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} &= 0 \end{aligned}$$

Si è ottenuto che i campi elettrici e magnetici delle onde elementari sono perpendicolari tra loro e uguali in modulo (in unità naturali, altrimenti $|\vec{B}| = |\vec{E}|/c$ come si vede dimensionalmente. Se calcolo il prodotto scalare fra il vettore d'onda \vec{k} e il campo elettrico \vec{E} ottengo

$$\vec{k} \cdot \vec{E} = k^i F^{0i} = k^i (k_i \epsilon_0 - k_0 \epsilon_i) = |\vec{k}|^2 \epsilon_0 - k_0 \underbrace{k^i \epsilon_i}_0 = \epsilon_0 k^2 = 0$$

Alla fine si sono ottenuti i risultati noti sui campi elettromagnetici delle onde: il campo elettrico e il campo magnetico di un'onda elettromagnetica sono perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda stessa e sono perpendicolari fra di loro: se definisco il modulo di \vec{E} e la sua direzione (o altre due quantità indipendenti) ho completamente definito il campo elettromagnetico dell'onda per cui ho due gradi di libertà fisici ossia due gradi di polarizzazione.

10.2.2 Onde gravitazionali 1

Come detto nella sezione precedente, le onde gravitazionali sono deboli e come tali vanno cercate come soluzione delle equazioni di Einstein nell'approssimazione di campo debole. Si ricorda brevemente che si era posto

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}(x) + h_{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

e la metrica inversa é

$$g^{\mu\nu}(x) = \eta^{\mu\nu}(x) - h^{\mu\nu}(x) \quad \text{con} \quad h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}h_{\alpha\beta}$$

Quando si erano ricavate le equazioni di Einstein si era ottenuta una forma equivalente delle stesse, che rendeva palese il fatto che in assenza di campi di materia il tensore di Ricci $R_{\mu\nu} = 0$:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \right)$$

mentre, usando la notazione della sezione precedente, la forma standard delle equazioni di Einstein é

$$G_{\mu\nu}^{(1)} = 8\pi G (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}(h)) = 8\pi G \tau_{\mu\nu}$$

Ora $t_{\mu\nu}(h)$, che é il tensore energia-momento associato al campo gravitazionale, per come é definito (vedi sez. precedente) é quadratico in h e lo trascuro. Inoltre suppongo che l'autoinfluenza gravitazionale delle onde gravitazionali sia trascurabile e non la considero: questa condizione si esprime brevemente con $T_{\mu\nu}(\phi, g_{\mu\nu}) \rightarrow T_{\mu\nu}(\phi, \eta_{\mu\nu})$ e continuando ad applicare la ricetta minimale al contrario $D_\mu T^{\mu\nu} = 0 \rightarrow \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Si puó scrivere quindi

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2}S_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad S_{\mu\nu} = 16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\mu}T^\alpha{}_\alpha \right)$$

Si era anche ottenuto in (10.5)

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = \partial^\alpha \partial_{(\nu} h_{\mu)\rho} - \frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu \partial_\mu h^\alpha{}_\alpha$$

Si é visto che la variazione dei tensori sotto diffeomorfismi infinitesimi é legata alle derivate di Lie: $\delta_\Lambda g_{\mu\nu} = -L_\Lambda g_{\mu\nu} = -2D_{(\mu}\Lambda_{\nu)}$ per cui vale anche $\delta_\Lambda h_{\mu\nu} = -2\partial_{(\nu}\Lambda_{\mu)}$. Si verifica che $R_{\mu\nu}^{(1)}$ é invariante per il diffeomorfismo $\delta_\Lambda h_{\mu\nu} = -2\partial_{(\nu}\Lambda_{\mu)}$. Per fissare la gauge utilizzo la gauge armonica già discussa in precedenza: si era visto che la gauge armonica é equivalente ad imporre la quattro condizioni $\partial_\mu(\sqrt{g}g^{\mu\nu}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{g}\partial_\mu g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\partial_\mu\sqrt{g} = 0$. Tenendo solo i termini lineari in h la condizione di gauge diventa

$$-\partial_\mu h^{\mu\nu} + \partial^\nu \frac{1}{2}h^\alpha{}_\alpha$$

e, inserendo quest'espressione in $R_{\mu\nu}^{(1)}$ si ottiene

$$R_{\mu\nu}^{(1)} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} \Rightarrow \square h_{\mu\nu} = -S_{\mu\nu}$$

Quindi ricapitolando la condizione di gauge é $\partial_\mu h^{\mu\nu} = 1/2\partial^\nu h_\alpha^\alpha$ e la gauge residua $\delta h_{\mu\nu} = -\partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu$ inserita nella condizione di gauge assume la forma $\delta h_{\mu\nu} = -2\partial_{(\mu}\Lambda_{\nu)}$ con $\square\Lambda^\mu = 0$. Riassumendo si ha il seguente sistema (pongo $16\pi G = 1$)

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} &= -S_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T_\lambda^\lambda \Rightarrow S_\lambda^\lambda = -T_\lambda^\lambda \\ \partial_\mu h^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\partial^\nu h_\alpha^\alpha \quad \text{gauge-fixing} \\ \delta h_{\mu\nu} &= -2\partial_{(\mu}\Lambda_{\nu)} \quad \text{con} \quad \square\Lambda^\mu = 0 \quad \text{gauge residua} \end{aligned} \quad (10.18)$$

Nel vuoto si ha $\square h_{\mu\nu} = 0$ per cui anche nel caso delle onde gravitazionali posso esprimere $h_{\mu\nu}$ come sovrapposizione di onde elementari: passando nello spazio di Fourier posso, analogamente a quanto fatto per il caso elettromagnetico, sostituire il sistema (10.18) con il seguente

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k})e^{ikx} + c.c. \\ k_\mu \epsilon^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}k^\nu \epsilon_\alpha^\alpha \\ \delta\epsilon^{\mu\nu} &= k^{(\mu}\Lambda^{\nu)} \quad \text{con} \quad k^2 = 0 \end{aligned} \quad (10.19)$$

10.2.3 Onde elettromagnetiche 2

Considero un'onda elettromagnetica che si propaga lungo l'asse z : $\vec{k} = (0, 0, \vec{k})$ ossia, visto che $k^2 = k_0^2 - k_z^2 = 0$ il 4-vettore di propagazione é $k^\mu = (k, 0, 0, k)$ e $A_\mu(x) = \epsilon_\mu e^{ikx} + c.c.$ Esplicitando la condizione di gauge $\epsilon^\mu k_\mu = 0$ si ottiene $(\epsilon_0 - \epsilon_3)k = 0$ per cui la componente zero e la componente zeta del vettore di polarizzazione ϵ_μ devono essere uguali mentre la seconda e la terza componente non sono fissate ossia é della forma $\epsilon^\mu = (P, \epsilon^1, \epsilon^2, P)$. La gauge residua $\epsilon'^\mu = \epsilon^\mu + k^\mu \Lambda$ diventa $\epsilon'^\mu = (k, 0, 0, k)\Lambda$ e se $\Lambda = -p/k$ ottengo $\epsilon'^\mu = (0\epsilon^1, \epsilon^2, 0)$, che é il solito vettore di polarizzazione a due gradi di libertá perpendicolare alla direzione di propagazione.

Introduco ora il concetto di elicitá: considero una direzione di propagazione $\vec{k}/|\vec{k}|$ e considero il gruppo delle rotazioni nel piano perpendicolare alla direzione $\vec{k}/|\vec{k}|$. In meccanica quantistica le rappresentazioni unidimensionali ϕ sotto rotazioni nel piano trasformano come $\phi' = e^{in\theta}\phi$ dove n é un numero, multiplo di $1/2$, detto elicitá. In meccanica quantistica gli autovalori dell' elicitá sono gli stessi dello spin in quanto l'elicitá é la proiezione dello spin rispetto alla direzione di moto.

In generale sotto diffeomorfismi $\epsilon'^\mu = \Lambda_\nu^\mu \epsilon^\nu$, se considero rotazioni attorno all'asse z la matrice di trasformazione assume la forma

$$\begin{pmatrix} \epsilon'_1 \\ \epsilon'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{pmatrix}$$

Costruisco le combinazioni $e_\pm = \epsilon_1 \mp i\epsilon_2$ e applico la trasformazione scritta sopra a ϵ_1 e ϵ_2 ottenendo

$$e'_- = \epsilon_1 + i\epsilon_2 = \epsilon_1(\cos\theta - i\sin\theta) + \epsilon_2(\sin\theta + i\cos\theta) = \epsilon_1 e^{-i\theta} + i\epsilon_2 e^{-i\theta} = e_- e^{-i\theta}$$

Analogamente si ottiene $e'_+ = \epsilon'_1 - i\epsilon'_2 = e_+ e^{i\theta}$. Confrontando con $\phi' = e^{in\theta}\phi$ si vede che l'elicitá dei fotoni fisici può essere solo ± 1 .

10.2.4 Onde gravitazionali 2

Come prima il 4-vettore di propagazione lungo l'asse z é $k^\mu = (k, 0, 0, k)$. La condizione di gauge data in (10.19) consiste di 4 equazioni, una per ogni ν , e, tenendo conto che dalla forma di k^μ solo i termini con $\mu = 0, \mu = 3$ danno prodotti non nulli, esplicitando le componenti si ottiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{01} + \epsilon_{31} &= 0 \\ \epsilon_{02} + \epsilon_{32} &= 0 \\ \epsilon_{00} + \epsilon_{30} &= \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^\alpha \\ \epsilon_{03} + \epsilon_{33} &= \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^\alpha\end{aligned}$$

da cui, utilizzando $k_\nu(\epsilon_{0\nu} + \epsilon_{3\nu}) = 1/2k_\nu\epsilon_\alpha^\alpha$ che si ricava sempre dalla condizione di gauge, si ottiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{01} &= -\epsilon_{31} \\ \epsilon_{02} &= -\epsilon_{32} \\ \epsilon_{03} &= -\frac{1}{2}(\epsilon_{00} - \epsilon_{33}) \\ \epsilon_{22} &= -\epsilon_{11}\end{aligned}$$

Ora considero la gauge residua $\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + k_\mu\beta_\nu + k_\nu\beta_\mu$. In particolare $\epsilon'_{\mu 0} = \epsilon_{\mu 0} + k_0\beta_\mu + k_\mu\beta_0 = 0$ poiché β_μ é arbitrario. Quindi si può porre $\epsilon_{0\mu} = 0$, che corrisponde a 4 quantità nulle, e inserendo questo risultato nel sistema precedente si ottiene

$$\begin{aligned}\epsilon_{31} &= 0 \\ \epsilon_{32} &= 0 \\ \epsilon_{33} &= 0\end{aligned}$$

Ricapitolando: i gradi iniziali di libertà delle equazioni di Einstein sono 10 poiché $g_{\mu\nu}$ é una matrice simmetrica; imponendo la gauge residua si sono eliminati quattro gradi di libertà e inserendo tali risultati nella gauge si sono eliminati altri tre gradi di libertà; restano quindi tre quantità indipendenti però c'è anche il vincolo $\epsilon_{22} = -\epsilon_{11}$ per cui i gradi di libertà fisici sono due. Anche nel caso dei gravitoni ho 2 possibili stati di polarizzazione e il tensore di polarizzazione assume la forma

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ 0 & \epsilon_{12} & -\epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare l'elicità associata ai gravitoni procedo come nel caso elettromagnetico: si deve calcolare $\epsilon'_{\mu\nu} = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \epsilon_{\alpha\beta}$ con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Svolgendo i calcoli si trova

$$\begin{aligned}\epsilon'_{11} &= \cos 2\theta \epsilon_{11} + \sin 2\theta \epsilon_{12} \\ \epsilon'_{12} &= \cos 2\theta \epsilon_{11} + \sin 2\theta \epsilon_{12}\end{aligned}$$

e, definendo $e_{\pm} = \epsilon_{11} \mp i\epsilon_{12}$ si ottiene infine

$$e_{\pm} = e^{\pm 2i\theta} e_{\pm}$$

da cui si ricava il notevole risultato che il gravitone, la particella associata alle onde gravitazionali, ha spin 2.

10.3 Il tensore energia momento

In questa sezione si calcolerá il tensore energia-momento associato alle onde, sia elettromagnetiche che gravitazionali, per poi utilizzare i risultati ottenuti al calcolo della potenza irradiata sotto forma di onde da parte di un sistema fisico. Come fatto nella sezione precedente si procederá in parallelo per le onde elettromagnetiche e quelle gravitazionali, cominciando con il caso elettromagnetico che é piú semplice.

10.3.1 Caso elettromagnetico

In sintesi, per le onde elettromagnetiche, i risultati della sezione precedente sono

$$\begin{aligned}A_{\mu}(x) &= \epsilon_{\mu} e^{ikx} + c.c. \\ k^2 &= 0 \\ \epsilon^{\mu} k_{\mu} &= 0\end{aligned}\tag{10.20}$$

Il tensore energia-momento associato al campo assume la stessa forma che si ha in relativitá ristretta (no auto-interazione delle onde)

$$T_{\mu\nu}^{em} = F_{\mu}^{\rho} F_{\rho\nu} + \frac{1}{4} \eta_{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}\tag{10.21}$$

Sempre nella sezione precedente si é visto che $F_{\mu\nu}$ associato ad un onda elettromagnetica é della forma

$$F_{\mu\nu} = i(k_{\mu} \epsilon_{\nu} - k_{\nu} \epsilon_{\mu}) e^{ikx} + c.c.\tag{10.22}$$

Con $F_{\mu\nu}$ dato dalla (10.22) si trova $F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} = 0$ per cui si calcola $T_{\mu\nu}^{em}$ come media temporale di $F_{\mu}^{\rho} F_{\rho\nu}$. Calcolare una media temporale significa trascurare i termini oscillanti perché, mediati su molti periodi, danno contributo nullo al tensore energia-momento. Si ha quindi (esplicitando i complessi coniugati)

$$\begin{aligned}T_{\mu\nu} &= \langle F_{\mu\rho} F_{\nu}^{\rho} \rangle \\ &= \left\langle -\frac{1}{i^2} \left[k_{\mu} \left(\epsilon_{\rho} e^{ikx} - \epsilon_{\rho}^* e^{-ikx} \right) - k_{\rho} \left(\epsilon_{\mu} e^{ikx} - \epsilon_{\mu}^* e^{-ikx} \right) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \left[k^{\rho} \left(\epsilon_{\nu} e^{ikx} - \epsilon_{\nu}^* e^{-ikx} \right) - k_{\nu} \left(\epsilon^{\rho} e^{ikx} - \epsilon^{\rho*} e^{-ikx} \right) \right] \right\rangle \\ &= \langle k_{\mu} k_{\nu} \left(\epsilon^2 e^{2ikx} + \epsilon^{*2} e^{-2ikx} - 2\epsilon^{\alpha*} \epsilon_{\alpha} \right) \rangle \\ &= -2k_{\mu} k_{\nu} \epsilon^{\alpha*} \epsilon_{\alpha}\end{aligned}$$

dove la penultima riga deriva da notare che nei 4 prodotti derivanti dal passaggio precedente solo il prodotto del primo e dell'ultimo termine non danno zero poiché vale $k^2 = k^\mu k_\mu = 0$ e $\epsilon^\mu k_\mu = 0$ mentre l'ultimo termine deriva dall'eliminare i termini oscillanti nel calcolo della media. Quindi il primo risultato parziale é

$$T_{\mu\nu}^{em} = -2k_\mu k_\nu \epsilon^{\alpha*} \epsilon_\alpha \quad (10.23)$$

che é invariante per la trasformazione di gauge residua $\epsilon'^\alpha = \epsilon^\alpha + k^\alpha \Lambda$. Il 4-vettore energia-momento k^μ di un fotone soddisfa $k^2 = 0$: posto $k^0 = \omega$ di ha $|\vec{k}|^2 = \omega^2$ per cui posso $k^\mu = \omega(1, \vec{n})$ con $\vec{n} = \vec{k}/\omega$ da cui $|\vec{n}| = 1$. La condizione di gauge $k^\mu \epsilon_\mu = 0$ diventa $\omega k^0 = k^i \epsilon^i$ da cui $\epsilon^0 = k^i \epsilon^i / \omega = n^i \epsilon^i$. Con queste equazioni posso riscrivere (10.23) come

$$T_{\mu\nu} = -2k_\mu k_\nu [n^i n^j \epsilon^{i*} \epsilon^j - \epsilon^{*i} \epsilon^j] = 2k_\mu k_\nu \epsilon^{i*} \epsilon^j \Lambda_{ij} \quad (10.24)$$

dove $n^i n^j \epsilon^{i*} \epsilon^j$ é il pezzo temporale, mentre $\epsilon^{*i} \epsilon^j$ é il pezzo spaziale. Inoltre si é introdotta la matrice simmetrica $\Lambda_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j$ che soddisfa $\Lambda_{ij} n^j = 0$. Inoltre $tr \Lambda_{ij} = 2$ poiché il fotone ha due polarizzazioni.

Ricordando che dalla definizione di n^i si ha $k^i = \omega n^i$ l'equazione (10.24) é equivalente a

$$T_{em}^{\mu\nu} = 2n^\mu n^\nu \omega^2 \epsilon^{*i} \epsilon^j \Lambda_{ij} = \langle n^\mu n^\nu \partial_0 A^i \partial_0 A^j \Lambda_{ij} \rangle \quad (10.25)$$

dove l'ultimo passaggio deriva dalla forma di A_μ : derivare rispetto al tempo equivale a moltiplicare per $\omega = k^0$ (vedi (10.20)). Quindi si é riusciti ad esprimere il tensore energia-momento di un'onda in funzione del potenziale vettore A_μ . Per il momento ci si ferma qui e si tenta un'analisi simile per le onde gravitazionali.

10.3.2 Caso gravitazionale

Si era visto che il tensore energia-momento associato al campo gravitazionale $t_{\mu\nu}$ é dell'ordine di h^2 dove h indica lo scostamento della metrica $g_{\mu\nu}$ dalla metrica piatta. Inoltre si era ricavata una forma esplicita per $t_{\mu\nu}$ in funzione del tensore di Ricci e dello scalare di curvatura (vedi 10.8). Esplicitando $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ si ha

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu}^{(1)} - R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R^{(1)} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right) \quad (10.26)$$

Questa espressione puó essere semplificata con una serie di approssimazioni: non considero termini nello sviluppo dei vari tensori oltre l'ordine 2. Questo significa che $R_{\mu\nu} = R^{(1)\mu\nu} + R^{(2)\mu\nu} \Rightarrow R_{\mu\nu}^{(1)} - R_{\mu\nu} = -R^{(2)\mu\nu}$. Inoltre per la metrica vale

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \Rightarrow g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$$

Inoltre per le onde piane la parte lineare in h del tensore di Ricci $R_{\alpha\beta}^{(1)} = 0$: sviluppando la metrica e il tensore di Ricci e tenendo solo i pezzi di ordine 2 in h l'equazione (10.26) diventa

$$T_{\mu\nu}^{grav} = \langle t_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{8\pi G} \left[-R_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} R_{\alpha\beta}^{(2)} \eta^{\alpha\beta} \right] \quad (10.27)$$

Nella sezione precedente si erano ricavati i seguenti risultati sulle onde gravitazionali (vedi (10.19)):

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}(x) &= \epsilon_{\mu\nu}(\vec{k}) e^{ikx} + c.c. \\ k^\mu \epsilon_{\mu\nu} &= \frac{1}{2} k^\nu \epsilon_\alpha^\alpha \\ k^2 &= 0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

Per semplificare il calcolo di $T_{\mu\nu}^{grav}$ (poiché coinvolge il tensore di Ricci che non é immediato da calcolare) é utile procedere in modo alternativo: $R_{\mu\nu}^{(2)} \sim \partial h \partial h \sim k k \epsilon \epsilon$. I soli termini a dare contributo non nullo sono quelli della forma $\epsilon^* \epsilon$ poiché gli eltri contengono termini oscillanti che si mediano a zero. Dunque i termini non nulli posso essere solo del tipo

$$R_{\mu\nu}^{(2)} \sim k_\mu k_\nu \left(\epsilon^{\alpha\beta*} \epsilon_{\alpha\beta} + b |\epsilon_\alpha^\alpha|^2 \right)$$

Si richiede che $T_{\mu\nu}^{grav}$ sia invariante per la trasformazione di gauge residua $\epsilon'_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + k_{(\mu} \Lambda_{\nu)}$. Richiedendo quest'invarianza per $R_{\mu\nu}^{(2)}$ si ha

$$\delta R_{\mu\nu}^{(2)} = c k_\mu k_\nu \left(2\epsilon_{\alpha\beta} \delta \epsilon^{\alpha\beta} + 2b \epsilon_\alpha^\alpha \delta \epsilon_\alpha^\alpha \right) = c k_\mu k_\nu \left(2\epsilon_{\alpha\beta} k^\alpha \Lambda^\beta + 2b \epsilon_\alpha^\alpha k^\mu \Lambda_\mu \right) = 0$$

Ricordando che vale $k^\mu \epsilon_{\mu\nu} = \frac{1}{2} k^\nu \epsilon_\alpha^\alpha$ e sostituendolo nell'equazione precedente si vede che se si vuole $\delta R_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ allora si deve richiedere che il coefficiente $b = -1/2$. Facendo i calcoli in modo piú preciso si ottiene

$$R_{\mu\nu}^{(2)} = -\frac{k_\mu k_\nu}{2} \left[\epsilon^{\alpha\beta*} \epsilon_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} |\epsilon_\alpha^\alpha|^2 \right]$$

Si vede immediatamente che $\eta^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}^{(2)} = 0$ poiché $k^2 = 0$ per cui alla fine si ottiene da (10.27)

$$T_{\mu\nu}^{grav} = \frac{1}{16\pi G} k_\mu k_\nu \left[\epsilon^{*\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu} - \frac{1}{2} |\epsilon_\alpha^\alpha|^2 \right] \quad (10.29)$$

Nella sezione precedente si era giunti al sistema (10.18):

$$\begin{aligned} \square h_{\mu\nu} &= -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T_\Lambda^\Lambda \right) \\ \partial_\mu h^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \partial_\nu h_\alpha^\alpha \quad \text{gauge-fixing} \\ \delta h^{\mu\nu} &= 2\partial^{(\mu} \Lambda^{\nu)} \quad \text{gauge residua} \end{aligned} \quad (10.30)$$

Per continuare l'analisi definiamo

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h_\alpha^\alpha \Rightarrow \bar{h}_\alpha^\alpha = -h_\alpha^\alpha$$

In termini di $\bar{h}^{\mu\nu}$ il sistema (10.30) diventa

$$\begin{aligned} \square \bar{h}_{\mu\nu} &= -16\pi G T_{\mu\nu} \\ \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} &= 0 \quad \text{gauge-fixing} \\ \delta \bar{h}^{\mu\nu} &= 2\partial^{(\mu} \Lambda^{\nu)} - \eta^{\mu\nu} \partial^\alpha \Lambda_\alpha \quad \square \Lambda = 0 \quad \text{gauge residua} \end{aligned} \quad (10.31)$$

Si definisce in modo analogo

$$\bar{\epsilon}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \epsilon_\alpha^\alpha \Rightarrow k^\mu \bar{\epsilon}_{\mu\nu} = 0$$

mentre la trasformazione di gauge-residua diventa

$$\bar{\epsilon}_{\mu\nu} \rightarrow \epsilon_{\nu\mu} - k^\mu \Lambda^\nu - k^\nu \Lambda^\mu + \eta^{\mu\nu} k^\alpha \Lambda_\alpha$$

In termini di $\bar{\epsilon}_{\mu\nu}$ $T_{\mu\nu}^{grav}$ dell'equazione (10.29) diventa

$$T_{\mu\nu}^{grav} = \frac{1}{16\pi G} k_\mu k_\nu \left[\bar{\epsilon}^{*\mu\nu} \bar{\epsilon}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} |\bar{\epsilon}_\alpha^\alpha|^2 \right] \quad (10.32)$$

come si verifica agilmente. Il parametro Λ_α che definisce la trasformazione di gauge residua é arbitrario (basta che sia soddisfatto $\square\Lambda = 0$) Per comoditá opero questa scelta:

$$\begin{aligned} \Lambda^i &= 0 \\ \Lambda^0 &= \frac{1}{3\omega} \bar{\epsilon}^{kk} \end{aligned}$$

Definisco un nuovo tensore di polarizzazione $\tilde{\epsilon}_{\mu\nu}$ ottenuto applicando la trasformazione di gauge residua a $\bar{\epsilon}_{\mu\nu}$ con Λ_μ dato nelle equazioni precedenti. Quindi:

$$\tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = \bar{\epsilon}_{\nu\mu} - k^\mu \Lambda^\nu - k^\nu \Lambda^\mu + \eta^{\mu\nu} k^\alpha \Lambda_\alpha$$

da cui, specializzando Λ come detto prima si ha

$$\tilde{\epsilon}^{ij} = \bar{\epsilon}^{ij} - \delta^{ij} \omega \Lambda^0 = \bar{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \bar{\epsilon}^{kk} = \bar{\epsilon}^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \bar{\epsilon}^{kk} \Rightarrow \tilde{\epsilon}^{ii} = 0$$

Quindi, in termini di $\tilde{\epsilon}$ l'equazione (10.32) diventa

$$T_{\mu\nu}^{grav} = \frac{1}{16\pi G} k_\mu k_\nu \left[\tilde{\epsilon}^{*\mu\nu} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} |\tilde{\epsilon}_\alpha^\alpha|^2 \right] \quad (10.33)$$

con le condizioni

$$k_\mu \tilde{\epsilon}^{\mu\nu} = 0 \quad \tilde{\epsilon}^{ii} = 0$$

Queste condizioni, esplicitate, si scrivono

$$k^0 \tilde{\epsilon}_{00} + k^i \tilde{\epsilon}_{i0} = 0 \quad k^0 \tilde{\epsilon}_{0i} + k^j \tilde{\epsilon}_{ji} = 0$$

Dalla seconda si ricava

$$\tilde{\epsilon}_{0i} = -n^j \tilde{\epsilon}_{ji} \quad \text{con} \quad n^j = k^j / k^0$$

e inserendo questo risultato nella prima si trova

$$\tilde{\epsilon}_{00} = n^i n^j \tilde{\epsilon}_{ji}$$

inoltre poi ché la traccia spaziale $\tilde{\epsilon}^{ii} = 0$ si ha $\tilde{\epsilon}_\alpha^\alpha = \tilde{\epsilon}_0^0$. Inserendo questi risultati nell'espressione per $T_{\mu\nu}^{grav}$ si trova

$$\left[\tilde{\epsilon}^{*\mu\nu} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} |\tilde{\epsilon}_\alpha^\alpha|^2 \right] = \frac{1}{2} |\tilde{\epsilon}_{00}|^2 - 2\tilde{\epsilon}^{0i*} \tilde{\epsilon}^{0i} + \tilde{\epsilon}^{*ij} \tilde{\epsilon}^{ij}$$

Introducendo la quantitá

$$\Lambda^{ijlm} = \delta^{il} \delta^{ij} - 2n^i n^j \delta^{jm} + \frac{1}{2} n^i n^j n^l n^m$$

l'equazione precedente diventa

$$\left[\tilde{\epsilon}^{*\mu\nu} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} |\tilde{\epsilon}_\alpha^\alpha|^2 \right] = \tilde{\epsilon}^{*ij} \tilde{\epsilon}^{*lm} \Lambda^{ijlm}$$

Per cui si ha infine

$$T_{\mu\nu}^{grav} = \frac{n_\mu n_\nu}{16\pi G} \omega^2 \tilde{\epsilon}^{*ij} \tilde{\epsilon}^{*lm} \Lambda^{ijlm} = \frac{n_\mu n_\nu}{32\pi G} \partial_0 \tilde{h}^{ij} \partial_0 \tilde{h}^{lm} \Lambda^{ijlm} \quad (10.34)$$

dove si é definito

$$\tilde{h}^{ij} = h^{ij} - \frac{1}{3} \bar{h}^{kk}$$

10.4 Calcolo della potenza irradiata

Nella sezione precedente si é riusciti ad esprimere il tensore energia-momento di un'onda elettromagnetica in funzione del potenziale vettore A_μ e di un'onda gravitazionale in funzione della metrica $h_{\mu\nu}$. In questa sezione si calcolerá la potenza irradiata da un sistema fisico attraverso onde elettromagnetiche e gravitazionali. Nel caso delle onde gravitazionali si calcolerá la potenza emessa in un caso particolare di una pulsar. Per portare a termine questo compito si introdurranno vari strumenti matematici, quali la convoluzione e la funzione di Green e se ne ricaveranno le proprietà essenziali. In ogni caso il primo passo consisterá semplicemente nel fissare i requisiti fondamentali dei sistemi fisici dei quali poi si calcoleranno le potenze irradiate sotto forma di onde elettromagnetiche e gravitazionali.

10.4.1 Definizione del sistema

Si considerano cariche, per il caso elettromagnetico, o materia, per il caso gravitazionale, contenute in una sfera di raggio R : per il caso elettromagnetico si richiede

$$j^\mu(x) \neq 0 \Leftrightarrow |\vec{x}| < R$$

e vale la solita equazione

$$\square A_\mu = j_\mu \quad \text{con} \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Nel caso gravitazionale si richiede

$$T^{\mu\nu}(x) \neq 0 \Leftrightarrow |\vec{x}| < R$$

con l'equazione (10.31)

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G T_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0$$

Inoltre le soluzioni delle equazioni appena scritte nel vuoto sono onde piane per cui richiedo una periodicitá delle soluzioni:

$$\begin{aligned} j_\mu(\vec{x}, t + T) &= j_\mu(x, t) \\ T_{\mu\nu}(\vec{x}, t + T) &= T_{\mu\nu}(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

dove T é il periodo dell'onda.

Il programma che si intende seguire é il seguente

1. Calcolare A_μ e $\bar{h}_{\mu\nu}$.
2. Decomporre A_μ e $\bar{h}_{\mu\nu}$ in onde piane.
3. Calcolare la potenza trasportata dalle onde piane.
4. Calcolare l'effetto dell'energia emessa sul sistema.

Prima di far ciò é necessario introdurre qualche formalismo matematico per cui nella prossima sottosezione si ricaverá la funzione di Green il cui utilizzo si rivelerá essenziale.

10.4.2 La funzione di Green

L'equazione $\square A_\mu = j_\mu$ può essere interpretata nel seguente modo: data una distribuzione di correnti j_μ esiste un metodo generale per trovare una funzione A_μ tale che il suo D'Alambertiano é uguale a j_μ ? La risposta é affermativa e la strada da percorrere é la seguente: come prima cosa si definisce la convoluzione di due funzioni:

$$(f * g)(x) = \int d^4y f(y)g(x - y) \quad (10.35)$$

A partire da questa definizione si vede che vale la proprietá

$$\partial_\mu(f * g) = (\partial_\mu g) * g + f * \partial_\mu g$$

Detto questo si può introdurre la funzione di Green: $G(x)$ é funzione di Green se inverte il D'Alambertiano:

$$\square G = \delta^4$$

Ciò che ci si propone di dimostrare é il seguente teorema:

$$A_\mu \equiv G * j_\mu \quad \text{soddisfa} \quad \square A_\mu = j_\mu \quad (10.36)$$

La dimostrazione é piuttosto rapida:

$$\square A_\mu = \square(G * j_\mu) = \partial_\alpha \partial^\alpha (G * j_\mu) = \partial_\alpha (\partial^\alpha G * j_\mu) = (\square G) * j_\mu = \delta^4 * j_\mu = j_\mu$$

dove gli ultimi dua passaggi derivano dalla definizione della funzione di Green e dal fatto che la delta di Dirac é l'elemento neutro rispetto alla convoluzione. Si é dimostrato quindi che, data una distribuzione di correnti j_μ il corrispondente potenziale vettore é dato da

$$A_\mu(x) = \int d^4x G(y)j_\mu(x - y)$$

Ora si pone il problema di determinare esplicitamente la funzione di Green. Intanto per come é definita dovrà essere diversa di zero solo per $t > 0$ e per l'invarianza di Lorentz potrà essere funzione solo di x^2 per cui é della forma $G(x) \sim H(t)\delta(x^2)$ dove $H(t)$ é la funzione di Heaviside. Alla fine si ricava

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} H(t)\delta(x^2) \quad (10.37)$$

Ora si può procedere al calcolo della potenza irradiata per onde elettromagnetiche e gravitazionali.

10.4.3 Irraggiamento elettromagnetico

Considero una regione di raggio R contenente cariche in moto arbitrario. Si vuole calcolare $A_\mu(x)$ ad una distanza $r > R$, ossia dove non ci sono cariche. Si é visto che, data una distribuzione di correnti, si può ricavare il potenziale vettore attraverso l'equazione (10.36). Prima di iniziare con il calcolo esplicito si ricordano alcune equazioni ricavate nel capitolo dedicato alla relativitá ristretta: per un sistema di particelle vale

$$\begin{aligned} T_{materia}^{\mu\nu} &= \sum_r m_r \int_{\gamma_r} u_r^\mu u_r^\nu \delta^4(x - x_r) ds_r \\ j^\mu &= \sum_r \int_{\gamma_r} dx_r^\mu \delta^4(x - x_r) \end{aligned} \quad (10.38)$$

Si é definito all'inizio di questo capitolo lo pseudo-tensore energia-momento totale $\tau^{\mu\nu} = T_{materia}^{\mu\nu} + T_{em}^{\mu\nu}$ in modo che sia conservato in modo ordinario: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. L'energia E associata a questo tensore é l'integrale spaziale della componente τ^{00} e dalla legge di conservazione valgono le solite equazioni

$$\frac{dE}{dt} = - \int \partial_i \tau^{i0} d^3x = - \int \tau^{i0} n^i r^2 d\Omega = \text{Potenza}$$

dove l'ultimo passaggio deriva dal teorema della divergenza di Gauss e si hanno le solite identificazioni: n^i normale alla superficie su cui si integra, $r^2 d\Omega$ elemento di superficie e la definizione di potenza come derivata temporale dell'energia.

Si sta calcolando la potenza irradiata in una regione dove non ci sono particelle per cui $T_{materia}^{\mu\nu} = 0$ per cui si considera solo $T_{em}^{\mu\nu}$ per cui la potenza da calcolare é la seguente:

$$P = \frac{dE}{dt} = - \int_{\text{sfera di raggio } r} T_{em}^{i0} n^i r^2 d\Omega \quad (10.39)$$

La potenza direzionale é

$$P(\Omega) = \frac{\Delta P}{\Delta \Omega} = T_{em}^{i0} n^i r^2$$

T_{em}^{i0} é il vettore di Pointing ed é sufficiente calcolarlo a ordine $1/r^2$ poiché ordini piú alti in $1/r$ vanno a zero se integrati. Riassumiamo le equazioni significative ricavate nelle sezioni precedenti:

$$\begin{aligned} \square A^\mu &= j^\mu && \text{eq. di Maxwell} \\ \partial_\mu j^\mu &= 0 && \text{gauge-fixing} \\ A_\mu &= \epsilon_\mu e^{ikx} + c.c. && \text{valido per un'onda elettromagnetica} \\ T_{\mu\nu}^{em}(\text{medio}) &= n_\mu n_\nu \dot{A}_i \dot{A}_j \Lambda_{ij}(n^i) && \text{con } \Lambda_{ij} = \delta_{ij} - n_i n_j \\ n_\mu &= (1, \vec{n}) = (1, \vec{k}/|\vec{k}|) && \text{con } \vec{n} = \text{direzione di propagazione} \end{aligned} \quad (10.40)$$

dove “.” indica la derivata temporale. La forma del tensore energia-momento data in (10.40) vale anche per una sovrapposizione di onde, si richiede solo che le onde presenti in una certa direzione spaziale abbiano tutte la stessa direzione di propagazione. Ora si utilizzerá la funzione di Green trovata in (10.37) per esprimere il potenziale vettore A_μ in funzione della distribuzione di correnti j_μ . Per questa derivazione é necessario utilizzare alcune proprietà della delta di Dirac, che saranno per comoditá ripetute.

La funzione di Green $G(x)$ é definita dalla condizione $\square G(x) = \delta^4$ e la sua forma esplicita é $G(x) = \frac{1}{2\pi} H(x_0) \delta(x^2)$. Con questo formalismo il potenziale vettore diventa $A_\mu = G * j_\mu = j_\mu * G = \int d^4y j_\mu(y) G(x-y)$. Si riottiene, come deve essere, la gauge di Lorentz (scelta per poter scrivere $\square A_\mu = j_\mu$): $\partial_\mu A^\mu = \partial_\mu (G * j^\mu) = G * \partial_\mu j^\mu = 0$. Nella definizione della funzione di Green compare $\delta(x^2)$: utilizzando le proprietà della Delta di Dirac si può riscrivere in modo piú conveniente questa distribuzione: in generale vale la seguente equazione

$$\delta(f(x)) = \sum_n \frac{\delta(x - x_0^n)}{|f'(x_0^n)|} \quad (10.41)$$

dove x_0^n sono gli zeri della funzione ossia $f(x_0^n) = 0$ e $f'(x_0^n)$ é la derivata di $f(x)$ rispetto a \vec{x} calcolata negli zeri della funzione. Applicando (10.41) a $\delta(x^2) = \delta(x_0^2 - |\vec{x}|^2) = \delta(t^2 - |\vec{x}|^2)$ si ha:

$$\delta(x^2) = \delta(t^2 - |\vec{x}|^2) = \frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{2|\vec{x}|} + \frac{\delta(t + |\vec{x}|)}{2|\vec{x}|}$$

quindi, sostituendo nella in $G(x) = \frac{1}{2\pi} H(x_0) \delta(x^2)$ si ottiene

$$G(x) = \frac{1}{2\pi} H(t) \delta(t^2 - |\vec{x}|^2) = \frac{1}{2\pi} H(t) \left[\frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{2|\vec{x}|} + \frac{\delta(t + |\vec{x}|)}{2|\vec{x}|} \right] = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \quad (10.42)$$

dove l'ultimo passaggio deriva dalla presenza della funzione di Heaviside $H(t)$ che impone di considerare solo i termini con $t > 0$ per cui non si considera $\delta(t + |\vec{x}|)$. Ora verifichiamo cosa porge il calcolo di $\square G(x)$ dove $G(x)$ é data in (10.42) e l'operatore D'Alambertiano $\square = \partial_0^2 - \vec{\nabla}^2$. Quindi si vuole calcolare

$$\frac{1}{4\pi} \left(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 \right) \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right)$$

Procediamo per gradi:

$$\partial_0^2 \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = \frac{1}{|\vec{x}|} \delta''(t - |\vec{x}|)$$

dove “” indica derivazione rispetto a $|\vec{x}|$. Per il calcolo del laplaciano procediamo in due passi: dalla regola di Leibniz

$$\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \delta(t - |\vec{x}|) + \frac{1}{|\vec{x}|} \vec{\nabla} \delta(t - |\vec{x}|)$$

Applicando nuovamente l'operatore gradiente al risultato precedente si ottiene

$$\vec{\nabla}^2 \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = \left(\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \delta(t - |\vec{x}|) + \frac{1}{|\vec{x}|} \vec{\nabla}^2 \delta(t - |\vec{x}|) + 2 \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \left(\vec{\nabla} \delta(t - |\vec{x}|) \right)$$

Dall'identitá

$$\vec{\nabla} \delta(t - |\vec{x}|) = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \delta'(t - |\vec{x}|)$$

si ricava l'uguaglianza

$$\frac{1}{|\vec{x}|} \vec{\nabla}^2 \delta(t - |\vec{x}|) + 2 \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \left(\vec{\nabla} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = \frac{1}{|\vec{x}|} \delta''(t - |\vec{x}|)$$

per cui, mettendo insieme i vari pezzi,

$$\square \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = \left(\partial_0^2 - \vec{\nabla}^2 \right) \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = - \left(\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} \right) \delta(t - |\vec{x}|)$$

Si é visto ancora nel primo capitolo che

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{|\vec{x}|} = -4\pi \delta^3(\vec{x})$$

per cui l'equazione precedente diventa

$$\square \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \delta(t - |\vec{x}|) \right) = 4\pi \delta^3(\vec{x}) \delta(t - |\vec{x}|) = 4\pi \delta^3(\vec{x}) \delta(t) = 4\pi \delta^4(x)$$

dove il penultimo passaggio deriva dalla considerazione che la $\delta^3(\vec{x})$ impone $\vec{x} = 0$ da cui $\delta(t - |\vec{x}|) = \delta(t)$. Ora torniamo indietro all'equazione (10.42) che esprime in modo piú comodo

la funzione di Green e la usiamo per ricavare il potenziale vettore il funzione delle correnti. Prima notiamo un fatto banale: se $x \equiv (t, \vec{x})$ e $y \equiv (y_0, \vec{y})$ allora $x - y = (t - y_0, \vec{x} - \vec{y})$. Quindi

$$A_\mu(x) = G * j_\mu = \int d^4 y G(x - y) j_\mu(y) = \frac{1}{4\pi} \int d^4 y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \delta(t - y_0 - |\vec{x} - \vec{y}|) j_\mu(y_0, \vec{y})$$

Se si integra la $\delta(t - y_0 - |\vec{x} - \vec{y}|)$ si elimina l'integrazione in y_0 per cui resta un $d^3 y$ la delta sparisce e nella corrente j_μ va calcolata in $y_0 = t - |\vec{x} - \vec{y}|$ per cui si ottiene

$$A_\mu(x) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} j_\mu(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y}) \quad (10.43)$$

Se si vogliono ottenere le giuste dimensioni fisiche allora l'equazione (10.43) va moltiplicata per $\mu_0 = 1/(\epsilon_0 c^2)$ dove ϵ_0 é la costante dielettrica del vuoto e c é la velocità della luce e $|\vec{x} - \vec{y}|$ va diviso per c .

Si vuole calcolare $A_\mu(x)$ nella zona delle onde ossia in $r \gg R$ con $r = |\vec{x}|$. Poiché le cariche sono confinate nella regione di spazio data da $|\vec{y}| \leq R$ significa che $j_\mu(y_0, \vec{y}) = 0$ se $|\vec{y}| \geq R$ e ci si trova in $r \gg R$. Questo significa che eventuali termini di ordine maggiore di uno in $y/r = y/|\vec{x}|$ vengono trascurati. In generale si ha:

$$(\vec{x} - \vec{y})^2 = r^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y} + y^2 = r^2 \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{r} + \frac{y^2}{r^2} \right)$$

dove si é introdotto $\vec{n} = \vec{x}/r$ che é il versore che dá la direzione radiale. Applicando le approssimazioni di cui si é detto prima si può scrivere

$$|\vec{x} - \vec{y}| \approx r \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{y}}{r} \right) = r - \vec{n} \cdot \vec{y}$$

Quindi invertendo le relazioni

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \approx \frac{1}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Inserendo queste approssimazioni in (10.43) si ottiene

$$A_\mu(x) = \frac{1}{4\pi r} \int d^3 y j_\mu(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) \quad (10.44)$$

Poiché nella regione caratterizzata da $r \geq R$ non ci sono cariche, ossia $j_\mu(x) = 0$, $A_\mu(x)$ soddisfa l'equazione $\square A_\mu(x) = 0$. Si é visto che si richiede periodicità nella corrente: $j_\mu(t + T, \vec{y}) = j_\mu(t, \vec{y})$ per cui si può sviluppare la corrente j_μ in serie di Fourier:

$$j_\mu = \sum_N j_\mu^N(\vec{y}) e^{i\omega_N t} + c.c.$$

Con una corrente di questo tipo il 4-vettore A_μ dato in (10.44) si scrive come

$$A_\mu = \frac{1}{4\pi r} \sum_N \sum_N e^{\omega_N(t-r)} \int d^3 y j_\mu^N(\vec{y}) e^{i\omega_N t} + c.c.$$

ossia A_μ é una sovrapposizione di onde sferiche (del tipo $e^{i\omega t}/r$). Si può scrivere $A_\mu = \sum_N A_\mu^N$ dove $A_\mu^N(x) = \epsilon_\mu^N(\vec{x}) e^{ik_N x} + c.c.$ con $k_n^\mu = \omega_N(1, \vec{N})$ e $\vec{n} = \vec{x}/r$. In questo modo $k_N^\mu x_\mu =$

$\omega_N t - \omega_N \vec{n} \cdot \vec{x} = \omega_N (t - r)$. La notazione appena introdotta é consistente con il 4-potenziale $A_\mu(x)$ dato in (10.44) solo se il vettore di polarizzazione $\epsilon_\mu^N(\vec{x})$ é definito come

$$\epsilon_\mu^N(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r} \int d^3 y j_\mu^N(y) e^{i\vec{k} \cdot \vec{y}}$$

Da questa equazione si vede che $\partial_\alpha \epsilon_\mu^N(\vec{x}) \sim 1/r^2$ che é trascurabile per grandi r . Ció significa che, nonostante A_μ sia una sovrapposizione di onde sferiche, si puó calcolare il tensore energia-momento associato a queste onde come se fossero onde piane: questo risultato é decisamente utile visto che si é ricavata in precedenza l'equazione (10.25) che per comoditá viene riscritta

$$T_{\mu\nu}^{em} = n_\mu n_\nu \dot{A}_i \dot{A}_j \Lambda_{ij}(\vec{n}) \quad (10.45)$$

Per calcolare la potenza emessa si sviluppa A_μ in multipoli o, in modo equivalente, in potenze di v/c . Rinominando $t = t - r$, visto che non considero variazioni di r il potenziale vettore é

$$A_\mu = \frac{1}{4\pi r} \int d^3 y j_\mu(t + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y})$$

Sviluppando in serie di Taylor la 4-corrente j_μ si ha

$$j^i(t + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) = j^i(t, \vec{y}) + \partial_0 j^i(t, \vec{y}) \vec{n} \cdot \vec{y}$$

Non vengono riportati tutti i passaggi, si definiscono i momenti di multipolo piú bassi e si esprime A_μ in funzione di questi:

$$\begin{aligned} D^i(t) &= \int d^3 y y^i j_0(\vec{y}, t) && \text{momento di dipolo elettrico} \\ D^{ij}(t) &= \int d^3 y \left(y^i y^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} y^k y^k \right) j_0(\vec{y}, t) && \text{momento di quadrupolo elettrico} \\ M^{ij}(t) &= \int d^3 y y^{(i} j^{j)} && \text{momento di dipolo magnetico} \end{aligned}$$

In termini di questi momenti si ottiene

$$A^i = \frac{1}{4\pi r} \left[\vec{D}^i + \frac{1}{2} \ddot{D}^{ij} n^j + \dot{M}^{ij} n^j \right]$$

In generale un termine di quadrupolo elettrico é soppresso di ordine v/c rispetto a uno di dipolo elettrico e un termine di dipolo magnetico é comparabile a uno di quadrupolo elettrico: tutto questo sta a dire che, con buona approssimazione, il termine dominante é quello di dipolo elettrico per cui si puó scrivere

$$A_i \simeq \frac{1}{4\pi r} \dot{D}_i \quad (10.46)$$

Calcolando la potenza emessa con la formula

$$P = \int d\Omega r^2 T_{0i}^{em} n^i$$

dove T_{0i} si esprime attraverso il potenziale vettore tramite (10.45) e il potenziale vettore si esprime per mezzo della derivata temporale del momento di dipolo come (10.46) si ottiene alla fine

$$P = \frac{1}{6\pi} \langle \ddot{D}^i(t) \ddot{D}^i(t) \rangle \quad (10.47)$$

Prima di concludere questa parte e passare al calcolo della potenza emessa sotto forma di onde gravitazionali sottolineo due aspetti sui risultati trovati:

- la potenza emessa risulta proporzionale al quadrato dell'accelerazione della carica, come si ottiene in fisica classica: la formula classica é

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

dove q é la carica e a la sua accelerazione al tempo dell' emissione della radiazione.

- nel caso delle onde gravitazionali, il termine di dipolo elettrico é nullo per cui la radiazione gravitazionale risulta soppressa di v/c rispetto a quella elettromagnetica.

10.4.4 Irraggiamento gravitazionale

Prima di calcolare la potenza emessa sotto forma di onde gravitazionali ricordiamo i risultati essenziali trovati in questo capitolo e nei capitoli precedenti (vedi specialmente (10.30) e seguenti)

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= \sum_r m_r \int_{\gamma_r} ds_r u_r^\mu u_r^\nu \frac{\delta^4(x - x_r)}{\sqrt{g}} \\ \tau^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu} \Rightarrow \partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0 \\ \square \bar{h}_{\mu\nu} &= -16\pi G \tau_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad \text{gauge-fixing} \\ \bar{h}_{\mu\nu} &= h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h^\alpha_\alpha \quad \text{con} \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \\ T_{\mu\nu}^{grav} &= \frac{1}{32\pi G} n_\mu n_\nu \partial_0 \tilde{h}_{ij} \partial_0 \tilde{h}_{mn} \Lambda_{ijmn}(\vec{n}) \quad \text{con} \quad \tilde{h}_{ij} = \bar{h}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \bar{h}^k_k \end{aligned}$$

L'espressione data per $T_{\mu\nu}^{grav}$ vale anche per una sovrapposizione di onde con la stessa direzione di propagazione e ricordo che si suppone $T^{\mu\nu} \neq 0$ solo in una regione di spazio limitata: per $r > R$ si hanno sono onde e non materia. Per il calcolo della potenza valgono le solite equazioni

$$P = \frac{\partial E}{\partial t} = \partial_0 \int d^3x \tau^{00} = - \int \partial_i \tau^{i0} d^3x = - \int \tau^{i0} n^i r^2 d\Omega = -T_{grav}^{i0} n^i r^2 d\Omega$$

Da $\square \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G \tau_{\mu\nu}$ si verifica subito che $\bar{h}_{\mu\nu} = -(16\pi G) G * \tau_{\mu\nu}$ dove G é la funzione di Green che si é visto avere l'espressione (vedi (10.42))

$$G = \frac{1}{4\pi} \frac{\delta(t - |\vec{x}|)}{|\vec{x}|}$$

Quindi, scrivendo per esteso la convoluzione (integrando la δ e avendo separato la parte spaziale e temporale dei 4-vettori) $G * \tau_{\mu\nu}$ si ha

$$\bar{h}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{4\pi} \int d^3y \frac{1}{|\vec{x} - \vec{y}|} \tau^{\mu\nu}(t - |\vec{x} - \vec{y}|, \vec{y})$$

Nella zona delle onde, $r \gg R$, facendo le stesse approssimazioni fatte per il caso elettromagnetico, si ottiene

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{4G}{r} \int d^3y \tau_{\mu\nu}(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) \quad (10.48)$$

Naturalmente vale $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = -(16\pi G) G * \partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$. Tra l'altro il segno “-” di $-16\pi G$ indica che la gravitá é attrattiva, mentre nel caso elettromagnetico cariche di segno uguale si respingono. Come nel caso elettromagnetico si richiede periodicitá delle soluzioni: se

$$\tau^{\mu\nu}(t + T, \vec{y}) = \tau^{\mu\nu}(t, \vec{y}) \quad \text{con} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

allora $\bar{h}_{\mu\nu}$ é somma di onde sferiche che in ogni punto dello spazio si propagano in direzione radiale con $k^\mu = \omega_N(1, \vec{n} = \vec{x}/r)$. Analogamente a quanto fatto prima sviluppo $\tau^{\mu\nu}$ in multipoli, ossia in potenze di $\vec{v} \cdot \vec{n}$:

$$\tau_{\mu\nu}(t - r + \vec{n} \cdot \vec{y}, \vec{y}) = \tau_{\mu\nu}(t - r, \vec{y}) + \vec{n} \cdot \vec{y} \partial_0 \tau_{\mu\nu}(t - r, \vec{y}) + O(\vec{n} \cdot \vec{y})^2$$

dove il primo termine dello sviluppo é di quadrupolo e il secondo, essendo di sestupolo, lo trascuro. Quindi dall'espressione (10.48), che é giá approssimata, si passa all'ulteriore semplificazione data dall'espressione

$$\bar{h}_{\mu\nu}(r, t) = -\frac{4G}{r} \int d^3y \tau_{\mu\nu}(t - r, \vec{y}) \quad (10.49)$$

dove naturalmente $-r = -r/c$ indica lo sfasamento temporale conseguente alla velocità finita di propagazione del segnale. Ricorrendo come \tilde{h}_{ij} é legato a \bar{h}_{ij} si puó scrivere

$$\tilde{h}_{ij} = \frac{-4G}{r} \int d^3y \left(\tau_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tau_{kk} \right)$$

Non verranno svolti i calcoli che portano alla potenza di emissione in funzione del momento di quadrupolo, ma verrà dato qualche appiglio: il momento di quadrupolo é

$$D_{ij}(t) \equiv \int d^3y \left(y_i y_j - \frac{1}{3} \delta_{ij} y_k y_k \right) \tau_{00}(\vec{y}, t) \Rightarrow D_{ii} = 0$$

Si possono esprimere dipendenze spaziali in funzione di quella temporale usando la legge di conservazione $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0 \Leftrightarrow \partial_0 \tau^{0\nu} = -\partial_i \tau^{i\nu}$ ad esempio: $\partial_0 \partial_0 \tau^{00} = \partial_0(-\partial_i \tau^{i0}) = -\partial_i \partial_0 \tau^{i0} = \partial_i \partial_j \tau^{ij}$. Si riesce ad arrivare cosí all'espressione

$$\tilde{h}^{ij} = -\frac{2G}{r} \ddot{D}^{ij}$$

La potenza emessa é

$$T = \int_r d^2\Omega r^2 n^i T_{grav}^{i0} = \frac{1}{32\pi G} \int r^2 \dot{\tilde{h}}_{ij} \dot{\tilde{h}}_{mn} \Lambda_{ijmn} d\Omega = \frac{G}{8\pi} \left[\int d\Omega \Lambda_{ijmn} \right] \ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ml}$$

dove é stato possibile separare la dipendenza temporale, incorporata in D_{ij} , da quella spaziale, incorporata in Λ_{ijml} . Ora si tratta di valutare $\int d\Omega \Lambda_{ijmn}$ che non é agevole, ricordando che $\Lambda_{ijmn} = \delta_{il} \delta_{jl} - 2n_i n_l \delta_{jm} + 1/2 n_i n_j n_l n_m$ con $\vec{n} = \vec{x}/r$. Sfruttando proprietà di invarianza per rotazioni si ottiene

$$\int d\Omega \Lambda_{ijmn} = \frac{8\pi}{5} \delta^{il} \delta^{jm}$$

da cui la potenza emessa sotto forma di onde gravitazionali é

$$P_{grav} = \frac{6}{5} \langle \ddot{D}^{ij} \ddot{D}^{ij} \rangle \quad (10.50)$$

dove D^{ij} é il momento di quadrupolo ricordato prima. Vale la pena sottolineare alcuni aspetti legati ai risultati ottenuti

1. La formula ottenuta vale se τ^{00} é periodico o é somma di termini periodici

2. $D^{ij} = 0$ se τ^{00} é a simmetria sferica perciò in caso di sistemi a simmetria sferica la potenza emessa sotto forma di onde gravitazionali é nulla: questo concorda con il teorema di Birkhoff che recitava “una metrica invariante per rotazioni nel vuoto é di Schwarchild”. Essendo la metrica di Schwarchild statica non si ha emissione di onde gravitazionali (derivate temporali nulle).
3. In particolare un corpo che collassa mantenendo la simmetria sferica non emetterá onde gravitazionali.

Arrivati a questo punto si può applicare la formula (10.50) ad un sistema semplice ed esprimere la potenza irradiata in funzione dei parametri del sistema. Considero un sistema composto di due corpi di massa M , ruotanti ad una distanza a dal baricentro con velocità angolare ω che la cui coordinate sono \vec{x}_i e \vec{x}_2 . Considero il sistema in moto non relativistico per cui τ^{00} é dominato dalla massa a riposo. In generale in un sistema non relativistico si ha

$$\tau^{00} \rightarrow \sum_r m_r \delta^3(\vec{x} - \vec{r}_r(t)) = T^{00}$$

Nel caso particolare che si sta considerando

$$T^{00} = M (\delta^3(x - x_1(t)) + \delta^3(x - x_2(t)))$$

Inserendo questo risultato nella definizione del momento di quadrupolo si ha

$$D^{ij} = M \int d^3x [\delta^3(\vec{x} - \vec{x}_1) + \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_2)] \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} x^k x^k \right) = M x_1^i x_1^j + M x_2^i x_2^j - \frac{M}{3} \delta^{ij} (x_1^2 + x_2^2)$$

Se le due masse si muovono lungo un'orbita circolare posso rappresentare il moto come un moto armonico: $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$, $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{x}$, $\ddot{\vec{x}} = -\omega^2 \vec{v}$. Il termine di $D^{ij} \propto \delta^{ij}$ dá contributo nullo perché derivando rispetto al tempo sarà proporzionale al prodotto scalare di direzione e velocità che é nullo essendo vettori perpendicolari. Vista la simmetria del problema posso scrivere ai fini del calcolo

$$D^{ij} = 2M x^i(t) x^j(t)$$

Derivando tre volte rispetto al tempo si ottiene

$$\ddot{D}_{ij} = -8M\omega^2 (x_i \dot{x}_j + x_j \dot{x}_i)$$

da cui, contraendo con un'altro \ddot{D}_{ij} (ricordando che $x^i \dot{x}^i = 0$) si ottiene $\ddot{D}_{ij} \ddot{D}_{ij} = 128M^2 \omega^6 a^4$ per cui la potenza irradiata é

$$P = \frac{128}{5} GM^2 \omega^6 a^4$$

In generale

$$P = \frac{d}{dt} \int d^3x \tau^{00} = \frac{d}{dt} \int d^3x (T^{00} + t^{00})$$

Nel limite non relativistico $T^{00} = \sum_r m_r + 1/2 m_r v_r^2$ mentre $t^{00} = -1/2 \sum_{r \neq s} G m_r m_s / |\vec{x}_r - \vec{x}_s|$ che non é altro che l'energia potenziale gravitazionale newtoniana. Inoltre nel limite non relativistico la massa si conserva separatamente. Nel sistema precedente l'energia totale E é

$$E = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M v^2 - \frac{GM^2}{2a}$$

Uguagliando la forza di gravit  con la forza centripeta si ha

$$\frac{GM^2}{(2a)^2} = \frac{Mv^2}{a} \quad \text{con } v = a\omega$$

da cui si ricava

$$\omega^2 = \frac{GM}{4a^3} \Rightarrow v^2 = \frac{MG}{4a} \Rightarrow E = -\frac{GM^2}{4a} \propto \omega^{2/3}$$

Giocando con i differenziali e considerando rapporti in modo da eliminare le costanti si ha

$$\frac{dE}{E} = \frac{2}{3} \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{2}{3} \frac{dT}{T}$$

dove $T = 2\pi/\omega$ per cui $T \propto \omega^{-1}$   il periodo. Quindi alla fine:

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{3}{2} \frac{P}{E} = -\frac{12}{5} \frac{(GM)^3}{a^4}$$

ricordando che $dE/dt < 0$. Questo risultato suggerisce un modo indiretto per verificare l'esistenza di onde gravitazionali: un sistema binario come una pulsar che ruota attorno ad un'altro oggetto dovrebbe diminuire il suo periodo di rotazione in seguito all'emissione di onde gravitazionali. Un sistema fisico di questo tipo   stato effettivamente studiato (pulsar PRS(1913+16)) dal 1974 al 1987 e la diminuzione osservata del periodo coincide con il calcolo teorico. Con questo risultato sperimentale si chiude il capitolo dsedicato alle onde gravitazionali. Il prossimo capitolo tratter  di alcuni sviluppi formali della relativit  generale che saranno di notevole utilit  nel seguito del lavoro, nonch  come ampliamento di argomenti gi  trattati, come i vettori di Killing.

Capitolo 11

Sviluppi formali

11.1 Simmetrie e leggi di conservazione

In questo capitolo si puntualizzeranno alcuni aspetti del formalismo della relatività generale. Iniziamo con il legame fra leggi di conservazione e simmetrie del sistema. Si è visto che ad ogni simmetria del sistema corrisponde una legge di conservazione attraverso il teorema di Noether. Si è anche detto che tra gli assiomi della relatività generale vi è la conservazione covariante del tensore energia-momento. Come si vedrà più avanti questa legge di conservazione è legata all'invarianza per diffeomorfismi. Si è anche visto come passare da un sistema che soddisfa la relatività ristretta ad uno che soddisfa la relatività generale attraverso la ricetta minimale. In particolare si è ricavata l'integrazione invariante in modo da avere un'azione invariante a partire da una lagrangiana: se \mathcal{L} è una densità di lagrangiana allora la corrispondente azione è

$$\int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L} \quad (11.1)$$

dove $\sqrt{g} = -\det g_{\mu\nu}$. In relatività ristretta la metrica è di Minkowski, quindi ha $g = 1$, per cui si riottiene la consueta forma che lega densità di lagrangiana e azione. Le equazioni del moto per i campi si ricavano con le equazioni di Eulero-Lagrange (o rendendo stazionaria l'azione per trasformazioni fissate agli estremi):

$$\partial_\mu \frac{\partial(\sqrt{g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\mu\phi)} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} = 0 \quad (11.2)$$

In particolare si è vista la relazione fra l'invarianza per traslazioni e la conservazione del 4-momento nella forma $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ valida in relatività ristretta. Come si è detto prima passando dalla relatività ristretta a quella generale il tensore energia-momento si conserva covariantemente. Applicando la ricetta minimale ad un sistema di materia e campo elettromagnetico la corrispondente azione, vista nel primo capitolo, si ottiene

$$I_M[\phi, g_{\mu\nu}] = - \sum_r m_r \int_{\gamma_r} ds_r - \frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - \int d^4x \sqrt{g} j^\mu A_\mu \quad (11.3)$$

dove il primo pezzo è la propagazione delle particelle libere, il secondo dá la propagazione libera del campo elettromagnetico e l'ultimo pezzo esprime l'interazione fra particelle e campi. Si hanno inoltre le solite identificazioni $g = -\det g_{\mu\nu}$ e $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Come è giusto che sia variando la metrica rispetto al campo A_μ e ponendo nulla la variazione dell'azione a

estremi fissati si ottiene la legge del moto $D_\mu F^{\mu\nu} = j^\mu$. Per quanto visto alla fine del primo capitolo e nella derivazione della conservazione covariante della 4-corrente valgono le regole:

$$\begin{aligned}\int d^4x \partial_\mu W^\mu &= 0 \\ \int d^4x \sqrt{g} D_\mu W^\mu &= \int d^4x \partial_\mu (\sqrt{g} W^\mu) = 0\end{aligned}$$

dove W^μ é un qualsiasi campo fisico che si suppone nullo all'infinito (la dimostrazione della prima proprietá consiste nell'applicare alla rovescia il teorema della divergenza di gauss in 4D mentre la seconda deriva dalla forma di $\Gamma_{\mu\lambda}^\mu$ in funzione del determinante della metrica). Applicando queste regole si ottiene un utile risultato esemplificato nelle prossime righe

$$\begin{aligned}\int d^4x \sqrt{g} (D_\alpha z_\beta) W^{\alpha\beta} &= \int d^4x \sqrt{g} D_\alpha (z_\beta W^{\alpha\beta}) - \int d^4x \sqrt{g} z_\beta (D_\alpha W^{\alpha\beta}) \\ &= \int d^4x \partial_\alpha (\sqrt{g} z_\beta W^{\alpha\beta}) - \int d^4x \sqrt{g} z_\beta (D_\alpha W^{\alpha\beta}) \\ &= - \int d^4x \sqrt{g} z_\beta (D_\alpha W^{\alpha\beta})\end{aligned}$$

dove prima si é usata la regola di Leibniz (valida per la derivata covariante) al contrario, poi la seconda regola scritta sopra e infine la prima. Confrontando la prima riga con l'ultima si vede si é semplicemente spostato l'azione della derivata covariante da una funzione all'altra e si é invertito il segno dell'espressione. Questa regola é utile nel ricavare le equazioni del moto del campo A_μ a partire dall'azione (11.3). Infatti, variando l'azione rispetto al campo A_μ si ottiene

$$\begin{aligned}\delta I_M &= - \int \sqrt{g} \partial_{[\mu} \delta A_{\nu]} F^{\mu\nu} d^4x - \int d^4x \sqrt{g} j^\mu \delta A_\mu \\ &= \int \sqrt{g} d^4x (D_{[\mu} \delta A_{\nu]}) F^{\mu\nu} - \int d^4x \sqrt{g} j^\mu \delta A_\mu \\ &= \int d^4x \sqrt{g} \delta A_\nu (D_\mu F^{\mu\nu}) - \int d^4x \sqrt{g} j^\mu \delta A_\mu \\ &= \int d^4x \sqrt{g} (D_\mu F^{\mu\nu} - j^\nu) \delta A_\nu = 0 \Leftrightarrow D_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu\end{aligned}$$

Un'altro esempio significativo di lagrangiana é quella di Klein-Gordon o lagrangiana scalare:

$$I_M[\phi, g] = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \right]$$

da cui si ricavano le equazioni del moto del campo ϕ nel solito modo:

$$\begin{aligned}\delta_\phi I_M &= \int d^4x \sqrt{g} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \delta\phi - m^2 \phi \delta\phi) \\ &= \int d^4x \sqrt{g} (D_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi - m^2 \phi) \delta\phi = 0 \Rightarrow (D_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu - m^2) \phi = 0\end{aligned}$$

dove si ricorda che, su uno scalare, $D_\mu = \partial_\mu$. Usando questo fatto, se ϕ é uno scalare allora $D_\nu g^{\mu\nu} \partial_\mu = D_\nu g^{\mu\nu} D_\mu = D_\nu D^\nu$ per cui l'equazione del moto si puó scrivere nella forma piú comoda $(D_\mu D^\mu - m^2)\phi = 0$. Concludiamo questa parte iniziale ricordando che per passare da un sistema che soddisfa la relativitá generale ad uno che soddisfa la relativitá ristretta basta applicare la ricetta minimale al contrario. Nella prossima sezione ci si concentrerá sul tensore energia-momento dandone una definizione in termini della metrica tale da avere conservazione covariante.

11.2 Il tensore energia-momento metrico

Si definisce il tensore energia-momento di un sistema in funzione della metrica nel seguente modo:

$$T^{\mu\nu}(x) = -\frac{2}{\sqrt{g(x)}} \frac{\delta I_M}{\delta g_{\mu\nu}(x)} \Leftrightarrow \delta I_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (11.4)$$

Se si vuole variare l'azione rispetto alla metrica bisogna variare tutte le grandezze dipendenti dalla metrica, in particolare \sqrt{g} dove $g = -\det g_{\mu\nu}$. E' necessario ricavare quindi la variazione di \sqrt{g} rispetto alla metrica. Per fare ciò si opera come segue: intanto si nota che $\delta\sqrt{g} = 1/(2\sqrt{g})\delta g$ per cui il problema é ricondotto a calcolare $\delta g = \delta \det g_{\mu\nu}$. Si era visto che, per una matrice simmetrica, vale $\ln \det g_{\mu\nu} = \text{tr} \ln g_{\mu\nu}$ per cui $\delta \ln g = \delta(\text{tr} \ln g_{\mu\nu})$. Quindi:

$$\delta(\ln g) = \frac{\delta g}{g} = \delta(\text{tr} \ln g_{\mu\nu}) = g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

da cui si trova

$$\delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \delta\sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (11.5)$$

Un'altra equazione utile é quella che esprime la variazione di $g^{\mu\nu}$ in funzione di quella di $g_{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\mu \Rightarrow \delta\delta^{\mu\nu} = (\delta g^{\mu\alpha}) g_{\alpha\nu} + g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu} = 0 \Rightarrow (\delta g^{\mu\alpha}) g_{\alpha\nu} = -g^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu}$$

Contraendo con $g^{\nu\gamma}$ si trova, ricordando che $g_{\alpha\nu} g^{\nu\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$

$$\delta g^{\mu\gamma} = -g^{\mu\alpha} g^{\nu\gamma} \delta g_{\alpha\nu}$$

Dopo aver visto questi preliminari si potrebbe applicare la definizione (11.4) all'azione (11.3) per vedere cosa succede pezzo per pezzo:

$$\begin{aligned} & \delta \left(\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) = \\ & = -\frac{1}{4} \int d^4x \left[\frac{\sqrt{g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + 2\sqrt{g} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} (\delta g^{\mu\alpha}) g^{\nu\beta} \right] \\ & = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \left(\frac{1}{4} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - F_\nu^\mu F_\beta^\alpha \delta g_{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \right) \\ & = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \delta g_{\alpha\beta} \left(\frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_\rho^\alpha F^{\beta\rho} \right) \\ & = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} \delta g_{\alpha\beta} T_{em}^{\alpha\beta} \Rightarrow T_{em}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - F_\rho^\alpha F^{\beta\rho} \end{aligned}$$

che é il risultato che già si sapeva. Passando al terzo termine di (11.3) si ricorda che

$$j^\mu(x) \sim_r \int_{\gamma_r} e_r dx_r^\mu \frac{\delta^4(x - x_r)}{\sqrt{g}}$$

e inserendo quest'espressione in

$$\int d^4x \sqrt{g} j^\mu A_\mu$$

si vede che la dipendenza dalla metrica sparisce per cui non si ha contribuito. Resta da vedere il primo termine di (11.3)

$$\begin{aligned}
\delta \left(-m \int ds_r \right) &= -m \delta \left(\int \sqrt{\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} g_{\mu\nu} d\lambda \right) \\
&= -m \int \frac{d\lambda}{2s} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \delta g_{\mu\nu} d\lambda \\
&= -\frac{m}{2} \int \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \delta g_{\mu\nu} ds \\
&= -\frac{m}{2} \int d^4x \sqrt{g} \int \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\delta^4(x - x(s))}{\sqrt{g}} \delta g_{\mu\nu}(s)
\end{aligned}$$

Confrontando con la definizione data in (11.4) si ottiene

$$T_{particelle}^{\mu\nu} = \int m \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} \frac{\delta^4(x - x(s))}{\sqrt{g}}$$

Utilizzando (11.4) risulta piuttosto diretto ricavare il tensore energia-momento associato al campo di Klein-Gordon: la lagrangiana é

$$I_M[\phi, g] = \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \right]$$

e si é dimostrato nell'equazione (11.5) che vale

$$\delta \sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

per cui si ha

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2} (g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - m^2 \phi^2) \right] + \partial^\mu \phi \partial^\nu \phi$$

Si é detto piú volte che l'invarianza per diffeomorfismi comporta un tensore energia-momento conservato covariantemente. Ció che ci si propone di fare ora é dimostrare una proposizione ancora piú forte: se l'azione $I_M[\phi, g]$ é invariante per diffeomorfismi allora il tensore energia-momento definito in (11.4) soddisfa $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Intanto considero una generica densitá di lagrangiana dipendente da un campo ϕ , dalla metrica g e dalle rispettive derivate: dato un sistema di questo tipo l'azione si scrive come

$$I_M[\phi, g] = \int d^4x \sqrt{g} \mathcal{L}(\partial^m g(x), \partial^n \phi(x))$$

Sotto un diffeomorfismo si ha

$$I_M[\phi, g] = \int d^4x' \sqrt{g'(x')} \mathcal{L}(\partial'^m g'(x'), \partial'^m \phi'(x')) = \int d^4x \sqrt{g(x)} \mathcal{L}(\partial^n g'(x), \partial^m \phi'(x))$$

poiché si ha la misura invariante e la variabile x' é muta e si é imposta l'invarianza dell'azione. Considero il caso particolare di invarianza per diffeomorfismi infinitesimi ossia $x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$. Nel capitolo dedicato alla geometria differenziale si é visto il collegamento fra derivate di Lie e diffeomorfismi infinitesimi:

$$\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} = -L_\epsilon g_{\mu\nu} = -2D_{(\mu} \epsilon_{\nu)}$$

Nel caso di un campo generico si ha quindi $\delta\phi^{(i)} = \phi'^{(i)} - \phi^{(i)} = -L_\epsilon\phi^{(i)}$. La variazione totale dell'azione (che é nulla) sará la somma della variazione rispetto ai campi e della variazione rispetto alla metrica:

$$0 = \delta I_M = \delta_g I_M + \delta_M I_M$$

ma si é visto che $\delta_M I_M = 0$ poiché é proporzionale alle equazioni del moto. Calcoliamo allora $\delta_g I_M$:

$$\delta_g I_M = \int \delta g_{\mu\nu} \frac{\delta I_M}{\delta g_{\mu\nu}} d^4x = -\frac{1}{2} \int \sqrt{g} d^4x \delta g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} (-2D(\mu\epsilon_\nu)) T^{\mu\nu}$$

integrando per parti (con la condizione che all'infinito i vari campi siano nulli) si ottiene

$$\delta_g I_M = - \int d^4x \sqrt{g} \epsilon_\nu (D_\mu T^{\mu\nu}) = 0 \quad \forall \epsilon_\nu(x)$$

Quindi, se i vari campi soddisfano le equazioni del moto, come esprime la condizione $\delta_M I_M = 0$ allora il tensore energia-momento definito in (11.4) é conservato covariantemente. Con questa notevole affermazione si chiude questa sezione. Nella prossima si vedrá che le equazioni di Einstein hanno un'origine variazionale e se scriverá esplicitamente l'azione. Fatto ció si tornerá ad analizzare i vettori di Killing, in particolare il numero massimo di vettori di Killing che una certa metrica, soddisfacente determinate simmetrie, ammette.

11.3 L'azione del campo gravitazionale

In questa sezione ci si pone la seguente domanda: esiste un'azione che, variata rispetto alla metrica, dia le equazioni di Einstein? Piú precisamente: si ha un'azione $I = I_G(g) + I_M(\phi, g)$ dove il primo pezzo deriva dalla gravitá e si vogliono ottenere le equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Si é visto nella sezione precedente come il tensore energia-momento é legato alla variazione dell'azione rispetto alla metrica:

$$\delta I_M = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

La risposta alla domanda posta sopra é affermativa: la seguente azione, detta azione di Hilbert-Einstein fornisce le equazioni di Einstein come adesso si mostrerá:

$$I_G = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} (R + 2\Lambda) \quad (11.6)$$

dove R é lo scalare di curvatura e Λ é la costante cosmologica. Per dimostrare la validitá dell'azione (11.6) disogna variarla rispetto alla metrica e vedere se si ottengono le equazioni di Einstein. A tal proposito bisogna esplicitare la dipendenza di R dalla metrica: $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ dove $R_{\mu\nu}$ é il tensore di Ricci e dipende dalla metrica. Comincio con il considerare il termine $\sqrt{g} R = \sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ La variazione di questo termine comporta la variazione di tutti e tre i pezzi, in quanto sono tutti funzione della metrica:

$$\delta(\sqrt{g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}) = (\delta\sqrt{g}) R + \sqrt{g} (\delta g^{\mu\nu}) R_{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$$

Si é visto precedentemente che vale

$$\delta\sqrt{g} = \frac{\sqrt{g}}{2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

e sostituendo questo risultato nell'equazione precedente si ha

$$\delta(\sqrt{g}R) = \sqrt{g} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right] \delta g^{\mu\nu} + \sqrt{g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$$

Si può vedere che $g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}$ può essere scritto come una 4-divergenza del tipo $D_\alpha z^\alpha$ (sviluppando in termini dei simboli di Christoffel e simili). Per quanto detto nel primo capitolo un termine di questo tipo da zero se integrato per cui

$$\delta(\sqrt{g}R) = \sqrt{g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right] \delta g_{\mu\nu}$$

Resta il termine $\sqrt{g}\Lambda$ dove conterà solo la variazione di \sqrt{g} ossia

$$\delta(\sqrt{g}\Lambda) = \frac{\sqrt{g}}{2} \Lambda g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

Mettendo tutto insieme si ha

$$\delta I_G = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} \left[R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}$$

Peró si é definito il tensore energia-impulso nell'equazione (11.4) come variazione rispetto alla metrica:

$$\delta I_G = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

Dovendo queste due espressioni valere per ogni $\delta g_{\mu\nu}$ devono necessariamente valere le equazioni di Einstein:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G T^{\mu\nu}$$

11.4 I vettori di killing

In questa sezione si riprenderanno i vettori di Killing già trattati nel capitolo sulla geometria differenziale e si approfondirà il rapporto fra vettori di Killing e simmetrie del sistema: in particolare ci si porrà il problema di determinare il numero massimo di vettori di Killing ammesso da una metrica in D dimensioni introducendo il concetto di spazio massimalmente simmetrico. I risultati ottenuti saranno di grande utilità per definire la metrica adatta a descrivere l'universo su grande scala.

Comunque la prima proposizione che si desidera dimostrare é la seguente: se k_μ é un vettore di Killing allora $D_\mu D_\nu k_\lambda = k^\alpha R_{\mu\nu\lambda}^\alpha$ dove $R_{\mu\nu\lambda}^\alpha$ é il tensore di Riemann. Per dimostrare quest'asserzione ricordiamo due fatti:

- se k_μ é vettore di Killing allora vale l'equazione $D_{(\mu} k_{\nu)} = 0$
- il tensore di Riemann é definito come un commutatore di derivate covarianti: $[D_\mu, D_\nu] k_\lambda = -k_\alpha R_{\lambda\mu\nu}^\alpha$

Esplicitando $[D_\mu, D_\nu] k_\lambda = -k_\alpha R_{\lambda\mu\nu}^\alpha$ permutando gli indici e sommando la prima e la terza equazione e sottraendo la seconda si dimostra $D_\mu D_\nu k_\lambda = k^\alpha R_{\mu\nu\lambda}^\alpha$. Il risultato appena ottenuto si rivela di grande utilità nel determinare quanti vettori ammette una metrica. In particolare si può applicare il risultato appena ottenuto alla metrica piatta $\eta^{\mu\nu}$. Quando si considera la metrica piatta la derivata covariante si riduce a quella ordinaria e il tensore di Riemann è nullo quindi ho le seguenti relazioni: $\partial_{(\mu} k_{\nu)} = 0$ e $\partial_\mu \partial_\nu k_\lambda = 0$ (le derivate ordinarie commutano). L'ultima equazione significa che $\partial_\nu k_\lambda = A_{\mu\lambda}$ matrice costante antisimmetrica perché $\partial_{(\mu} k_{\nu)} = 0$. Integrando si ottiene $k^\mu = A^{\mu\nu} x_\nu + B^\mu$ dove B^μ è un vettore costante. In D dimensioni $A^{\mu\nu}$ ha $D(D-1)/2$ dimensioni indipendenti e B^μ ne ha D . Quindi la metrica piatta in totale ammette $D(D-1)/2 + D = D(D+1)/2$ vettori di Killing. Nel caso $D = 4$ si ottengono 10 vettori di Killing ossia si è detto in altro modo l'invarianza della metrica piatta per il gruppo di Poincaré che ha appunto 10 generatori. Ricordando che i vettori di Killing formano un'algebra di Lie ($[k_\mu, k_\nu] = C_{\mu\nu}^\lambda k_\lambda$ con $C_{\mu\nu}^\lambda$ coefficienti di struttura) si può affermare che l'algebra di Lie dei vettori di Killing ha dimensione massima $D(D+1)/2$ dove D è la dimensione della varietà sulla quale è definita la metrica. Per completare questo punto diamo una definizione di varietà massimalmente simmetrica: una varietà (M, g) di dimensione D si dice massimalmente simmetrica se ammette $D(D+1)/2$ vettori di Killing linearmente indipendenti. In generale gli $D(D+1)/2$ vettori di Killing (quando ci sono) sono somma di $D(D-1)/2$ vettori di Killing che possono essere messi nella forma di un tensore antisimmetrico $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$ legato all'isotropia dello spazio (invarianza per rotazioni) mentre i restanti D sono legati all'invarianza per traslazioni (omogeneità). Queste considerazioni saranno riprese più avanti, quando si ricaverà una metrica adatta a descrivere l'universo su grande scala, che si osserva isotropo e si assume omogeneo.

Diamo senza dimostrazione la seguente proposizione: se $T^{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ è un tensore invariante per il gruppo di Lorentz $SO(p, q)$ con $p + q = D =$ dimensione della varietà (significa che la metrica piatta è della forma $\eta_{\mu\nu} = (1_P, -1_Q)$) allora è costruito con i tensori invarianti che sono $\eta^{\alpha\beta}$ e $\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D}$ dove D è la dimensione della varietà.

Qualche esempio chiarifica la potenza di questo teorema:

- se cerco un tensore invariante a 3 indici in una varietà con $D=3$ deve per forza essere della forma $T^{\mu\nu\rho} = C_1 \epsilon^{\mu\nu\rho}$
- se cerco un tensore invariante a 2 indici in una varietà con $D=4$ deve per forza essere del tipo $T^{\mu\nu} = C_1 \eta^{\mu\nu}$. In una tale varietà un tensore a 3 indici invariante non può essere costruito perché devo usare o $\eta^{\mu\nu}$ o $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ che non possono dare un tensore a 3 indici. Un tensore a 4 indici invariante si può scrivere in generale come combinazione lineare della metrica e di $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ nel seguente modo:

$$T^{\mu\nu\rho\sigma} = C_1 \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} + C_2 \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} + C_3 \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\rho} + C_4 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

(le combinazioni di indici che si possono fare con $\eta^{\mu\nu}$ sono di più ma bisogna ricordare che la metrica è simmetrica per cui quelle scritte sopra sotto tutte quelle indipendenti).

11.5 Caratterizzazioni di varietà

In questa sezione caratterizzeremo meglio la varietà secondo le simmetrie di cui sono dotate riuscendo anche a dare una forma più o meno specificata per la metrica che le può descrivere. Cominciamo con le varietà isotrope.

11.5.1 Varietá isotrope

Una varietá di dimensione D si dice isotropa attorno ad un punto P_0 se esistono $D(D-1)/2$ vettori di Killing k_j con $j = 1 \dots D(D-1)/2$ tali che

1. in P_0 si ha $k_j^\mu(P_0) = 0$.
2. $\sum_j c_j D_{[\mu} k_{\nu]}^j(P_0)$ dá tutti i possibili valori al variare di c_j .

In questo modo un generico vettore di Killing $k^\mu(x)$ puó essere espresso come combinaizone lineare dei vettori k_j :

$$k^\mu(x) = \sum_{j=1}^{D(D-1)/2} c_j k_j^\mu(x)$$

Si puó vedere che esiste un sistema di coordinate tale che i $D(D-1)/2$ vettori di Killing che formano il generico vettore di Killing k_μ permettono di scrivere k_μ nella forma $k_\mu = \omega_{\mu\nu} k^\nu$. Ricordando che i vettori di Killing (come ogni altro vettore) sono generatori di diffeomorfismi infinitesimi posso scrivere le seguenti uguaglianze

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu = k^\mu = \omega^\mu_\nu x^\nu \Rightarrow x'^\mu = (1 + \omega)^\mu_\nu x^\nu$$

Per una trasformazione finita (somma di tante trasformazioni infinitesime) si ottiene il solito esponenziale

$$x'^\mu = [e^\omega]^\mu_\nu x^\nu$$

e, come si giá era visto nel primo capitolo per il gruppo $SO(1,3)$ si ha in generale $e^\omega \equiv \Lambda(\omega) \in SO(p, q)$ Si é detto precedentemente che la metrica é invariante per trasformazioni del gruppo $SO(p, q)$ ossia vale

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta g_{\alpha\beta}(x) = g_{\mu\nu}(\Lambda x)$$

Per ragioni di invarianza di Lorentz e di simmetria la metrica deve essere scritta nel seguente modo:

$$g_{\mu\nu}(x) = x_\mu x_\nu f(x^2) + \eta_{\mu\nu} g(x^2)$$

da cui si ricava l'elemento di linea

$$ds^2 = (dx^\mu x_\mu)^2 f(x^2) + dx^\mu dx_\mu g(x^2)$$

Visto che si sta trattando con una metrica invariante per rotazioni conviene passare in coordinate polari: definisco $r = \sqrt{x^\mu x_\mu} \leq 0$ poiché considero vettori di tipo tempo e definisco il versore radiale $n^\mu = x^\mu/r \Rightarrow n^\mu n_\mu = 1 \Rightarrow n^\mu dn_\mu = 0$. n^μ é un versore che descrive $(D-1)$ angoli sulla superficie della sfera a D dimensioni. Con queste definizioni di ha

$$dx^\mu = d(n^\mu r) = dn^\mu \cdot r + dr \cdot n^\mu$$

sostituendo nell'elemento di linea ds^2 (ricordando $n^\mu dn_\mu = n^\mu dx^\mu = 0$) si trova

$$ds^2 = r^2 dr^2 f(r^2) + dr^2 + \underbrace{r^2 dn^\mu dx_\mu}_{d\Omega^2} g(x^2)$$

dove $d\Omega^2$ é l'elemento di angolo solido. Il risultato appena trovato é notevole in quanto, se una varietá é isotropa posso separare la parte radiale da quella angolare e scrivere

$$\frac{ds^2}{g(r^2)} = \frac{1 + r^2 f(r^2)}{g(r^2)} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (11.7)$$

e il punto P é definito dall'averne $r = 0$

Ora proviamo a fare la seguente cosa: consideriamo una varietá invariante per rotazioni attorno all'asse z : significa che $z(x, y) = z(r) = F(r)$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $F(r)$ é una funzione indeterminata, dipendente dalla varietá. Passo dalle coordinate cartesiane a quelle polari nel modo solito

$$\begin{cases} x = r \sin \phi \\ y = r \cos \phi \end{cases} \Rightarrow dx^2 + dy^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2$$

In generale vale

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Nel nostro caso si ha $ds^2 = r^2 d\phi^2 + dr^2 + dz^2$. dove $dz^2 = dF(r)^2 = F'(r)^2 dr^2$ per cui si ha $ds^2 = (1 + F'(r)^2)dr^2 + r^2 d\phi^2$ dove $F'(r)$ é una funzione non determinata. Nel caso particolare in cui la varietá che si considera é una sfera di Raggio R (la varietá piú simmetrica possibile) allora $z(r)$ é determinata: vale infatti $r^2 + z(r)^2 = R^2$ da cui $z(r) = \sqrt{R^2 - r^2}$ e infine $F'(r) = dz/dr = -r/\sqrt{R^2 - r^2}$ e, sostituendo in ds^2 si trova

$$ds^2 = \frac{1}{1 - \frac{r^2}{R^2}} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (11.8)$$

che non contiene piú funzioni incognite (d'altronde ho specializzato la varietá). La metrica (11.8) é decisamente importante, visto che, con alcune modifiche, sará la metrica usata per descrivere l'universo su grande scala. Quindi, ricapitolando, una metrica invariante per rotazioni ha (al massimo) $D(D - 1)/2$ vettori di Killing dove D é la dimensione della varietá. Passiamo ora agli spazi omogenei.

11.5.2 Varietá omogenee e massimalmente simmetriche

Una varietá (M, g) di dimensione D si dice omogenea se ammette D vettori di Killing K_j^μ linearmente indipendenti tali che $\sum_j c_j k_j^\mu(x)$ assuma tutti i valori al variare di c_j . Una varietá omogenea e isotropa attorno a qualche punto P si dice massimalmente simmetrica. In modo piú specifico: una varietá (M, g) di dimensione D si dice massimalmente simmetrica se ammette j vettori di Killing k^μ con $j = D(D + 1)/2$.

Un tensore $T^{\nu_1 \dots \nu_N}(x)$ si dice invariante in forma in una varietá massimalmente simmetrica se $\delta_k T^{\nu_1 \dots \nu_N}(x) = 0 \forall k^\mu$ vettore di Killing ossia se $T^{\nu_1 \dots \nu_N}(x) = T^{\nu_1 \dots \nu_N}(x)$. Vale la seguente proposizione: un tensore invariante in forma é costruito con i tensori invarianti in forma elementari, che sono $g^{\mu\nu}(x)$ e $\epsilon^{\alpha_1 \dots \alpha_D} / \sqrt{g}$ con coefficienti costanti. La dimostrazione di questo teorema (non molto lunga) non viene data. Si nota un fatto importante: lungo un vettore di Killing la derivata di Lie della metrica é nulla: $L_k g_{\mu\nu} = 0$. Poiché il tensore di Riemann, di Ricci e lo scalare di curvatura sono costruiti con la metrica vale anche $L_k R_{\mu\nu\rho\sigma} = L_k R_{\nu\sigma} = L_k R = 0$. Se si considera una varietá massimalmente simmetrica posso esprimere qualsiasi vettore come combinazione dei vettori di Killing quindi la derivata di Lie della metrica, del tensore di Riemann, di Ricci, dello scalare di curvatura é nulla per ogni vettore: in altro modo ho a che fare con tensori invarianti per cui vale la proposizione data prima. In sintesi posso affermare che il tensore di Riemann é combinazione lineare della metrica e del tensore antisimmetrico a 4 indici con coefficienti costanti

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = k(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + c \frac{\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}}{\sqrt{g}}$$

La condizione $R_{[\mu\nu\rho]\sigma} = 0$ impone $c = 0$ per cui vale

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = k(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) \quad (11.9)$$

Contraendo si ricava per il tensore di Ricci e lo scalare di curvatura

$$R_{\mu\nu} = k(D-1)g_{\mu\nu} \quad R = k(D-1)D$$

dove D é la dimensione della varietà e k é una costante. Se $k > 0$ si parla di spazio di De Sitter, se $k < 0$ si parla di spazio di Anti De Sitter. Vale anche un'importante teorema detto teorema di unicit : variet  massimalmente simmetriche, della stessa dimensione D , con lo stesso k e la stessa segnatura $\eta^{\mu\nu}$ sono diffeomorfe. Ad esempio: in 2 dimensioni la sfera ammette $3 = 2(2+1)/2$ vettori di Killing e tutte le variet  massimalmente simmetriche con lo stesso k della sfera sono diffeomorfe alla sfera.

11.5.3 Costruzione di spazi massimalmente simmetrici

Volendo ci sarebbe molto da dire sulla costruzione di spazi massimalmente simmetrici. Qui si dar  solo qualche "dritta" e qualche spiegazione concettuale fondamentale per la scarsa comprensione che ha l'autore della materia. Comunque cominciamo con un esempio: in $D=2$ $\eta^{\mu\nu} = \delta^{ij}$ con $i, j = 1, 2$. La costante $k = 1/R^2 > 0$ (se si ha una sfera di raggio R) e i vettori di Killing sono $2(2+1)/2 = 3$ corrispondenti all'invarianza per il gruppo $SO(3)$. Si é visto, nel capitolo dedicato alla geometria differenziale, che i vettori di Killing sono legati alle isometrie della metrica ossia ai diffeomorfismi che lasciano la metrica invariata. Sempre considerando la sfera si pu  notare il seguente fatto: chiamo x^i le coordinate (x, y) e separo la coordinata z . Per fare questa operazione ho introdotto un piano equatoriale dato dagli assi (x, y) . Nel fare ci  rompo la simmetria per rotazioni della sfera in quanto la sfera non ha piani privilegiati. Definendo $x^i \equiv (x^i, z)$ e scrivendo l'elemento di linea nella forma $x^i x^i$ ho una forma manifestamente invariante, visto che il prodotto scalare é invariante per rotazioni. Per , separando (x, y) da una parte e z dall'altra, ho $ds^2 = dx^i dx^i + dz^2$ Posso esprimere dz in funzione di (x, y) poich  sto considerando una sfera di raggio R : $z^2 + x^i x^i = R^2$. Infatti da quest'espressione ottengo $2zdz + 2x^i dx^i = 0$ da cui

$$dz^2 = \frac{(x^i dx^i)^2}{z^2} = \frac{(x^i dx^i)^2}{R^2 - x^i x^i}$$

Quindi l'elemento di linea assume la forma

$$ds^2 = dx^i dx^i + dz^2 = dx^i dx^i + \frac{x^i x^j dx^i dx^j}{R^2 - x^i x^i} \Rightarrow g^{ij}(x) = \delta^{ij} + \frac{x^i x^j}{R^2 - x^k x_k}$$

La cosa notevole é l'aver scritto la metrica di una sfera in una forma non manifestamente invariante per rotazioni: la sfera é effettivamente invariante per rotazioni ma l'aver introdotto un piano equatoriale ha portato a rendere non manifesta questa simmetria (che rimane per !). Cercando le isometrie della metrica si pu  vedere che la sfera ammette effettivamente 3 vettori di Killing, ossia il numero massimo possibile. Poich  é una variet  massimalmente simmetrica il tensore di Riemann é della forma

$$R_{ijkl} = k(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$$

Il gioco di cambio di coordinate pu  essere fatto anche se le dimensione sono pi  di due e si considera la metrica di Minkowski. Considero una variet  a $(D+1)$ dimensioni e indico con

x^μ le prime D coordinate mentre la coordinate (D+1)-esima la chiamo z . Non mi limito solo al caso di una sfera a D dimensioni ma considero anche altre possibilità, ossia k può essere ≤ 0 . Posso, senza perdere in generalità, scrivere $kx^\mu x_\mu + z^2 = 1$ che é invariante per rotazioni. Ripetendo i passaggi fatti prima per la sfera in 2 D si ottiene

$$ds^2 = dx^\mu dx_\mu + \frac{k(x^\mu dx_\mu)^2}{1 - kx^\mu x_\mu} \Rightarrow g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + \frac{kx_\mu x_\nu}{1 - kx^\rho x_\rho}$$

la cui forma non é manifestamente invariante per $SO(3)$. Anche in questo caso si può mostrare (calcolando esplicitamente il tensore di Riemann a partire dalla metrica) che vale

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = k(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho})$$

Considero ora spazi spaziali: $\eta_{\mu\nu} = \eta_{ij}$ con $i = 1, \dots, D$. In questo caso la metrica é

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{kx_i x_j}{1 - kx^2}$$

da cui si ricava la forma dei simboli di Cristoffel

$$\Gamma_{ij}^k = kg_{ij}x^k$$

Se vale l'invarianza per rotazioni mi metto in coordinate polari: $x^i = n^i r$ con $r = \sqrt{x^2}$ da cui $n^i n^i = 1$. I versori n^i parametrizzano la sfera S^{D-1} . Sostituendo nella metrica data sopra posso separare la dipendenza radiale da quella angolare trovando, per l' elemento di linea la forma

$$ds^2 = r^2 d\Omega + \frac{dr^2}{1 - kr^2}$$

Visto che prima si é data la forma dei simboli di Christoffel per spazi spaziali tanto vale trovare le geodetiche spaziali: le geodetiche sono in generale data dalla formula

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

Usando l'espressione ricavava prima di ottiene

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + kg_{jk}x^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

ma ricordando che

$$g_{ik} \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 1$$

si ottiene

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + kx^i = 0 \tag{11.10}$$

Come si intuisce l'andamento delle geodetiche dipende dal parametro k , in particolare se é positivo, nullo o negativo. Se é nullo si ottengono delle rette (la retta ha derivata prima costante e derivata seconda nulla) illimitate in quanto non si sono vincoli si x^i : lo spazio é infinito. Se $k = 1/R^2 > 0$ si ottiene uno spazio chiuso poiché si ricava il voncolo $|\vec{x}| \leq R$. D'altronde si ha un' equazione (che ricorda molto da vicino un moto armonico) che é risolta da funzioni trigonometriche tipo $x^i(s) = a^i \sin(s/R + b^i)$. Tra l'altro il parametro s può essere grande a piacere, la limitatezza dello spazio si manifesta nella proprietà delle geodetiche di

essere chiuse e senza bordo per cui periodicamente, esattamente dopo $\Delta s = 2\pi R$, si ritorna al punto di partenza. Infine se $k < 0$ ossia $k = -1/L^2$ ottengo spazi infiniti e senza bordo. Cambiando il segno di k in (11.10) si passa da funzioni trigonometriche a esponenziali (o dal seno al seno iperbolico). Ora la soluzione é del tipo $x^i(s) = a^i \sinh(s/L + b^i)$. Poiché il seno iperbolico é illimitato ora si ha uno spazio infinito a curvatura negativa e senza bordo. Un esempio famoso a due dimensioni é il piano di Gauss-Lobacewski che non si puó immergere in R^3 .

Nella prossima sottosezione si continuerá l'analisi delle varietà massimalmente simmetriche con lo scopo di ricavare la metrica di Robertson-Walker, che é la metrica utilizzata per descrivere l'universo su grande scala.

11.5.4 La metrica di Robertson-Walker

Si é visto che, per spazi massimalmente simmetrici con segnatura $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ e $i = 1, \dots, D$ la metrica si puó mettere nella forma

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + \frac{Kx^i x^j}{1 - Kx^k x_k} \quad \text{con } k \leq 0$$

Si usa definire, per convenzione, $k = Kr^2$ in modo che la costante riscalata k assuma i valori $1, 0, -1$ corrispondenti a curvatura positiva, nulla e negativa rispettivamente. Analogamente si riscalano anche le coordinate x^i ponendo $x^i = x^i/R$. In questo modo la metrica assume la forma

$$g_{ij}(x) = R^2 \left[\delta_{ij} + \frac{kx^i x^j}{1 - kx^k x_k} \right]$$

dove R é il fattore di scala, una funzione del tempo che scala le distanze. In coordinate polari la metrica assume la forma

$$g_{ij}(x) = R^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

e, nel caso $k = 1$ a causa del riscaldamento la condizione $x < R$ diventa $r < 1$. Detto questo passiamo alle varietà con sottovarietà massimalmente simmetriche: considero le coordinate x^μ con $\mu = 1, \dots, D$ e le divido in due parti ossia $x^\mu \equiv (u^i, v^\alpha)$ con $i = 1, \dots, M$ e $\alpha = 1, \dots, D - M$. Una sottovarietà con v^α costante, M dimensionale, si dice massimalmente simmetrica se esistono $M(M+1)/2$ vettori di Killing linearmente indipendenti k_I^μ con $I = M(M+1)/2$ tali che per ogni i si abbia: $k_I^a(u, v) = 0$ e $k_I^i(u, v) \neq 0$. Ricordo che i vettori di Killing generano spostamenti infinitesimi delle coordinate: quello che si richiede é $\delta v^\alpha = 0$ mentre $\delta u^i \neq 0$. A tal proposito enunciamo un teorema che ha conseguenze significative: se sono soddisfatte le condizioni appena date é possibile scegliere le coordinate (u, v) in modo che siano soddisfatti i seguenti punti:

1. $ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(x) = g_{ab}(v)v^a v^b + f(v)\tilde{g}_{ij}(u)du^i du^j$
2. \tilde{g}_{ij} é una metrica in un sottospazio massimalmente simmetrico ossia é della forma $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + \frac{Kx^i x^j}{1 - Kx^k x_k}$
3. $g_{ia} = 0$
4. vale la corrispondenza $k = 1 \Leftrightarrow$ curvatura positiva, $k = 0 \Leftrightarrow$ curvatura nulla e $k = -1 \Leftrightarrow$ curvatura negativa.

5. $k_I^\mu = k_I^\mu(u) = \delta u^i$

6. se i sottospazi sono di tipo spazio allora $f(v) < 0$ e $\eta_{ij} = \delta_{ij}$.

Un prototipo di sottovarietà massimalmente simmetrica viene dall'universo stesso: considero uno spazio tempo a 4D e la sottovarietà massimalmente simmetrica deriva dalla parte spaziale della metrica che ha 3D. I vettori di Killing saranno allora $3(3+1)/2 = 6$ e avranno componenti spaziali diverse da zero mentre la loro componente temporale é nulla. Per quanto detto prima una tale metrica puó essere messa nella forma

$$ds^2 = g(t)dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

(davanti a dt^2 c'è c^2 per ragioni dimensionali) Cambiando variabile temporale, ponendo $t' = \int_0^t t(\tilde{t})d\tilde{t}$ la metrica assume la forma della metrica di Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \quad (11.11)$$

dove $k = 1, 0, -1$ e $R(t)$ é detto fattore di scala o parametro di espansione. Descrivere l'universo usando la metrica di RW ha una notevole implicazione poiché vale il seguente teorema: la metrica RW implica che nel lato destro delle equazioni di Einstein dovrà esserci il tensore energia-momento di un fluido perfetto che ha la forma

$$T^{\mu\nu} = (p + \rho)u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p \quad \text{con} \quad u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1 \quad (11.12)$$

La dimostrazione, omessa, poggia sulle proprietà che devono soddisfare i tensori invarianti in uno spazio massimalmente simmetrico. Ricordo solo che ρ e p sono rispettivamente la densità di energia e la pressione ed entrambi sono funzione del tempo. Nel sistema di riferimento solidale con il fluido la 4-velocità assume la forma $u^\mu = (1, \vec{0})$ e, sostituendo questa 4-velocità in (11.12) si ottiene $T^{\mu\nu} = \text{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. Con queste note si conclude questo capitolo dedicato ad aspetti di natura formale della relatività generale. I prossimi e ultimi due capitoli sono dedicati all'applicazione della relatività generale in ambito astrofisico e cosmologico: si studieranno prima il collasso gravitazionale e poi l'universo su grande scala. Fatto questo il programma é concluso. Mi scuso nuovamente per la scarsa cura con cui é stato redatto questo capitolo, in particolare nell'ultima parte. D'altra parte se sono studente e non docente un motivo (almeno) c'è.

Capitolo 12

Il collasso gravitazionale

Il questo capitolo si tratterá il collasso gravitazionale che avviene per stelle con una certa massa minima. Non si ha la pretesa di organicitá o di completezza di un testo di astrofisica ma si cercherà piuttosto di utilizzare i numerosi strumenti ricavati nello studio della relativitá generale applicandoli ad un contesto specifico. Comunque iniziamo descrivendo (brevemente) a parole perché e come avviene il collasso.

12.1 Nane bianche e stelle di neutroni

Le stelle nascono da gas idrogeno che si comprime per autogravitá. L'aumento di temperatura conseguente alla compressione aumenta la temperatura abbastanza da innescare le reazioni nucleari che portano alla formazione di nuclei piú pesanti: si parte dall'elio, si passa per il carbonio... fino a che si arriva al ferro. Il ferro é il nucleo con la piú alta energia di legame: la formazione di nuclei piú pesanti del ferro diventa un processo endoenergetico e non avviene in condizioni ordinarie (le esplosioni di supernova sono un'altro discorso). Durante la propria vita la stella perde massa per emissione di onde elettromagnetiche e neutrini. La perdita di massa raffredda la stella che cosí si comprime. Si arriva al punto di avere due gas: un gas di elettroni e un gas di nuclei con un rapporto nucleoni/elettroni ~ 2 . La pressione che si oppone al collasso deriva dal principio di esclusione di Pauli che impedisce (o tenta di impedire) l'ammassarsi di elettroni tutti nello stesso stato. Si ha una situazione per cui la stabilitá della stella é triggerata dalla compressione fra la compressione gravitazionale e la pressione data dal principio di Pauli. Si hanno due equilibri possibili: le nane bianche e le stelle di neutroni.

Nelle nane bianche la compressione gravitazionale é data da un gas di nuclei di ferro mentre la pressione é data dal gas di elettroni freddi in conseguenza del principio di esclusione. In questi limiti si puó utilizzare la fisica newtoniana poiché la gravitá in superficie va come il rapporto delle masse di elettroni e nucleoni che é $\ll 1$. In media le stelle di neutroni hanno massa $\sim 1.2M_{\odot}$ dove M_{\odot} é la massa del Sole e raggio attorno ai $10^4 km$. Questi parametri sono detti limite di Chandrasekhar.

Nelle stelle di neutroni si ha una compressione 10^9 volte superiore rispetto alle nane bianche. I parametri ora diventano $m \sim M_{\odot}$ e il raggio é attorno ai $10 km$. Per arrivare a tali compressioni é avvenuta la reazione



ossia protoni ed elettroni si combinano a dare neutroni originando anche un neutrino che

scappa. Ora sia l'attrazione gravitazionale sia la pressione per degenerazione quantistica deriva dal gas di neutroni.

Passiamo ora a vedere piú in dettaglio il comportamento delle nane bianche. In questa situazione si hanno N elettroni, $2N$ nucleoni e, se V é il volume della stella, $\rho = N/V$ é la densitá elettronica. Se la temperatura é molto bassa, per cui si ha un riempimento di tutti i possibili stati di energia partendo dal piú basso (senza lasciare buchi) allora vale la seguente densitá degli stati: il numero di stati in un intervallo di momento $k, k + dk$ é

$$2V \frac{4\pi k^2 dk}{h^3} \quad (12.1)$$

per cui il numero totale di elettroni si otterrá integrando (12.1) da 0 al momento massimo o momento di Fermi che si indica con k_F . Quindi

$$N = V \int_0^{k_F} \frac{8\pi k^2 dk}{h^3} = V \frac{8\pi}{3} \frac{k_F^3}{h^3} \Rightarrow \rho = \frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3} \frac{k_F^3}{h^3} \quad (12.2)$$

Il volume in funzione del raggio é il solito $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ e sostituendo in $\rho = N/V$ si trova

$$\rho = \frac{3N}{4\pi R^3} = \frac{8\pi}{3} \frac{k_F^3}{h^3}$$

da cui si ricavano i seguenti andamenti

$$k_F \sim \frac{\hbar N^{1/3}}{R} \sim \hbar \rho^{1/3} \Rightarrow \frac{1}{R} \sim \rho^{1/3} \Rightarrow \frac{1}{R^n} \sim \rho^{n/3} \quad (12.3)$$

Si distinguono due casi, a seconda che l'elettrone sia relativistico o meno:

- nel caso relativistico l'energia $E_R \sim k_F c \sim \frac{\hbar N^{1/3}}{R}$.
- nel caso non relativistico l'energia $E_{NR} = m_e + \frac{k_F^2}{2m_e} = m_e + \frac{\hbar^2 N^{2/3}}{2m_e R^2}$

L'energia gravitazionale di un nucleone é $E_G \approx \frac{G(Nm_n)m_n}{R}$. La quantitá totale di calore scambiata é data dalla somma della variazione di energia interna e dal lavoro di compressione, ossia $dQ = dU - pdV$. Assumendo l'adiabaticitá, ossia $dQ = 0$ si ottiene

$$p = \frac{dU}{dV} = \frac{d(EN)}{dV} = N \frac{dE}{dR} \frac{dR}{dV} \simeq N \frac{dE}{dR} \frac{1}{R^2} \quad (12.4)$$

Quindi la pressione che si oppone alla compressione gravitazionale dipende dalla variazione dell'energia rispetto al raggio e, analogamente a prima separiamo il caso relativistico da quello non relativistico:

- nel caso non relativistico vale

$$p_{NR} = \frac{1}{R^2} \frac{dE_{NR}}{dR} \sim \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^3} = \frac{1}{R^5} \sim \rho^{5/3}$$

- nel caso relativistico invece si ha

$$p_R = \frac{1}{R^2} \frac{dE_N}{dR} \sim \frac{1}{R^2} \frac{1}{R^2} = \frac{1}{R^4} \sim \rho^{4/3}$$

La pressione gravitazionale é $p_G \sim \frac{1}{R^2} \frac{dE_G}{dR} \sim \frac{1}{R^4} \sim \rho^{4/3}$. Come si vede si ha lo stesso andamento della pressione relativistica per cui non può esserci equilibrio tranne nel caso $\rho = 0$ (la due curve non si incontrano più per cui non possono dare una differenza nulla fra compressione gravitazionale e pressione di degenerazione) ma allora non c'è la stella! Quindi il primo risultato importante ottenuto in questa trattazione approssimata é che la gravità non può stabilizzare stelle a grande moto termico. Si può anche stimare il numero minimo di nucleoni per cui la gravità domina sulla pressione se gli elettroni sono relativistici: considero un numero di nucleoni tali che la pressione gravitazionale e la pressione di degenerazione degli elettroni si equivalgano. La stessa relazione vale per le rispettive energie. Dalle relazioni scritte prima $E_g \sim N$ mentre $E_R \sim N^{1/3}$: superato il punto di equilibrio l'energia gravitazionale supera quella di repulsione poiché cresce con una potenza maggiore di N. Quindi posso stimare il numero massimo di nucleoni dopo di che inizia il collasso anche della nana bianca uguagliando E_R e E_G ottenendo

$$\hbar N^{1/3} = GNm_n^2 \Rightarrow N_{max} \left(\frac{\hbar c}{Gm_n^2} \right)^{3/2} \sim 2 \cdot 10^{57}$$

Il numero di nucleoni trovato corrisponde al numero di nucleoni del Sole. Un calcolo meno approssimato avrebbe portato a trovare il limite in 1.4 masse solari. Riassumendo: una nana bianca con massa superiore a 1.4 masse solari é instabile e inizia il collasso verso un'altra configurazione di equilibrio rappresentata dalla stella di neutroni. La ricerca della massa minima per cui neanche una stella di neutroni é stabile porta al limite di 4 masse solari. Se una stella di neutroni ha una massa superiore di 4 masse solari non é stabile e collassa in un punto nero (buco nero).

Prima di passare alla trattazione del collasso gravitazionale vero e proprio diamo qualche informazione sulle coordinate comoventi nella metrica di Robertson-Walker (11.11). In questa metrica la 4-velocità $u^\alpha = (1, \vec{0})$ soddisfa l'equazione della geodetica:

$$\frac{Du^\alpha}{Ds} = \frac{du^\alpha}{ds} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha u^\beta u^\gamma = 0 + \Gamma_{00}^\alpha = 0$$

inoltre $u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = g_{00} = 1$. Ora $u^\alpha = dx^\alpha/ds = (1, \vec{0})$ significa $x^\alpha = (s, x^i(0))$ ossia una particella che segue una geodetica in RW rimane fissa rispetto alle coordinate comoventi: segue l'espansione secondo il fattore di scala insito nella metrica ma la sua posizione scalata rispetto al fattore di scala non varia nel tempo.

12.2 Il collasso gravitazionale

12.2.1 Formulazione del problema

Nel trattare il collasso gravitazionale formuliamo alcune ipotesi che permettono una trattazione più semplice:

1. la massa collassante é a simmetria sferica
2. la massa collassante é omogenea
3. non si considera la pressione (la pressione porterebbe ad un collasso più rapido poiché microscopicamente la pressione é energia cinetica e la sorgente della gravità é l'energia).

Dall'ipotesi uno si ricava che esiste una forma standard della metrica che può essere scritta come

$$ds^2 = B(\bar{r}, \bar{t})d\bar{t}^2 - A(\bar{r}, \bar{t})d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2$$

che vale in tutto lo spazio. Dalle ipotesi 1 e 2 si ricava che all'interno della massa collassante si deve utilizzare la metrica di RW data in (11.11) poiché vale sia l'omogeneità che l'isotropia:

$$ds_I^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

Per quanto detto alla fine del capitolo precedente la metrica di Robertson-Walker implica che si debba utilizzare il tensore energia-momento di un fluido perfetto dato in (11.12) Dall'ipotesi 3 il tensore energia-momento all'interno della massa collassante ha l'espressione $T^{\mu\nu} = \rho(t)u^\mu u^\nu$ mentre all'esterno della massa collassante $T^{\mu\nu} = 0$ poiché sia la pressione che la densità è nulla. Si ha quindi una metrica invariante per rotazioni nel vuoto: per il teorema di Birckhoff la metrica è di Schwarzschild. Quindi all'esterno della metrica collassante vale la metrica

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right) d\bar{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2$$

dove $r_s = 2MG/c^2$ è il raggio di Schwarzschild. Le coordinate barrate \bar{r} e \bar{t} indicano le coordinate fisiche o standard mentre le coordinate r, t della metrica di RW sono le coordinate comoventi. Le condizioni iniziali sono $\bar{\theta} = \theta$, $\bar{\theta} = \theta$, $d^2\bar{\Omega} = d^2\Omega$ e $\bar{r}(t, r) = rR(r)$.

Il programma che si intende seguire è il seguente:

1. risolvere le equazioni di Einstein per trovare l'andamento del fattore di scala $R(t)$ e della densità $\rho(t)$.
2. imporre le condizionitá nel passaggio fra interno ed esterno dove si passa dalla metrica RW alla metrica di Schwarzschild.
3. descrivere l'osservazione del collasso dall'esterno.

12.2.2 Andamento di $R(T)$ e $\rho(t)$

Le condizioni iniziali sono $\bar{\theta} = \theta$, $\bar{\theta} = \theta$, $d^2\bar{\Omega} = d^2\Omega$ e $\bar{r}(t, r) = rR(r)$. Un elemento di fluido solidale con la compressione della stella ha 4-velocitá $u^\alpha = (1, \vec{0})$. Inoltre suppongo che, al tempo del collasso, che considero il tempo $t = 0$, la massa sia ferma. Posso, senza perdere in generalitá riscalarlo r in modo che $R(0) = 1$ e la condizione di iniziare il collasso con velocitá nulla significa che vale $\dot{R}(0) = 1$. Il fatto di aver riscaldato r significa che ora $k \neq -1, 0, +1$ ma vi sará un corrispondente riscaldamento (mantenendo gli stessi segni). Il fatto di avere coordinate comoventi fisse significa che ad ogni istante la distanza fisiche fra due elementi del fluido sono date dalle loro coordinate comoventi (fissate al tempo 0) moltiplicate per il fattore di scala che invece è funzione del tempo: il fattore di scala connette le distanze comoventi con quelle fisiche:

$$\bar{r}(r, t) = R(t) \cdot r$$

In particolare, se a è la separazione comovente di due punti diametralmente opposti della sfera collassante, per $t = 0$ si ha $\bar{r}(a, 0) = R(0)a = a$ avendo riscaldato $R(t)$ in modo che $R(0) = 1$. Poiché le coordinate comoventi sono fissate si può dare una definizione di interno ed esterno in funzione delle coordinate comoventi: interno alla massa collassante significa $r \leq a$ mentre

esterno alla massa collassante significa $r > a$ e queste condizioni non dipendono dal tempo in quanto la dipendenza temporale é inglobata nel fattore di scala $R(t)$. Le condizioni iniziali sono state fissate e si può procedere con le equazioni di Einstein nella trattazione del collasso. Le equazioni di Einstein sono solitamente espresse attraverso il tensore di Einstein, ma si é visto che posso essere espresse utilizzando il solo tensore di Ricci nella forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda \right)$$

con $T^{\mu\nu} = \rho(t)u^\mu u^\nu$ da cui $T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda = \rho(t) [u^\mu u^\nu - 1/2 g^{\mu\nu}] \equiv S^{\mu\nu}$. Il tensore di Ricci ammette le stesse simmetrie, ossia gli stessi vettori di Killing, della metrica di RW per cui, a priori, vale

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{00}(t) \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{ij} &= f(t)g_{ij} \end{aligned}$$

Calcolando esplicitamente le componenti si trova

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{ij} &= -\frac{R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k}{R^2} g_{ij} \end{aligned} \tag{12.5}$$

mentre per gli elementi di $S^{\mu\nu}$ si trova

$$\begin{aligned} S_{00} &= \frac{\rho}{2} \\ S_{0i} &= 0 \\ S_{ij} &= -\frac{1}{2} g_{ij} \rho \end{aligned} \tag{12.6}$$

Prendendo i pezzi corrispondenti da (12.5) e (12.6) la equazioni di Einstein $R_{\mu\nu} = 8\pi G S_{\mu\nu}$ assumono la forma

$$\begin{aligned} 3\frac{\ddot{R}}{R} &= -4\pi G \rho \\ R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k &= 4\pi G \rho R^2 \end{aligned} \tag{12.7}$$

Moltiplicando la prima equazione per R^2 e sommando la seconda e dividendo per 2 si ottiene

$$2\ddot{R}R + \dot{R}^2 + k = 0$$

Moltiplicando entrambi i termini per \dot{R} e notando che $2\ddot{R}R = d(\dot{R}^2)/dt$ l'equazione precedente diventa

$$R \left(\frac{d}{dt} \dot{R}^2 \right) + \dot{R} (\dot{R}^2 + k) = 0 \Rightarrow R \frac{d}{dt} (\dot{R}^2 + k) + \dot{R} (\dot{R}^2 + k) = 0$$

dove nel secondo passaggio si é aggiunta la costante k che non ha effetto nella derivazione temporale. L'ultima equazione ottenuta ha la forma della derivata di un prodotto. Il fatto che é nulla significa che la funzione integranda é costante:

$$R \frac{d}{dt} (\dot{R}^2 + k) + \dot{R} (\dot{R}^2 + k) = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} (\dot{R}^2 + k) R = 0 \Leftrightarrow (\dot{R}^2 + k) R = \text{costante}$$

Per determinare la costante ricordo la condizioni iniziali: $R(0) = 1$ e $\dot{R}(0) = 0$ da cui la costante vale k per cui si ha $\dot{R}^2 + k = k/R$. Sostituendo \ddot{R} ricavato dalla prima equazione di (12.7) e sostituendolo nella seconda si trova $\dot{R}^2 + k = 8\pi G/3\rho R^2$ e ugualgiando questa espressione a $\dot{R}^2 + k = k/R$ so trova infine

$$\frac{8\pi G}{3}\rho R^2 = \frac{k}{R} \Rightarrow \rho(t)R^3(t) = \frac{3}{8\pi G}k = \text{costante} \quad (12.8)$$

L'equazione appena trovata esprime la conservazione della massa durante il collasso. Si può anche ricavare l'andamento della densità durante il collasso in funzione della densità iniziale: vale $\rho(t)R^3(t) = \rho(0)R^3(0) = \rho(0)$ da cui $\rho(t) = \rho(0)/R^3(t)$ e $k = (8\pi G/3)\rho(0)$. Prima si era ottenuta l'equazione $\dot{R}^2 + k = k/R$ che può essere riscritta come $\dot{R}^2 = k[1/R - 1]$. Questa equazione ammette una soluzione implicita nella cicloide con le condizioni $R(0) = 1$ e $\dot{R}(0) = 0$. ossia posso esprimere R, t in funzione di un parametro ψ nel seguente modo:

$$t = \frac{\psi + \sin \psi}{2\sqrt{k}}$$

$$R = \frac{1}{2}(1 + \cos \psi)$$

Si vede che $R = 0 \Leftrightarrow \phi = \pi$ e, di conseguenza, $T = t(\pi) =$ tempo di collasso proprio o comovente (ho usato coordinate comoventi) $= \pi/(2\sqrt{k})$. Ricordando che $k = (8\pi G/3)\rho(0)$ si ottiene

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho(0)}}$$

Naturalmente $\rho(\pi) = \infty$ poiché $R(\pi) = 0$. Riassumendo: si ha il collasso ad un punto in un tempo *proprio* finito.

12.2.3 Continuità fra interno ed esterno

Si è visto che all'interno della massa collassante si può usare la metrica RW:

$$ds_I^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

dove r è la coordinata comovente: la coordinata fisica $\bar{r}(r, t) = rR(t)$. Visto il legame fra r e \bar{r} proviamo ad esprimere la metrica all'interno della massa collassante attraverso \bar{r} in modo da poter imporre delle condizioni di continuità fra interno ed esterno (all'esterno si usa \bar{r}). Cominciamo sviluppando i differenziali: da $\bar{r} = rR$ si ha

$$d\bar{r} = Rdr + rdR \Rightarrow dr = \frac{d\bar{r}}{R} - \frac{dR}{R} = \frac{d\bar{r}}{R} - \frac{\bar{r}dR}{R^2}$$

mentre per la coordinata temporale di ha

$$dt = dt \frac{\dot{R}}{\dot{R}} = \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{dR}{\sqrt{k} \left(\frac{1}{R} - 1 \right)^2}$$

Quadrando i differenziali e inserendoli in ds_I^2 (ricordo che le coordinate angolari comoventi e fisiche sono le stesse, è solo la distanza che è scalata tramite $R(t)$) si ottiene

$$ds_I^2 = CdR^2 + Dd\bar{r}^2 + 2Ed\bar{r}dR - \bar{r}^2 d\Omega^2$$

dove sono stati definiti i coefficienti

$$C = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1-R} - \frac{1}{1-k\frac{\bar{r}}{R^2}} \right) \quad D = \frac{1}{1-k\frac{\bar{r}}{R^2}} \quad E = \frac{\bar{r}}{R} \frac{1}{\left(1-k\frac{\bar{r}^2}{R^2}\right)}$$

Come si vede, la forma ottenuta per ds_I^2 contiene un termine fastidioso non diagonale per cui si cerca un fattore integrante η che permetta di eliminarlo. Qui tralasciamo i dettagli: diciamo solo che il fattore integrante é $\eta = k/R$ e che armeggiando un po' si riesce a scrivere la metrica ds_I^2 nel modo seguente:

$$ds_I^2 = \frac{1}{k} \frac{R(1-R)(1-k\bar{r}^2)}{1-k\frac{\bar{r}^2}{R}} dt^2 - \frac{1}{1-k\frac{\bar{r}^2}{R}} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2 \quad (12.9)$$

Ora un confronto con la metrica esterna ds_E^2 é piú agevole visto che sono entrambi diagonali; resta però da collegare la coordinata temporale t dell'equazione (12.9) con le coordinate \bar{t} dalle metrica esterna, che viene riscritta per comodità:

$$ds_E^2 = \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right) d\bar{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2 \quad (12.10)$$

Anche in questo frangente daremo solo alcuni risultati (che sembrano effettivamente calati dal cielo). Intanto la superficie di passaggio fra interno ed esterno é data dalla condizione $r = a \Leftrightarrow \bar{r} = aR(t)$. Uguagliando i coefficienti di $d\bar{r}^2$ dati in (12.9) e (12.10) si ha:

$$\frac{ka^2}{R} = \frac{r_s}{aR}$$

da cui $r_s = a^3k$. Ricordando che vale

$$k = \frac{8\pi G}{3} \rho(0) \quad r_s = 2MG$$

e uguagliadoli si trova $M = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho(0)$. Per quanto riguarda il legame fra le variabili temporali diamo solo dei risultati: si definisce

$$S(r, t) = 1 - \sqrt{\frac{1-kr^2}{1-ka^2}} (1-R) \Rightarrow S(a, t) = R(t)$$

intree, si può vedere che il tempo di Schwarzschild \bar{t} é legato al tempo comovente t da

$$\bar{t}(r, t) = \sqrt{\frac{1-ka^2}{k}} \int_{S(r,t)}^1 \left(\frac{N}{1-N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N}{1-\frac{ka^2}{dN}}$$

e la metrica interna data in (12.9) può essere espressa in funzione di $d\bar{t}$ nel seguente modo:

$$ds_I^2 = \frac{R}{S} \frac{1-S}{1-R} \frac{\left(1-k\frac{a^2}{S}\right)^2}{1-k\frac{\bar{r}^2}{R}} d\bar{t}^2 - \frac{1}{1-k\frac{\bar{r}^2}{R}} d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2 \quad (12.11)$$

Ora il parallelismo fra le due metriche é completo: per chiarezza riscivo le equazioni in forma piú chiara: sia all'interno della massa collassante, ossia per coordinate comoventi $r < a$, sia all'esterno della massa collassante la metrica é del tipo

$$ds^2 = B(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{t}^2 - A(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\bar{\Omega}^2 \quad (\Omega = \bar{\Omega})$$

Ciò che distingue i due coefficienti sono i coefficienti $B(\bar{r}, \bar{t})$ e $A(\bar{r}, \bar{t})$ le cui espressioni sono

$$r \leq a \begin{cases} B(\bar{r}, \bar{t}) &= \frac{R}{S} \frac{1-S}{1-R} \frac{\left(1-k\frac{a^2}{S}\right)^2}{1-k\frac{\bar{r}^2}{R}} \\ A(\bar{r}, \bar{t}) &= \frac{1}{1-k\frac{\bar{r}^2}{R}} \end{cases}$$

$$r > a \begin{cases} B(\bar{r}, \bar{t}) &= 1 - \frac{\bar{r}}{r_s} \\ A(\bar{r}, \bar{t}) &= \left(1 - \frac{\bar{r}}{r_s}\right)^{-1} \end{cases}$$

Le condizioni di raccordo consistono nel porre uguali i rispettivi coefficienti nel passaggio interno-esterno dato dalla condizione $r = a \Leftrightarrow \bar{r} = aR(t)$. Si è visto prima che imponendo l'uguaglianza di $A(\bar{r}, \bar{t})$ fra interno ed esterno si è trovato $r_s = a^3k$. Ciò che si vuole mostrare è che la metrica è continua fra interno ed esterno: per far ciò uguagliamo anche i coefficienti $B(\bar{r}, \bar{t})$ in $r = a$ ricordando che $S(a, t) = R(t)$. Come si vede il coefficiente B interno si semplifica parecchio e resta

$$1 - k\frac{a^2}{R} = 1 - \frac{r_s}{aR}$$

che è verificato, poiché $r_s = a^3k$. Ricapitolando, al di là della confusione generata da tutti i cambi di variabili che ci sono stati, il risultato importante di questa trattazione è il seguente: le metriche utilizzate sia all'interno che all'esterno della massa collassante soddisfano le equazioni di Einstein e il passaggio fra interno ed esterno avviene con continuità.

Nella prossima sottosezione ci porremo il problema di stimare il tempo necessario al collasso dal punto di vista di un osservatore esterno e concluderemo questo capitolo dedicato al collasso gravitazionale. Nel prossimo e ultimo capitolo si vedrà brevemente l'utilizzo della relatività generale in ambito cosmologico.

12.2.4 L'osservazione del collasso dall'esterno

In quest'ultima parte vedremo come appare il collasso dal punto di vista di un osservatore esterno alla massa collassante. Cominceremo con il chiederci in quanto tempo, secondo un osservatore esterno, avviene il collasso fino al raggio di Schwarzschild dalla massa collassante r_s . Prima di iniziare con il calcolo puntualizziamo alcune delle equazioni che sono state ricavate fino a qui. La superficie della massa collassante è definita dall'aver $r = a$, ossia ha coordinata comovente r fissa. La coordinata fisica \bar{r} è legata a quella comovente dal fattore di scala $R(t)$: $\bar{r} = rR(t)$. In particolare, le distanze fisiche sulla superficie sono $\bar{r} = aR(t)$. Era risultato comodo definire la funzione $S(r, t)$ da cui si ricavava facilmente $S(a, t) = R(t)$: infatti si aveva

$$S(r, t) = 1 - \sqrt{\frac{1 - kr^2}{1 - ka^2}} (1 - R) \Rightarrow S(a, t) = R(t)$$

Si era anche ricavata la legge di trasformazione che permette di passare dal tempo comovente t al tempo esterno \bar{t} :

$$\bar{t}(r, t) = \sqrt{\frac{1 - ka^2}{k}} \int_{S(r, t)}^1 \left(\frac{N}{1 - N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N}{1 - \frac{ka^2}{dN}}$$

da cui si trova immediatamente

$$\bar{t}(a, t) = \sqrt{\frac{1 - ka^2}{k}} \int_{R(t)}^1 \left(\frac{N}{1 - N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N}{1 - \frac{ka^2}{dN}}$$

Tra l'altro, con le convenzione che $R(0) = 1$, si vede subito che $\bar{t}(r, 0) = t(r, 0)$. Come detto prima si vuole trovare il tempo di collasso \bar{t}_0 fino al raggio r_s dal punto di vista di un osservatore esterno. Quindi la condizione (con le coordinate comoventi) da imporre é $r_s = aR(t_0) \Rightarrow R(t_0) = r_s/a = a^2k < 1$ ricordando che $r_s = a^3k$. Ora si tratta di calcolare $\bar{t}(a, t_0)$ con la formula data ora e si trova

$$\bar{t}(a, t_0) = \sqrt{\frac{1 - ka^2}{k}} \int_{a^2k}^1 \left(\frac{N}{1 - N} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{N}{1 - \frac{ka^2}{dN}} = \infty$$

Si é trovato un risultato decisamente notevole: dal punto di vista di un osservatore esterno il collasso fino al raggio di Schwarzschild r_s avviene in un tempo infinito e, di conseguenza, il collasso a $r = 0$ non viene osservato.

Fatto questo ci poniamo un'altra problema: un fotone viene emesso dalla superficie collassante (definita da $r = a$ e da $\bar{r}_P = aR(t_P)$) ad un istante $\bar{t}_P = \bar{t}(a, t)$; ci si chiede a che istante \bar{t}_Q (quindi dal punto di vista di un osservatore esterno) il raggio raggiunge un'osservatore posto nel punto Q con coordinate \bar{r}_Q . Considero un fotone che si muove radialmente nella metrica di Schwarzschild: in generale ha $ds^2 = 0$ e sará nulla anche la parte angolare del ds^2 per cui rimane

$$\left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right) d\bar{t}^2 - \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 = 0$$

da cui

$$\frac{d\bar{t}}{d\bar{r}} = \left(1 - \frac{r_s}{\bar{r}}\right)^{-1} = \frac{\bar{r}}{\bar{r} - r_s} \Rightarrow \bar{t}_Q = \bar{t}_P + \int_{\bar{r}_P}^{\bar{r}_Q} \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r} - r_s} \right) d\bar{r}$$

Si vede immediatamente che nel limite in cui $\bar{r}_P \rightarrow r_s$ allora l'integrale diverge ossia il fotone viene rivelato in un istante $\bar{t}_Q \rightarrow \infty$. Si ritrova quindi l'infinito nel passaggio fra coordinate comoventi e di Schwarzschild che si é stato trovato nel calcolo precedente. Come ultimo aspetto del collasso osservato dall'esterno studiamo il red-shift subito dai fotoni emessi dalla superficie: consideriamo un punto P sulla superficie che emette onde e chiamamo Δt il tempo proprio fra due creste, ossia il tempo misurato da un'osservatore solidale con il punto che emette. Ovviamente la frequenza propria é $\nu_0 = 1/\Delta t$. Ora cerco di determinare la corrispondente grandezza, misurata da un osservatore esterno nel punto Q , $\Delta \bar{t} = 1/\nu_F$. Si é visto prima che

$$\bar{t}_Q = \bar{t}(t) = \underbrace{\bar{t}(a, t)}_{\bar{t}_P} + \int_{\bar{r}_P}^{\bar{r}_Q} \left(\frac{\bar{r}}{\bar{r} - r_s} \right) d\bar{r} = \underbrace{\bar{t}(a, t)}_{\bar{t}_P} + \int_{\bar{r}_P}^{\bar{r}_Q} \left(1 - \underbrace{\frac{r_s}{aR}}_{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}$$

Per intervalli piccoli posso fare la seguente approssimazione:

$$\frac{\nu_0}{\nu_F} = \frac{\Delta \bar{t}}{\Delta t} \approx \frac{d\bar{t}(t)}{dt}$$

dalla formula precedente si trova

$$\frac{d\bar{t}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\bar{t}(a, t)) - a\dot{R} \left(1 - \frac{r_s}{aR}\right)^{-1}$$

Il rapporto $\frac{\nu_0}{\nu_F}$ dipende da due fattori: il primo é l'effetto Doppler dovuto al moto della massa collassante mentre il secondo é dovuto alla metrica di Schwarzschild (la derivata va fatta

rispetto all'estremo inferiore di integrazione per cui si considera la funzione integranda valutata all'estremo di integrazione e la si moltiplica per la derivata temporale dell'estremo di integrazione, con un segno meno). Ricordando l'espressione di $\bar{t}(r, t)$ data sopra si ha

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{t}(t)}{dt} &= -\dot{R} \left(\frac{1 - ka^2}{k} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{R}{1 - R} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{r_s}{aR} \right)^{-1} - a\dot{R} \left(1 - \frac{r_s}{aR} \right)^{-1} \\ &= \dot{R} \left(1 - \frac{r_s}{aR} \right)^{-1} \left[\sqrt{\frac{1 - ka^2}{k}} \sqrt{\frac{R}{1 - R}} + a \right]\end{aligned}$$

Si era visto che valeva

$$\dot{R}^2 = k \left(\frac{1}{R} - 1 \right) \Rightarrow 0 > \dot{R} - \sqrt{k} \sqrt{\frac{1 - R}{R}}$$

e, sostituendo nell'equazione sopra si trova ($\dot{R} < 0$ perché la massa sta collasndo!)

$$\frac{\nu_0}{\nu_F} = \left(1 - \frac{r_s}{aR} \right)^{-1} \left[\sqrt{1 - ka^2} + a\sqrt{k} \sqrt{\frac{1 - R}{R}} \right]$$

Considero l'equazione appena scritto nel caso particolare in cui $t = \bar{t} = 0$ per cui $R = 1$ e $\dot{R} = 0$. In questo caso si trova il semplice risultato

$$\frac{\nu_0}{\nu_F} = \left(1 - \frac{r_s}{a} \right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\nu_F}{\nu_0} = \left(1 - \frac{r_s}{a} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{g_{00}} \quad \text{in Schwarzschild}$$

ricordando che $r_s = a^3 k \Rightarrow ka^2 = r_s/a$ e g_{00} é valutato nel punto di emissione (in generale é $\bar{r} = aR(t)$ da cui $\bar{r}(0) = aR(0) = a$). Ora considero il caso opposto: la superficie sta avvicinando il suo raggio di Schwarzschild ossia $R(t) \rightarrow r_s/a = ka^3/a = ka^2$ e si é visto prima che, dal punto di vista di un osservatore esterno, un fotone impiega un tempo tendente all'infinito a lasciare la superficie del corpo collassante. Stavolta si trova

$$\frac{\nu_F}{\nu_0} = \frac{1}{2\sqrt{1 - ka^2}} \left(1 - \frac{r_s}{aR(t)} \right) \xrightarrow{\bar{r} \rightarrow r_s} 0$$

Fisicamente questo risultato si potrebbe interpretare in questo modo: mentre la superficie si avvicina a r_s il fotone creato sulla superficie, per scappare, deve vincere un campo gravitazionale sempre piú intenso; per fare questo deve cedere energia al campo ossia deve diminuire di frequenza visto che la sua energia é proporzionale alla frequenza ; se la superficie si avvicina ad r_s tutta la sua energia se ne va in questo modo e il fotone appare (se appare) enormemente red-shiftato ad un osservatore esterno.

Concludiamo questo capitolo con un esempio astrofisico: sono state osservate pulsar binarie con massa $M \simeq (1.5 \pm 1)M_{\oplus}$. Le pulsar a raggi X legate a stelle visibili sono ottimi candidati a formare buchi neri (sottraendo materia alla compagna visibile potrebbero superare la massa critica per cui la configurazione stella di neutroni non é piú stabile). Un esempio piuttosto stringente dell'esistenza dei buchi neri é stato trovato nel 1970: in quell'anno é stata osservata una sorgente di raggi X e onde radio ed é stata chiamata *CYGNUS X*. Questa sorgente ha un partner, chiamato HDE226868, che é una supergigante blu con massa $M \approx 20 \div 100M_{\oplus}$. Questa supergigante blu trasferisce materiale alla sorgente di raggi X e onde radio. Si sa per certo che la massa di *CYGNUS X* é superiore alle 10 masse solari, un limite ben superiore per avere una stella di neutroni per cui si interpreta *CYGNUS X* come un buco nero e l'intensa radiazione emessa deriva dalle emissioni di radiazione che avvengono nel disco di accrescimento del buco nero a causa dell'accelerazione subita dalle cariche in caduta verso il buco nero.

Capitolo 13

Universo su grande scala

13.1 Inquadramento del problema

In quest'ultimo capitolo vedremo un'applicazione della relatività generale nella descrizione dell'universo su grande scala. Per inquadrare il problema daremo dei dati osservativi sull'universo in modo da capire quale metrica risulterà più adatta nel descrivere l'universo. Vista la brevità della trattazione non si può pretendere organicità o completezza, ma nondimeno di ricaveranno risultati piuttosto notevoli. Comunque cominciamo con i dati osservativi:

1. l'universo appare isotropo a grandi scale (superiori agli ammassi di galassie).
2. l'universo è in espansione, come si deduce dallo studio del red-shift delle galassie.
3. la legge di Hubble quantifica il tasso di espansione dell'universo: il red-shift cosmologico z è definito come $z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$ dove λ è la lunghezza d'onda emessa da una sorgente e λ_0 è quella osservata qui sulla Terra. Nel caso dell'universo vale anche la relazione $z = (Hd)/c$ dove $H \equiv H(t)$ è il parametro di Hubble: H dipende solo dal tempo in che significa che è una costante a tempo fissato e ha le dimensioni dell'inverso di un tempo.
4. dimensionalmente H^{-1} è un tempo e vale circa $1.5 \cdot 10^{10}$ anni che è vicino all'età stimata dell'universo.
5. l'universo è pervaso da una radiazione cosmica di fondo (CMB) corrispondente a quella emessa da un corpo nero alla temperatura di $2.7K$ con picco nella regione delle microonde.
6. la CMB non può essere di origine stellare in quanto è isotropa a meno di 10^{-5} .
7. l'origine della CMB risale al tempo di formazione degli atomi (idrogeno principale) per combinazione degli ioni e degli elettroni presenti. Quest'epoca viene detta ricombinazione. Dopo la ricombinazione i fotoni smettono di interagire con la materia in quanto è diventata neutra, lasciando un'impronta di cui la CMB è l'immagine stirata dopo miliardi di anni di espansione cosmica.

Come detto prima l'universo appare osservativamente isotropo. Se aggiungo l'*ipotesi* che sia anche spazialmente omogeneo ad ogni istante mi trovo ad avere sottospazi a tempo fissato massimalmente simmetrici, descrivibili con la metrica di RW e, di conseguenza, si utilizza il tensore energia-momento di un fluido perfetto. L'unione dell'isotropia dell'universo, che è

di natura osservativa, unita all'ipotesi di omogeneità, il tutto a tempo fissato, é alla di ogni cosmologia é non per niente si chiama "*Principio cosmologico*".

Per fissare meglio le idee riscriviamo ancora una volta la metrica di RW e il tensore energia-momento del fluido perfetto:

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right] \\ T_m^{\mu\nu} &= (\rho_m + p_m) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} p_m \end{aligned} \quad (13.1)$$

Qualche breve osservazione sul sistema 13.1:

- la costante k é riscalata in modo da assumere i valori $+1, 0, -1$ corrispondenti a curvatura positiva, nulla e negativa.
- La densità ρ e la pressione p del tensore energia-momento sono funzioni del tempo.
- il tensore energia-momento é stato etichettato con il pedice " m " che identifica i contributi di materia e radiazione (come si vedrá c'è anche la costante cosmologica).
- la quadri-velocità del fluido é $u^\mu = (1, \vec{0})$, ossia il fluido é fermo rispetto alle coordinate comoventi (segue l'espansione per cui tutte le distanze sono scalate da $R(t)$ ma i rapporti di distanze rimangono costanti).

Come si vede nel sistema (13.1) compaiono tre funzioni incognite: il fattore di scala $R(t)$, la densità ρ e la pressione p ma le equazioni sono solo due; per risolvere il sistema serve un'altra equazione, nella fattispecie un'equazione di stato che leghi la pressione con la densità di energia ossia $p_m = p_m(\rho_m)$. Qui diamo solo i risultati fondamentali senza soffermarci sulla derivazione: nell'universo primordiale dominava la radiazione (epoca R.D.) e l'equazione é $p_m = \rho_m c^2/3$. Oggi si é in un'epoca di dominio della materia (ha densità di energia 10^5 volte maggiore di quella della radiazione) (epoca M.D.) per cui vale $p_m \ll \rho_m c^2 \Rightarrow p_m = 0$. Concludiamo questa parte introduttiva con qualche commento per poi passare a ricavare le equazioni del moto di $R(t)$:

1. l'universo appare come un fluido con 4-velocità delle galassie $u^\alpha = (1, \vec{0})$ ossia ogni galassia é identificata in ogni tempo dalle tre coordinate comoventi $\vec{x} = (r, \theta, \phi)$ e $x^0 = t = s =$ tempo proprio poiché con $u^\alpha = (1, \vec{0})$ si ha $u^\alpha u^\beta g_{\alpha\beta} = 1 = g_{00}$.
2. il punto identificato da $r = 0$ non ha nulla di particolare perché vale l'ipotesi di omogeneità, che non é manifesta nella metrica di RW. Convenzionalmente $r = 0$ corrisponde alla Terra.
3. $T^{00} = \rho_m$ é la densità di energia mentre il generale T^{00} é la densità di energia propria, ossia misurata da un osservatore comovente con il fluido.
4. Le galassie si muovono lungo delle geodetiche cioè vale l'equazione della geodetica $u^\alpha D_\alpha u^\beta = 0$ come si vede facilmente:

$$u^\alpha D_\alpha u^\beta = u^\alpha \left(\underbrace{\partial_\alpha u^\beta}_0 + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma \right) = \Gamma_{00}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\rho} \left(\underbrace{2\partial_0 g_{\rho 0}}_{\partial_0 g_{00}=0} - \overbrace{\partial_\delta g_{00}}^0 \right) = 0$$

13.2 Equazioni del moto

Per trovare l'andamento del fattore di scala $R(t)$ si dovranno risolvere le equazioni di Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}^m = 8\pi GT_{\mu\nu} \quad (13.2)$$

dove Λ é la costante cosmologica e corrisponde ad un fluido perfetto con $p = -\rho$. In generale l'espressione per il tensore energia-momento di un fluido perfetto é

$$T_{\mu\nu} = (p - \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}$$

e definendo $\tilde{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$ posso portare nel lato destro delle equazioni di Einstein la costante cosmologica e considerarla come una ulteriore sorgente di energia. Si vede che una costante cosmologica positiva corrisponde ad una densità di energia positiva e di conseguenza ad una pressione negativa: la densità e la pressione totali sono $\rho(t) = \rho_m + \tilde{\Lambda}$ e $p(t) = \rho_m - \tilde{\Lambda}$. Si é già visto che le equazioni di Einstein (13.2) posso essere scritte nella forma

$$R_{\mu\nu} = 8\pi GS_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda{}_\lambda \quad (13.3)$$

dove $T_{\mu\nu}$ contiene tutti contributi di energia, compresa la costante gravitazionale. Dall'espressione del tensore energia-momento si ricava agilmente

$$S_{\mu\nu} = (p + \rho)u_{\mu\nu} + \frac{1}{2}(p - \rho)g_{\mu\nu} \Rightarrow \begin{cases} S_{00} &= \frac{1}{2}(\rho + 3p) \\ S_{0i} &= 0 \\ S_{ij} &= \frac{1}{2}(p - \rho)g_{ij} \end{cases}$$

mentre nel capitolo precedente si sono già ricavate la componenti del tensore di Ricci della metrica RW:

$$\begin{cases} R_{00} &= -3\frac{\ddot{R}}{R} \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{ij} &= -\frac{R\ddot{R} + 2k + 2\dot{R}^2}{R^2}g_{ij} \end{cases}$$

Uguagliando membro a membro i termini di $S_{\mu\nu}$ e $R_{\mu\nu}$ si ottiene la coppia di equazioni

$$\begin{aligned} -3\frac{\ddot{R}}{R} &= 4\pi G(\rho + 3p) \\ \frac{R\ddot{R} + 2k + 2\dot{R}^2}{R^2} &= 4\pi G(p - \rho) \end{aligned}$$

Eliminando \ddot{R} dalla prima e \dot{R} dalla seconda le due equazioni assumono un aspetto piú comodo e sono dette equazioni di Friedmann:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 &= \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \\ \frac{\ddot{R}}{R} &= -\frac{4\pi G}{3}(p + 3\rho) \end{aligned} \quad (13.4)$$

Da queste equazioni si ricava subito un risultato importante, sia concettualmente che storicamente: oggi si é in un'era dominata dalla materia per cui posso porre uguale a zero la pressione in (13.4) per cui la seconda equazione diventa:

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho$$

Se richiedo che l'universo sia statico, cioè che la derivata temporale del fattore di scala \dot{R} sia nulla ho di conseguenza $\ddot{R} = 0 \Rightarrow \rho = 0$ per cui se la densità di materia è diversa da zero allora *non* può esistere una soluzione statica delle equazioni di Einstein. Questo risultato, messo in luce da Einstein stesso, (e ricavabile anche in fisica newtoniana) spinse Einstein nel 1917 ad introdurre un ulteriore termine nelle sue equazioni che rendesse possibile $\rho + 3p = 0$ anche in presenza di materia. Questo termine venne chiamato costante cosmologica e può essere interpretato in due modi: se inserito nel lato sinistro delle equazioni di Einstein lo si considera una proprietà (controversa) dello spazio-tempo, mentre se trasportato nel lato destro diventa una forma piuttosto insolita di densità di energia. Comunque la storia della costante cosmologica non finisce qui: nel 1929 Hubble scopre che l'universo non è affatto statico (fino ad allora era avvio o quasi che l'universo dovesse essere statico) per cui la funzione per cui era stata introdotta la costante cosmologica cade e viene posta uguale a zero. Ma, come vedremo in chiusura di questo capitolo, la storia della costante cosmologica non finisce qui.

Nel capitolo precedente, trascurando i termini di pressione nell'espressione del tensore energia-momento si era ottenuto il confortante risultato

$$\frac{d}{dt}(R^3\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho \propto R^{-3}$$

che esprime la conservazione della massa. In questo capitolo, invece, si considera anche la pressione e la legge di conservazione del tensore energia-momento è in generale espressa con l'utilizzo della derivata covariante: $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Inserendo l'espressione del tensore energia-momento del fluido perfetto la conservazione covariante diventa

$$D_\mu ((p + \rho)u^\mu) u^\nu + (p + \rho)u^\mu D_\mu u^\nu - g^{\mu\nu} \partial_\mu p = 0$$

ricordando che la derivata covariante è un operatore differenziale, ossia soddisfa la regola di Leibniz, e, agendo su uno scalare, è equivalente a quella ordinaria. L'espressione precedente si semplifica notando che il secondo termine è nullo in quanto $u^\mu D_\mu u^\nu = 0$ in quanto è l'equazione della geodetica. Inoltre, se $\nu = i$ si ottiene l'identità $0 = 0$ poiché il primo termine è nullo perché $u^i = 0$ e l'ultimo è nullo poiché la pressione è funzione solo del tempo e non delle coordinate spaziali, altrimenti cadrebbe l'ipotesi di omogeneità e isotropia. Resta solo da vedere il caso $\nu = 0$ e si ottiene

$$\frac{1}{\sqrt{g}} (\partial_\mu (p + \rho) \sqrt{g} u^\mu) = \dot{p}$$

poiché $u^0 = g^{00} = 0$, $g^{0i} = 0$ e vale l'equazione (dimostrata nel caso della 4-corrente quando si è ricavata la conservazione covariante della 4-corrente)

$$D_\mu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\mu (\sqrt{g} j^\mu)$$

dove $\sqrt{g} = -\det g_{\mu\nu}$ e, nel caso di RW $\sqrt{g} = \sqrt{R^6(t)} = R^3(t)$. Di tutte le derivate dell'equazione precedente, l'unica a dare risultati non nulli è quella temporale per cui l'equazione precedente diventa

$$\frac{d}{dt} ((p + \rho)R^3(t)) = R^3 \dot{p} \Rightarrow 3\dot{R}(p + \rho) + R\dot{p} = 0 \quad (13.5)$$

Nel caso della radiazione $p_r = \rho_r/3$ ed inserendo questo risultato in (13.5) si trova $4\dot{R}\rho_r + R\dot{\rho}_r = 0$ da cui si trova

$$\frac{d}{dt}(R^4\rho) = 0 \Rightarrow \frac{8\pi G}{3}\rho_r R^4 = C_2 = \text{costante}$$

Nel caso della materia, invece, $p_m = 0$ per cui l'equazione (13.5) diventa semplicemente

$$\frac{d}{dt}(R^3 \rho) = 0 \Rightarrow \frac{8\pi G}{3} \rho_m R^3 = C_1 = \text{costante}$$

Considero ora le equazioni di Friedmann (13.4) separando il contributo di materia e radiazione, che indico con il pedice “ m ”, e quello della costante cosmologica $\tilde{\Lambda}$ ottenendo

$$\begin{aligned} \dot{R}^2 &= -k + \frac{8\pi G}{3} (\rho_m + \tilde{\Lambda}) R^2 \\ \frac{\ddot{R}}{R} &= -\frac{4\pi G}{3} (\rho_m + 3p_m - 2\tilde{\Lambda}) \end{aligned} \quad (13.6)$$

ricordando che $\rho_\Lambda = \tilde{\Lambda}$ e $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Dalle equazioni scritte ci si rende conto che in assenza di costante cosmologica, poiché ρ_m e p_m sono positivi allora $\ddot{R} < 0$ ossia ci si aspetta che l'espansione dell'universo sia decelerata. Ma nel 1999 si é capito, studiando le supernovae ad alto red-shift, che l'espansione dell'universo é accelerata: la costante cosmologica é diversa da zero e grande abbastanza da aversi $\rho_m + 3p_m - 2\tilde{\Lambda} < 0 \Rightarrow \ddot{R} > 0$. Come vedremo in chiusura del capitolo la costante cosmologica osservata solleva almeno tre problemi, ma prima discuteremo nella prossima sezione la classificazione degli universi e definiremo diverse quantità di uso comune in cosmologia.

13.3 Classificazione degli universi

Dalla prima equazione di Friedmann (senza costante cosmologica) (13.4), definendo il parametro di Hubble $H(t) \equiv \dot{R}/R$, se si richiede che la costante k sia nulla allora la densità ρ viene definita densità critica di energia e vale

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

A partire dalla densità critica si definiscono i parametri di densità: il parametro di densità di una sorgente di energia é pari al rapporto fra la sua densità di energia e la densità critica:

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \quad \Omega_\Lambda = \frac{\tilde{\rho}}{\rho_c}$$

mentre il parametro di densità totale é la semplice somma dei vari parametri di densità presenti. Prima di scoprire che l'universo si sta espandendo in modo accelerato si era definito un parametro adimensionale di decelerazione Q che ne avrebbe dovuto quantificare la decelerazione:

$$Q = -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = -\frac{R^2}{H^2 R}$$

Visto che l'universo é accelerato il suo parametro di decelerazione é negativo. Sempre dalla prima equazione del sistema (13.4) si trova

$$\Omega = \frac{\rho}{\rho_c} = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 + \frac{k}{R^2 H^2} = 1 + \frac{k}{\dot{H}^2}$$

Si distinguono quindi i seguenti casi:

$$\begin{aligned} \Omega > 1 &\leftrightarrow \rho > \rho_c &\iff k = +1 \\ \Omega = 1 &\leftrightarrow \rho = \rho_c &\iff k = 0 \\ \Omega < 1 &\leftrightarrow \rho < \rho_c &\iff k = -1 \end{aligned}$$

Dalla seconda equazione del sistema (13.4) si riesce a legare il parametro di decelerazione alle densità di energia:

$$2Q = -2\frac{\ddot{R}}{H^2 R} = -\frac{8\pi G}{3H^2} \left(\rho_m + 3p_m - 2\tilde{\Lambda} \right) \simeq \frac{\rho_m - 2\tilde{\Lambda}}{\rho_c}$$

ricordando che oggi siamo in un'era dominata dalla materia (a parte la costante cosmologica) per cui la pressione é trascurabile. Alla fine, dall'equazione precedente, posso scrivere

$$Q = \frac{1}{2}\Omega_m - \Omega_\Lambda$$

e, sperimentalmente, $\Omega_m \sim 1/3$ e $\Omega_\Lambda \sim 2/3$ da cui $Q < 0$. Cerco ora delle soluzioni qualitative per il fattore di scala $R(t)$: considero la prima equazione di Friedmann (13.4) nella forma

$$\dot{R}^2 = -k + \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 = -k + \frac{8\pi G}{3} \left(\rho_m + \frac{\Lambda}{8\pi G} \right) R^2 = -k + \frac{C_n}{R^n} + \frac{\Lambda}{3}R^2$$

dove C_n sta per C_1 della materia e C_2 della radiazione (si era definito $C_1 = (8\pi G)/3\rho_m R^3$ e $C_2 = (8\pi G)/3\rho_r R^4$). L'equazione precedente può essere scritta nella forma

$$\dot{R}^2 + V_{eff}(R) = -k \quad \text{con} \quad V_{eff}(R) = -\frac{C_n}{R^n} - \frac{\Lambda}{3}R^2 \quad \text{con} \quad n = 1 \Leftrightarrow M.D. \quad n = 2 \Leftrightarrow R.D.$$

Come si intuisce, a seconda del valore di Λ si hanno diverse possibilità. Qualitativamente baste considerare i casi $\Lambda < 0$, $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$. Cominciamo con $\Lambda < 0$: il termine in C_n diventa trascurabile al crescere di R e rimane quindi $V_{eff} = -\Lambda/3R^2 > 0$ e crescente con R . Ora k può assumere i valori $1, 0, -1$ e \dot{R}^2 é definito positivo. Ad un certo punto V_{eff} eguaglia k quindi $\dot{R} = 0$ ossia si ha un punto di inversione; dopo di che l'universo comincia a contrarsi. Quindi indipendente dai valori di k l'universo raggiunge un massimo e comincia a contrarsi; si vede che l'estensione massima si ha per $k = -1$ perché allora $-k = +1$ che é il massimo valore che può assumere V_{eff} .

Vediamo ora il caso $\Lambda = 0$, che é quello che si pensava fino al 1999. Ora $V_{eff} = -C_n/R^n < 0$ ma crescente (tende a zero da sotto per grandi R). In questo caso si ha la chiara identificazione fra geometria dell'universo e valore di k : se $k = 1$ l'universo raggiunge un massimo e poi inizia a contrarsi (V_{eff} non può essere maggiore di $-k$ perché \dot{R}^2 é definito positivo), se $k = 0$ si espande indefinitamente, arrivando ad un'espansione infinita con velocità nulla e ha geometria euclidea, mentre se $k = -1$ ha geometria iperbolica e si espande indefinitamente con velocità residua anche all'infinito.

Resta da vedere il caso $\Lambda > 0$, che tra l'altro é ciò che si osserva. Ora V_{eff} é sempre negativo ma ha la forma di una parabola (non proprio ma qualitativamente é accettabile) con concavità verso il basso. Poiché V_{eff} é sempre negativo sono ammessi tutti i valori di $R(t)$ nel caso $k = 0, -1$ poiché non si ha mai $\dot{R} = 0$ quindi se $k = 0, -1$ l'universo é aperto. Il caso $k = 1$ é piú complicato: si possono avere regioni ammesse per $R(t)$ tra $R = 0$ e un valore max e tra un valore minimo (maggiore dell'altro massimo) e l'infinito, se V_{eff} interseca in due punti l'ordinata -1 , oppure può essere ammesso qualunque valore di $R(t)$ se V_{eff} rimane sempre sotto -1 . Insomma é possibile un universo aperto anche con $k = +1$.

13.4 Red-shift cosmologico

Considero un segnale luminoso emesso da un punto di coordinata comovente r_1 al tempo t_1 e ricevuto in un punto di coordinata comovente $r_0 \equiv 0$ al tempo $t_0 > t_1$. Essendo un fotone ha

$ds^2 = 0$ e, senza perdere in generalit a considero un fotone radiale, per cui $\delta\Omega = 0$. La metrica da utilizzare   quella di RW per cui si ha

$$ds^2 = 0 = dt^2 - R^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} \Rightarrow \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = f(r_1) = \begin{cases} \arcsin r_1 & \leftrightarrow k = 1 \\ r_1 & \leftrightarrow k = 0 \\ \operatorname{arcsinh} r_1 & \leftrightarrow k = -1 \end{cases}$$

(in questo modo entrambi gli integrali sono positivi) Considero un segnale emesso con una certa frequenza fissata: se il periodo dell'onda emessa in assenza di gravit a (tempo proprio)   δt_1 allora la frequenza   $\nu_1 = 1/\delta t_1$. Sulla Terra il segnale viene ricevuto con un periodo δt_0 e di conseguenza con una frequenza $\nu_0 = 1/\delta t_0$. Dall'equazione precedente si vede che $f(r_1)$ dipende solo dalle coordinate comoventi del punto di emissione e del punto di ricezione per cui posso scrivere

$$\int_{t_1 + \delta t_1}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) = \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \Rightarrow \int_{t_0}^{t_0 + \delta t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_1}^{t_1 + \delta t_1} \frac{dt}{R(t)}$$

Negli integrali precedenti δt indica una quantit a finita per cui si possono valutare come l'integrando, valutato ad un estremo dell'intervallo di integrazione, moltiplicato per l'intervallo di integrazione:

$$\frac{\delta t_0}{R(t_0)} = \frac{\delta t_1}{R(t_1)} \Rightarrow \frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{R(t_1)}{R(t_0)}$$

Il risultato appena trovato permette una comoda definizione del red-shift: il red-shift z di una sorgente   definito come

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1}$$

dove λ_0   la lunghezza d'onda emessa e λ_1   la lunghezza d'onda ricevuta. Utilizzando i risultati appena ottenuti posso scrivere

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - 1 = \frac{\nu_1}{\nu_0} - 1 = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \Rightarrow 1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} \quad (13.7)$$

quindi, il valore del redshift di una sorgente permette di risalire al fattore di scala che aveva l'universo al tempo di emissione dell'onda ricevuta ora. L'equazione (13.7) permette una comoda caratterizzazione del red-shift delle galassie vicine (dalle approssimazioni che seguono si capisce cosa vuol dire vicine): sviluppando in serie di Taylor al primo ordine posso scrivere

$$z = \frac{R(t_0) - R(t_1)}{R(t_1)} = (t_0 - t_1) \frac{\dot{R}(t_0)}{R(t_0)}$$

inoltre posso anche approssimare "al contrario":

$$\frac{t_0 - t_1}{R(t_0)} \sim \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \sim r_1$$

(una porzione piccola dell'universo appare piatta anche se l'universo non lo   nel suo insieme) quindi, unendo i risultati trovati si ha:

$$z = r_1 \dot{R}(t_0) = v \Rightarrow z \simeq \frac{v}{c}$$

(c si introduce per ragioni dimensionali visto che z é un numero puro) Tra l'altro il red-shift appena trovato é equivalente alla legge di Hubble:

$$v = cz = r_1 \dot{R}(t_0) = r_1 R \frac{\dot{R}}{R} = \bar{r} H(t)$$

dove \bar{r} é la distanza fisica fra la sorgente e l'osservatore, legata alla distanza comovente nel solito modo.

13.4.1 z al secondo ordine

Calcoliamo ora il red-shift z al secondo ordine, sviluppando in serie di Taylor il fattore di scala $R(t)$. Prima di far ciò riepiloghiamo le equazioni e le grandezze necessarie per lo sviluppo: vale l'equazione fondamentale (13.7)

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 = \frac{R_0}{R_1} - 1$$

inoltre definisco $\Delta = t_0 - t_1 > 0$. Il parametro di Hubble é $H_0 \equiv \dot{R}_0/R_0$ e ricordo il parametro di decelerazione $Q = -(\ddot{R}_0 R_0)/\dot{R}_0^2 = -\ddot{R}_0/(H_0^2 R_0)$. Sviluppando il fattore di scala attorno ad R_0 ed arrendandosi al primo secondo si ha

$$\begin{aligned} R_1 \equiv R(t_1) &= R_0 - \Delta \dot{R}_0 + \frac{1}{2} \Delta^2 \ddot{R}_0 \\ &= R_0 - \Delta H_0 R_0 - \frac{1}{2} Q_0 H_0^2 R_0 \Delta^2 \\ &= R_0 \left(1 - H_0 \Delta - \frac{1}{2} Q_0 H_0^2 \Delta^2 \right) \end{aligned}$$

Inserendo questo risultato nell'equazione $z = R_0/R_1 - 1$ si ottiene

$$z = H_0 \Delta + H_0^2 \Delta^2 \left(1 + \frac{Q_0}{2} \right) \Rightarrow \Delta = \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{Q_0}{2} \right) z^2 \right]$$

Ora inserisco lo sviluppo di $R(t)$ al primo ordine nell'integrale $\int_{t_1}^{t_0} dt/R(t)$ (integrando avrò uno sviluppo al secondo ordine):

$$\begin{aligned} R(t) &= R_0 + (t - t_0) \dot{R}_0 = R_0 (1 + (t - t_0) H_0) \Rightarrow \\ \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} &= \frac{1}{R_0} \int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{1 + \underbrace{(t - t_0)}_{\Delta} H_0} = \frac{1}{R_0} \left[\Delta + \frac{1}{2} \Delta^2 H_0 \right] \end{aligned}$$

mentre in generale $\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = f(r_1) = r_1 + O(r_1^3)$ poiché sia il seno che il seno iperbolico sono funzioni dispari. Inserendo lo sviluppo di Δ trovato prima nell'ultimo sviluppo scritto si trova, al secondo ordine in z

$$d_1 = R r_1 = \frac{1}{H_0} \left(z - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{Q_0}{2} \right) z^2 \right)$$

che fornisce la correzione al secondo ordine della legge di Hubble. Quello che viene misurato sperimentalmente é il parametro di decelerazione Q_0 e il parametro di Hubble al tempo presente H_0 . La distanza appena definita, d_1 , si chiama distanza propria e non é l'unico tipo di distanza in uso in cosmologia. Legata ad essa vi é la distanza di luminosità

$d_L = d_1(R_0/R_1) = d_1(1+z)$ Si vede subito che, per oggetti molto vicini, per cui $z \rightarrow 0$, le due distanze coincidono. Comunque non ci soffermeremo su queste questioni. Passeremo invece a dare una panoramica dei risultati osservativi degli ultimi anni per introdurre e trattare brevemente la Dark Matter e la Dark Energy (che non é altro che la costante cosmologica) per concludere con un breve elenco dei problemi del modello standard cosmologico.

13.5 Dati osservativi e problemi del Modello Standard

Fino al 1999 si pensava che l'universo si stesse espandendo in modo decelerato, con parametro di decelerazione $Q_0 \sim 0.1 - 1$ e il parametro di Hubble era noto con incertezza decisamente grande: $H_0 \sim 50 - 100 km Mps^{-1} sec^{-1}$. Poi le misure sono diventate molto piú precise (non ci soffermiamo sul come) dando i seguenti risultati:

- $H_0 = 70 \pm 4 km Mps^{-1} s^{-1}$ da cui si ottiene una stima precisa della densitá critica ρ_c . Questa misura di H_0 insieme a quella di Q_0 deriva dallo studio delle supernovae ad alto red-shift.
- Il parametro di densitá della materia $\Omega_m = 0.3 \pm 0.04$, derivante dallo studio della dinamica delle galassie e degli ammassi di galassie, e quello della costante cosmologica o Dark Energy Ω_Λ vale 0.7 ± 0.03 . Da questi dati si ricava che il parametro di decelerazione é $Q_0 = \Omega_m/2 - \Omega_\Lambda = -0.55$ a testimonianza che l'universo é in espansione accelerata.
- Il parametri di densitá totale é $\Omega = \Omega_m + \Omega_\Lambda = 1 \pm 0.07$ quindi la densitá di energia dell'universo é molto vicina a quella critica. Questo significa che la curvatura dell'universo deve essere nulla e questo dato é in accordo con le anisotropie osservate nella CMB.
- l'età dell'universo é stimata in 14 ± 1 miliardi di anni.

Dopo questa breve rassegna diamo un'occhiata alla composizione di ρ_m : si é detto che la radiazione contribuisce poco alla densitá di energia dell'universo, 10^{-5} , ma la composizione di ρ_m é tutt'altro che intuitiva: solo 1/6 di ρ_m deriva da materia barionica, tipo protoni, neutroni... mentre i restanti 5/6 derivano da una forma di materia sconosciuta che non interagisce elettromagneticamente, quindi non emette radiazione. Tale componente viene detta Dark Matter e la prova della sue esistenza deriva dalle curve di rotazione delle galassie: le galassie si muovono con una velocitá tale da richiedere una quantitá di materia parecchie volte superiore a quella osservata. Quindi la densitá di energia derivante dalla materia barionica rende conto solo del 5% del totale. Tra l'altro la teoria della nucleosintesi, che spiega molto bene le abbondanze osservate di nuclei leggeri, fissa in modo stringente il parametro di densitá della materia barionica attorno a 0.04-0.05 confermando l'esistenza di questa materia oscura. Ci sono varie ipotesi sulla natura della Dark Matter, coinvolgenti particelle supersimmetriche stabili come i neutralini o altre particelle, ma nessuna ipotesi é stata ancora verificata.

La situazione non migliora, anzi peggiora, se si considera la Dark-Energy, la quale rende conto del 70% della densitá totale di energia dell'universo. Si possono sollevare (almeno) 3 problemi a tal proposito:

1. Λ ha dimensioni dell'inverso di un'area; con le costanti fondamentali di natura posso costruire la lunghezza di Planck $l_P = \sqrt{G\hbar} = 10^{-33} cm$ da cui mi aspetto un valore naturale $\sim 1/l_P^2 \sim 10^{66} cm^2$. Il valore osservato sperimentalmente é $\Lambda \sim 10^{-56} cm^2$ differente da quello aspettato ben 120 ordini di grandezza.

2. Posto che non si spiega il valore di Λ non se ne spiega neanche l'origine: é una nuova costante di natura o un campo a cui corrisponde una nuova particella, della quintessenza, che potrebbe decadere in particelle ordinarie e portare ad una fase di espansione decelerata? A questa domanda non si sa rispondere e anche qui le ipotesi sono tante, tra cui le spiegazioni basate sull'esistenza di extra-dimensioni spaziali estese.
3. Infine si nota il seguente fatto: attualmente $\Omega_\Lambda \sim \Omega_m$ mentre in passato Ω_Λ era trascurabile e in futuro sará (forse, se non decade) sempre piú dominante. Allora ci si chiede: c'è qualche motivo profondo per cui proprio ora $\Omega_\Lambda \sim \Omega_m$ o é una semplice coincidenza? Come il lettore avrá giá intuito che anche a questa domanda non si sa rispondere.

Fin' ora si é visto che il 95% del contenuto dell'universo desta seri problemi, ma il restante 5% non é poi tanto diverso: anche qui le difficoltà si sprecano. Qui accenneremo, senza calcoli, ad alcuni problemi del modello cosmologico standard, detto anche Hot Big Bang. Si puó mostrare che, all'interno del Big Bang, quindi utilizzando le equazioni di Friedmann, zone di cielo distanti piú di un grado non erano in contatto causale al tempo di emissione della CMB. Questo fatto si concilia male con l'isotropia osservata nella CMB perché non si riesce a spiegare come la CMB possa essere cosí isotropa se quando é stata emessa era formata da $10^5 - 10^6$ regioni causalmente disconnesse. Questo problema viene detto problema dell'orizzonte ed é connesso al problema della piattezza che discutiamo ora: oggi il parametro di densitá totale é molto vicino all'unitá e si puó mostrare che al tempo di Planck doveva differire dall'unitá di una parte su 10^{60} ma senza essere esattamente uno, altrimenti sarebbe uno in ogni tempo. Chiaramente la richiesta di un fine-tuning cosí forte non é soddisfacente. Infine resta il problema della mancata osservazione di monopoli magnetici: a $10^{-37} - 10^{-35}$ secondi dopo in Big-Bang l'universo dovrebbe aver attraversato una fase *GUT* (a questa energia si ha l'unificazione dell'interazione elettrodebole e di quella forte, con violazione del numero barionico ed esistenza di particelle mediatrici non ancora osservate che connettono quark e leptoni) con produzione di monopoli magnetici. Questi monopoli dovrebbero dare una densitá di energia talmente alta che l'universo si sarebbe dovuto chiudere su se stesso giá da un pezzo, ma evidentemente non é andata cosí. Il modo standard con cui si cerca di risolvere questi problemi (esclusi materia ed energia oscura) é l'introduzione di un periodo di espansione violenta (di tipo quasi esponenziale) che l'universo avrebbe attraversato al tempo *GUT*. Qui non ci soffermeremo su queste questioni in quanto libri che trattano di queste questioni (molto meglio di quanto potrei mai fare) ce ne sono molti.

Con questo si conclude questo lavoro. Mi scuso con gli eventuali lettori per le eresie scientifiche che sono rimaste in queste pagine. Invito chiunque mi voglia contattare per critiche, suggerimenti o anche ringraziamenti (che ogni tanto non guastano) a mandarmi una mail a antopubly@tiscali.it.